INSTITVTIONVM

ARITHMETICARVM LIBRI QVATVOR.

IN QVIBVS OMNIA, QVÆ AD NVMEROS ſimplices, fractos, radicales, ac proportionales pertinent Præcepta, clariſſimis demonſtrationibus, tum Arithmeticis, tum Geometricis illuſtrata traduntur.

Authore VINCENTIO LEOTAVDO Delphinate Valloyſiano Societatis IESV.



LVGDVNI,

Apud GVILLIELMVM BARBIER, Typographum Regium 1660.

CVM PERMISSV SVPERIORVM.

NOBILISSIMO

CLARISSIMOQVE DOMINO D.

FRANCISCO DE CHAILLIOT

TOPARCHÆ DV PLAN, DE la Tour &c., Brianconensium Prætori dignissimo Regióque Consiliario.

IS semper fuit (vir clarissime) *peritiorum matheseos cultorum sensus, à quo tuum, alienum minimè fore confido: vt eam eius disciplinæ partem, quæ discretam quantitatem contemplatur; cæteris, etsi suo singulæ splendore dignitatéque non careant, multiplici nomine præstare censuerint. Vt enim silentio præteream (quod vnum ipsi præ cæteris humanis artibus primas meritò compararet) ea omnia commoda & adiumenta, quæ in omnè mortalium vitæ genus præstare solet, quibúsque eorum nulla conditio potest carere. Vt omittam, quo quid momenti maioris esse queat? Insitam illam ab incunabulis humanæ mentis vim aliâ nullâ disciplinâ acriùs excitari; nullâ suauiùs acui, nullâ ad cæteras facultates, quæ ratiocinatione parantur, assequendas aptiùs fingi posse. Quid egregium illud munus referam, quod erga alteram sibi consortem continuæ quantitatis disciplinam exercet? Vt ad reconditissimas quasque eius contemplationes aditum aperiat tam planum: vt metam te priùs attigisse, quàm viam*

inuisse non sine admiratione, voluptatéque comperias: quantam Theorematum, Problematúmque, tum Arithmeticorum, tum Geometricorum vim in augustissimum matheseos thesaurum contulit illa Arithmeticis nixa rationibus Analytice? Illud demùm taceri nullo modo potest, quod huic vni competit, eámque præ ceteris eius ornamentis commendat, ius examinandi, probandique occultiores quásque, tùm suas ipsius, tum alienas mathematicas conclusiones: quas, heu sæpius! mens humana pro sua miseranda sanè sorte, vel p. incipiis, vnde consequuntur, veri speciem tantùm præ se ferentibus delusa, vel ratiociniorum multiplicitate obruta, certas ac euidenter demonstratas sibi persuadet, suaderéque conatur. Hoc autem verum à veri specie secernendi munere, deductis, quos adhibet, epilogismis, calculísque subductis facultas hæc ita fungitur: vt omni discussâ caligine sincerum & apertum difficultatum statum exhibeat intuendum. Quod Aritmetices ratiocinatricis erga cæteras matheseos facultates Geometriam præsertim, officium quo debeat apud studiosos earum cultores esse loco, non leui sit argumento vel vnum illud à me (ne vel plura, vel aliena, quæ abundè suppetunt, hic referam) paucis ante annis editum Examen celeberrimæ circuli Quadraturæ: quam vt veram & certam tum authoris eius nomen apud Geometras iure perillustre, tum ad eam, tam multiplex, támque eruditus ab eodem instructus apparatus admitti debere meritò persuaderet: nisi eam per numeros exploratio in apertam latentis alicuius defectus suspicionem adduxisset: à qua, vt breui in eiusdem examinis promotione, siue confirmatione sum ostensurus, eam minimè liberauit pererudita postea edita quadraturarum Geometrica deductio. Atque hæ (vir amplissime) *è multis paucæ numerorum insignes dotes eximiæque facultates eò sunt hîc obiter à me commemoratæ, quo minùs temerè & inconsul-*

tè

tè fecisse videar, dum hasce meas institutiones Arithmeticas nominis tui splendore commendandi consilium cepi: à quo, nisi tum materiæ ipsius, cuius memini, dignitas; tum innata tibi, quam omnibus exhibes, morum suauitas animos addidisset, omnino abstinuissem. Haud equidem nescius quàm longè foret tuis meritis inferior quæcunque à me profecta meæ erga te obseruantiæ ac voluntatis testificatio. Etenim Tu maiorum tuorum illustria facinora non secutus modò, sed & assecutus, amplissimæ ditionis Briançonensis, quæ Te è tua familia quarto Prætore meritò gloriatur, & aduersis belli temporibus columen & præsidium tutissimum, & secundis per pacem rebus nobilissimum decus & ornamentum agnosceris & haberis. Certè ex quo iustitiæ Tribunal omnium proborum cum plausu ac gratulatione conscendisti: sic, quam illa commodauit, tractasti libram: sic egisti, quod tradidit, ferrum: vt nec illam aliquando vel personarum dignitas extulerit altiùs, vel depressiùs abiecerit vlla munerum grauitas: nec istud vel remissior iuris obseruatio auerterit à sontibus, vel in insontes conuerterit vehementior. Recti ergo tenax adeò cum sis, vt non minori contentione, euentu longè sanè fœliciori, omne curui cum recto commercium soluas, & auerseris: quàm Geometræ nostri idem inquirant, & statuere conentur: haud mirum si sacra diuináque Themis sua illa armamenta tuis tam probe instructis manibus commiserit, nec tamen velum præter morem oculis obtenderit. Quid enim velo iis luminibus opus, quorum aciem nec perstringi fulgore, nec falsâ æqui specie deludi posse sciret? Quam equidem Tuam, Tuorúmque, qui tibi præluxerunt, in iure administrando integerrimam fidem, oculatißimámque prudentiam primi maiorum tuorum Tesseræ Gentilitiæ Authores præsagiisse videntur: dum geminâ aquilâ (quamquam alia symboli huius nobilißimi non defuerint argumenta)

illam fulciri, tertiáque alia protegi voluere. Quarum regiarum alitum intuitûs acies tam firma perhibetur, vt dum sublimes, solíque propiores, ætheris ipsius auram captant amæniorem, solares radios excipiat irretorta, nec illinc coniectam fugiant abditiores terreni recessus. Nec in eodem à maioribus ad te transmisso scutario Typo desiderari. Iidem passi sunt fortitudinis insigne: quod vt solet Turri firmissimâ adumbratur. Vt enim legum non vilescat authoritas; vt potentiorum in tenuiores audacia coerceatur: vt improborum frangantur conatus, quo animi robore magistratum præditum esse necesse est? quo quanto Tu quantáque cum solertia coniuncto valeas, quanto tui olim præstiterint, non alio pateat clariùs argumento, quàm summa illa tranquillitate, qua turbulentißimis temporibus vestræ curæ, tutelæque commissæ Alpes, dum æstuabant cæteræ, vsæ semper fuere. Etsi verò tanta vobis familiaris animi celsitudo in focis tuendis semper enituit: in tuendis tamen aris quàm splendidiùs emicuit? Stant in agro Briançonensi aræ intemeratæ, sacræ stant Ædes excelsis suis turribus integris insignes; rident omni ad cultum diuinum instrumento apparatúque ornatissimæ: occurrunt singulis penè biuiis, tumulísque apertioribus erecta humanæ salutis augusta trophæa. Cui post Deum accepta referri debet hæc sacrorum omnium incolumitas? Accepti ab Auo tuo nobilissimo Francisco de Chailliot *Prætorem agente, tanti beneficij memoriam nulla vnquam apud Briançonenses delebit obliuio. Eruperant per ea turbulentissima tempora (is erat annus à Virginis partu circiter millesimus quingentesimus octogesimus) tartareis ex antris furiis agitati, pacis, auitæque pietatis hostes infensissimi: qui flamma ferróque armati, toti quidem Prouinciæ Delphinatûs; sed Alpibus præsertim Briançonensibus supremam (si paterentur Superi) vastitatem intentabant. Quod à se perfici facilè posse, nec temerè*

mere, credebant; si arce ipsa Briançonensi, vnde longè latéque tutò grassari possent, potirentur. Ad hanc itaque accessum sibi parant nefaria perditorum aliquot ciuium vsi perfidiâ; qui per noctis tenebras intra vrbis septa eos admiserunt. Admißi ad arcem contendunt, eam, vel ex improuiso subituri, vel aperto impetu occupaturi. E votis neutrum cessit: & insidiæ fuère detectæ, & fortiter compressus est impetus: quem dum remittunt donec subsidiarius, quem operiebantur, accedat miles: eâ morâ peropportunè vsus Prætor patriæque Pater animo solertiáque quam ætate maturior, è valle Queyracensi Armatorum manipulum in Vrbis Arcísque auxilium euocat, dum manipulum alterum è Valle Loysia excitum, Druentiæ pontem ad S. Martinum, quà erat accedenti subsidio hostili necessariò transeundum, iubet occupare. Tum ciues numero & robore, adeóque animo auctiores, metûque omni aduentantium hostilium copiarum liberi, præsentiáque & oratione generosissimi Prætoris alacriores, repentino impetu hostes Arcem obsidentes inuadunt, cadúntque paucis elapsis: Ipsíque vrbis proditores comprehensi perfidiæ suæ pœnas ex Prætoris eiusdem sententiâ capite persoluêre. Quo egregio Aui tui tum vigilantiâ, tum fortitudine edito facinore Brianconensium rebus & sacris & prophanis parta est securitas tam tuta, vt perturbari deinceps non contigerit. Cum enim decennio post vir omni tum bellicarum, tum politicarum virtutum laude, singulari præsertim animi moderatione spectatissimus Heros Franciscus Bonnæus Lesdiguierius militiæ Gallicæ Supremus Præfectus olim futurus cotias omnes Alpes vel fortitudine occupasset, vel innata mansuetudine & clementia in suam potestatem adduxisset, hac potiùs vtendum, quàm illam prouocandum censuit Prætor consultissimus. Victoris itaque potestati vrbem, arcemque atque adeò ditionem totam Briançonensem eâ in primis

seruanda

seruanda conditione permisit, vt miles eius hæretica lue ferè omnis laborans à quauis in res quascunque ad diuinum cultum pertinentes inferendâ iniuriá seuerissimè prohiberetur; neve clericalis ordo à quoquam suorum (quod pertimescendum erat) vel molestia afficeretur, vel à solitis suis exercendis muniis impediretur: tantúmque quà gratia, quà rationibus apud ipsum valuit sapientissimus Prætor; vt singula se præstiturum fidem dederit, eámque deinde (qua erat vir ille magnus solâ hæresis labe tunc seipso minor, animi præstantiâ) cumulatè liberarit, vt non hostis, sed Patriæ defensor exceptus videretur. Quod per tempus eodem haud dubiè apud Heroem agente Prætore factum reor, vt Valoysiani (id in gratiam soli natalis hic obiter retulisse liceat) supremo Valdensium Hæreticorum, quos vnà omnes è prealta rupe superiore sæculo deturbarunt, excidio; tumulóque, quàm Lugdunenses eorum origine, clariores ab eodem Victore obtinuerint (quod eorum est in omne Hæreticorum genus odium immortale) ne cui Hæreseos suspicione laboranti intra vallis suæ septa sanè munitissima, vt pote quæ præruptis vndique montibus, faucibúsque angustißimis constant, quas mœnia obstruunt, Druentiáque præterlabitur; sedem figere; domiciliúmque ponere liceret. Debetur ergo etiam secundò generosißimi Prætoris purissimæ erga diuina Religioni, studióque ardentißimo: debetur in patriam pietati: debetur curæ: debetur industriæ: debetur gratiæ, & authoritati, quod Vallis Loysia, nullâ; quòd penè nullâ reliquus Brianşonensis ager Hæreseos contagione inficiatur: quod auitus floreat diuinus cultus: quod debitâ veneratione sacræ colantur aræ: quod à maioribus excitatæ ædes sacræ incolumitate sua gaudeant, suo non careant ornatu; quod celebrentur: quod colantur. Quibus quæ tanto Viro, quæ familiæ tuæ erigantur illustriora monumenta? Non eruderandæ denuò sunt

Chailloiæ

Challoiæ illius apud Queyracenses turris vetustate collabentis ruinæ: vt ex iis alia præter scutum tuum Gentilitium in eis haud ita pridem repertum antiquissimæ Nobilitatis tuæ testimonia eruamus. Nec adeunda est Dola vrbs apud Sequanos celeberrima, vt illic familias tres Chailloiorum clarissimas consulamus: quæ, vt ex ipsis auribus ipse meis accepi, ex eadem tua stirpe originem ducere gloriantur. Nec opus cineres perscrutari, in quos Briançonium ferè totum funestissimo incendio aliquot ante annos euanuit: vt ex iis deletam stemmatum tuorum memoriam restituamus. Illustrissima quidem sunt hæc Prosapiæ tuæ ornamenta: sed Aui tui, quorum memini, præclarè gestis longè videntur obscuriora: nec apud posteros solùm eius hæc egregia facinora famam, laudémque pepererunt immortalem; sed etiam apud Superos tantam gratiam: vt præter æternam, quam, vt par est credere, consecutus est mercedem; ea etiam ei concessa sit: vt Nestoream egerit senectutem, eámque summâ animi, corporísque tranquillitate, & vtriusque integerrimis sensibus ad sex supra octoginta annos produxerit; quorum duobus & quinquaginta postremis summâ cum omnium approbatione & commendatione Prætoris munere perfunctus est. Neque id solùm, vt est diuina Bonitas in remunerando profusa, in eum contulit beneficium; sed alio non minore & Eum, & familiam tuam vniuersam cumulauit: cum ei natum largita est Parentem tuum colendissimum, qui non solùm Magistratus, cæterorúmque fortunæ bonorum, sed virtutum etiam animi, omniúmque, quibus eum imbuerat, Institutionum futurus esset hæres fidelissimus. Nec inanis fuit, vt probauit euentus, quam præ se ferebat, egregiæ indolis species. Quid enim eo deinceps in Prætoris munere æquius? Quid in omnes absque omni conditionis discrimine benignius? Quid moderatius? Quid omnes demerendi studiosius? Qua cura, qua pru-

dentia qua animi magnitudine, quo officiorum genere, totius ditionis suæ quieti per tot annos, quibus vltrò citróque Regiis exercitibus per Alpes commeandum fuit, vir optimus, Patriæque parens carissimus non consuluit? Atque hæc tam eximia virtutum ornamenta, quæ iam ab ipsa eius adolescentia emicabant, cum nobilissimi generis splendore coniuncta non mediocrem apud omnes de eo existimationem cum concitassent: non paucos genere non obscuro cupiditas cepit cum eo affinitatem contrahendi: sortéque sanè faustissima contigit, vt cum nobilissima virtutúmque omnium laude ornatissima fœmina Beatrice de Boqueron Matre tua perquam veneranda, matrimonio iungeretur: qua nunc etiam grauissima Matrona superstite gaudes, diúque gaudeas faxint, vt precor, Superi. Vnde ad Familiæ tuæ splendorem non tantum noua antiquæ Nobilitatis facta est accessio: nec tantùm alia cum primariis supremæ Curiæ Gratianopolitanæ tum Senatoribus, tùm Præsidibus parta est sanguinis communio: Verùm etiam, quod ad nominis vestri commendationem non minoris videtur esse momenti, Tu, tuíque natu posteriores fratres tres eius liberi indolem ad omne virtutum genus accommodatam iam nacti, iis moribus estis ab ea instituti: vt in vos omnium oculos non sine voluptate, & admiratione conuertatis, omnium vobis animos ac beneuolentiam concilietis. Quæ enim animorum consensio vestrâ reperiatur maior? Quæ maior obseruantia? Quæ studiorum, ac rerum omnium absolutior communicatio? Vt mens vna vobis omnibus communis inesse videatur. Quà commendatione quænam tibi tuísque potest illustrior comparari? Atque de his familiæ tuæ ornamentis, quæ nobis licet nostris haurire & oculis & auribus hoc tibi gratulor impensiùs quod te à maiorum tuorum præclarè gestis non tantùm non desciuisse, sed & insignioribus cumulasse testentur. Quibus, etsi modestia

stiæ

ſtiæ tuæ graue futurum non ignorem, locus hic me iubet quædam apponere tibi ſingularia immortali memoriâ digniſſima. Ac primò quidem quodnam poteſt animi fortiſſimi, ſanctioriſque ac conſtantioris amoris ſpecimen edi eo illuſtrius, quod à te exhibitum ſuſpiciunt omnes: cum pari ſanguinis, & virtutis ſplendore clariſsimæ coniugis tuæ Iſabellæ de Verdonnay à Villa-noua Illuſtriſſimi Viennenſis Archipreſulis Petri de Villars neptis conſortio prematura morte priuatus, ne qua aliena ſpecies, eius apud te vel memoriam, vel erga eam minuat obſeruantiam, & dilectionem, adduci nunquam potueris, vel ſuaſionibus, vel precibus, vel ampliſſimis oblatis matrimoniis, vel ipſomet ætatis flore, vel etiam ſobolis omnis carentiâ, vt de ſecundis nuptiis cogitationem aliquam admitteres. Illuſtre ſanè eſt hoc magnanimitatis exemplum. Ecce aliud non obſcurius futurum. Horrendum adhuc ſibilat in ditionis tuæ Praialenſi valle quædam Hæreſeos Hydræ non penitùs effracta ceruix. Ad hanc conterendam ab Herculis Gallici nato, ipſo etiam Monſtrorum Domitore Rege Chriſtianiſsimo Ludouico XIV. ſua tibi eam agitandi peritiſſimo eſt tradita claua, ſimúlque præſtita remedia: quibus tuos illos Accolas veneno afflatos liberare, tueríque poſſis. Non aliud ipſe Monarcha piiſsimus obſequium erga ſe tuum à te expetit gratius. Nullum principibus, ſummiſque rerum adminiſtris facinus futurum eſt acceptius. Hanc tibi vt rei benè gerendæ peritiſſimo, demandatum prouinciam Senatus Gratianopolitanus modo; ſed & Pariſienſis gratulatur, opémque vterque ad tantum opus ſuam pollicetur. Sed hæc omnia incitamenta factis præcurris, maiorúmque tuorum exemplo non veterum tantùm ad diuinum cultum ſpectantium locorum incolumitati ſeruandæ incumbis: ſed (quo nullo apud poſteros perenniori, nullo apud Superos Auguſtiori monumento tui memoriam conſecrare potes) etiam

noua erigenda meditaris; dum & pietate, qua ferues, & authoritate, qua polles; & prudentia, qua aggrederis, & mansuetudine, qua allicis, & omnibus officiis, quibus demereris, totis denique animi, corporísque viribus contendis, vt oues colligas; à quibus coli possint, & celebrari. Atque hisce tuis curis, quibus diuino numini gratius nihil esse potest, eodem fauente numine consequeris, vt & annos maiorum tuorum hîc attingas, & superes: & cum beata immortalitate tandem commutes, vt enixè apprecatur.

Vir clarissime,

Obsequentissimus seruus tuus
VINC. LEOTAVDVS
Societatis IESV.

Ebreduni Cal. Sept.
anno 1659.

AD ÆQVVM BENEVOLVMQVE LECTOREM.

HINC iam querentem te, *Lector Beneuole*, audire mihi videor; & consilium hocce meum Arithmeticas institutiones conscribendi minimè probantem. Quasi verò, inquies, in humanis disciplinis quidpiam reperiatur numerorum tractatione aut tritius, aut sæpiùs ad nauseam decantatum? Nullum in Librariis Apothecis quàm Arithmeticorum opusculorum multitudo molestius impedimentum. Vix priuata domus occurrat vel duobus libellis instructa; quin eorum alter ad numerandi artem pertineat. Vix dum balbutientes puεruli, librorum folia vertendi vix edocti, hisce crepundiis delectantur: nec ante Alphabeticos, quàm Arithmeticos characteres nosse & efferre assuescunt. His ergo plura, quod operæ pretium fuerit congerere? Quidve de nouo (quod in primis ab eo, qui operis quidpiam molitur, attendi par est) non expositum, non millies repetitum adduci possit? Has ego querelas tantùm abest, vt improbem; vt grauiores mentem subeat aggerendi. Nihil sanè verius quàm plura de vnica numerorùm facultate quàm de cæteris omnibus simul affluere opuscula, ac volutari. At nihilo quoque minùs verum ac certum est; non eo nomine, quod multa sint; sed multa cum sint quod neque multa capiant, neque multùm, minoris esse facienda: reuerà enim omnia (pauca excipio à doctioribus profecta) vnum aut iisdem, aut penè iisdem verbis conceptum exemplar meritò dixeris; censuerísque, etsi plurima in speciem de Arithmeticis celebrari videantur, perpauca tamen exhiberi eorum ornamenta, perpauca documenta è suis hausta ac deducta Principiis: ac tum demùm eius minimè improbaueris consilium: qui numerorum ad vsum comparatos canones eâ methodo, qua nobilem disciplinam, & simplici ac nudâ arte superiorem decet, hoc est,

ſcientificâ, & ex certis ac euidentibus fundamentis petitâ tradiderit: qui numeros verſandi rationes non paucas; quas ſolus ſolemnis vſus, & a poſteriori inita frequẽs inductio probauit hactenùs, etiã à priori demõſtrare conatus fuerit. Qui vias aut planè nouas, aut tutiores, aut breuiores, aut faciliores, amœnioreſve, ſiue elegantiores; quibus ad eundem ſcopũ liceat peruenire, aperuerit, impedimentis expurgarit, ac liberarit labẽdi periculis. Qui denique nihil eorum omiſerit; quæ ad huius facultatis nomen, dignitatémque tuendum, augendúmque conferre poſſit. Ac proinde nec tum etiam hanc à me aſſumptam mentem in inuidiam vocaueris. Quamuis enim ea omnia præſtandi agnoſcam me longè imparem: eorum tamen quidpiam me ſpero præſtiturum: vix vllam ſiquidem propoſitionem obſeruaturus es, in qua noui aliquid non liceat annotare: ac quidem præ cæteris rerum ſingularum, quamquam aliâs haud adeò abditarum, certis, ac euidentibus, & vulgò admiſſis Principiis ſtabilitas demonſtrationes. Quas vt exhibeam, quantum fas mihi fuerit, & abſolutas, & elegantiâ, non ſine legentium voluptate, conditas, non ea tantùm placita, quæ vt propria continet diſcreta quantitas, verum etiam ea, quibus vtitur continua, adhibenda cenſui. Nec mea me fefellit opinio. Mirum enim quantùm lucis numericis epilogiſmis accedat è Geometricis figuris & deſignationibus, dum hæ numeros in ſpeciem quandam & figuram, qua ipſi per ſe carent; effingunt, & componunt: quæ non menti tantùm, ſed oculis ipſis obuerſetur, & menti ad concipiendum, & memoriæ ad retinendum, non mediocriter profutura ſit. In omnibus porrò rudioris cuiuſque ac diſcendi cupidi rationem non habui non maximam, id enim apud ſcriptorem quemque ratum fixúmque in primis, ſemper eſſe debere cenſui, vt qui vtilitati omnium publicæ ſcribendo conſulere ſatagit, vt ab omnibus ſicut legi, ita, quantùm res tulerit, conetur intelligi: neque enim, ſi quando pluribus rei cuipiam obſcuriori declarandæ immorandum fuerit, tantum conſequetur incommodum, eruditioribus paucis faſtidij quidpiam creando prolixitate, quàm ru-

dioribus multis sciendi cupidit animos adimendo breuitate, eósque optato laboris in lectionem impensi fructu priuando. Omitto, ex contracta rerum difficilium expositione nunquam tantam doctrinæ famam sibi quemquam comparaturum (quidquid secùs aliqui sentire, videantur) quantam ipsi paritura est obscuriorum tenebras discutiendi facultas. Omitto etiam, ex minùs clara rerum explanatione lectorem in longè aliam ab Authoris mente sententiam abire non rarò: Quod quàm graue dispendium vtriúsque sit, vel ex eo patet, quod neutrius possint deinceps cohærere ratiocinationes: vnde, vt frequens docet experientia, mille de rebus planissimis perperam iactentur disceptationes non sine operæ, temporísque iacturâ; cui paulò fusior consuluisset oratio. Vt non mireris me, cui altiùs hæc incedit sententia, in difficultatibus etiam leuioribus interdum esse prolixiorem. Habes, qua vsurus sum, methodum. Accipe Tractationis totius seriem ac materiam.

Totum hoc Institutionum Arithmeticarum opusculum quatuor partibus; siue libris totidem complector. Ac primo quidem præter numerationem, etiam ope Romanorum characterum, quod sæpe occurrant, initam; quatuor Arithmetices totius elementa, quæ additione, subtractione, multiplicatione, ac diuisione continentur, prosequor pluribus.

In secundo, ea quæ ad fractos numeros, siue, quas vocant minutias, pertinent, expono vniuersa; quæ etsi difficultatis plusculú pati iure vulgò censeantur: ea tamen, fauente cœlesti lumine, ita me spero traditurum, vt quàm cæteros integros numeros, eos vix grauiores sis experturus. Ad quod conducent non mediocriter Diagrámata Geometrica, quibus vbi opus, eosdem designare conabor. Huius porrò libri tres futuræ sunt partes: quarum prima fractos communes numeros in vniuersum complectitur, secunda fractos partium decimarum, siue decadicos exponet. Tertia Astronomicis fractionibus, tam minoribus vsurpari solitis, quàm maioribus vix dum satis cognitis, impenditur. Vbi quandam fractorum numerorum nouam speciem (quos maiores licet appellare) proponam.

Tertio

Tertio verò libro radices quaslibet quovis è numero, methodo tam singulari solis quadratis & cubicis radicibus extrahendis propriâ, quàm vniuersali tum his, tum cæteris omnibus accommodatâ, venandi rationem exponam. Quam sequetur ratio multiplex radices surdas veris tam maiores, quàm minores, ad veras quam proximè libuerit, admouendi: quam omnem Geometricis demonstrationibus non iniucundis stabiliam.

Quarto denique libro numerorũ & rationes & rationum ipsarum rationes, siue analogias, aut proportiones ita prosequar; vt non ad numeros tantùm, & quantitatem discretam, sed ad continuam etiam hæc tractatio tanti, mihi crede, momenti, quàm quæ maximi, conueniat. Ex qua ad calcem deducam canones omnes vsui inseruientes communi, minimè communibus demonstrationibus stabilitos.

Omnium porrò Problematum præcepta, quò gratiora, memoriæque quæ circa numeros facile labi nata est, iuuandæ aptiora forent: metro complexus sum. His omnibus, etsi tantulis, fruere, & ad laudem illius vtere, qui omnia propter semetipsum in numero, pondere, & mensura operatus est D. O. M.

INSTITVTIONVM

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

LIBER PRIMVS.

ARGVMENTVM.

CVM vt continua ita discreta Quantitatis ea facultas, quâ magis, quâ minus suscipiendi capax est, inter cæteras primum locum obtineat: Primas perinde in hisce meis institutionibus obtinere debet eius expositio. Hic itaque primus Liber in id totus impenditur: vt posterioris huius generis, discretæ Quantitatis tum augendæ tum minuendæ prima elementa proponat; methodúmque explicet, firmísque ac euidentibus demonstrationibus stabiliat; qua vtrumque hoc munus præstari, absoluique possit. Ne tamen ex eo, quod de numerorum incremento & diminutione; quæ Additione subtractionéque solâ perficiuntur, hîc agendum asseritur; mentem subeat opinio de iis solum agendum fore. Agetur de multiplicatione quæ Additionis; de diuisione, quæ subtractionis species quædam sunt; & quidem de vtrisque tam copiosè: vt cuilibet factum iri sperem satis. Quod vt pro votis consequar faciliùs: alia quædam, quorum ignoratio, aut tenebras, aut abs re alienas digressiones cum breuitatis dispendio inuehe-

ret præludant oportet. Cuius generis ſunt aliquot tum definitiones numerorum facultates quaſdam & affectiones, explicantes: tum eorum per Characteres (Romanos & vulgares ſolùm, reliquis minus vel aptis, vel neceſſariis omiſſis, exponam) deſignationes. Ad calcem demùm adducam aurei illius canonis tam Geometriæ quàm Arithmeticæ clauis Elementa: quibus inſequentes libri olim carere non poterant. Habes Argumentum. Illud nunc verſare aggrediamur.

PROPOSITIO I.

DEFINITIO.

Vnitas eſt qua vnumquodque eorum quæ ſunt dicitur vnum.

EXPOSITIO.

ITA Vnitatem definit Euclides lib. 7. definit. 1. ita cum Euclide eius interpretes. Quidquid ergo vel exiſtit, vel aptum eſt exiſtere, vnum non aliter denominatur ab vnitate, quam (ſaluâ tamen vniuocorum lege) album ab albedine, à calore calidum &c. Deſcribunt aliqui vnitatem hanc, aſſerentes eam eſſe numerorum omnium principium, & quo conſtant numeri, elementum. Comparant non pauci vnitatem cum puncto continuæ quantitatis. Eſt ſcilicet, inquiunt vnitas non numerus, ſed numeri fons & origo indiuiſibilis: ita in quantitate continua punctum, nec quantitas eſt, nec eſt diuiſibile: eſt tamen quantitatis omnis quodammodo parens; dum enim punctum concipitur fluere; primam quantitatis ſpeciem, lineam ſcilicet generat: à cuius deinde fluxu, ſuperficies: à fluente demum ſuperficie corpus enaſcitur. Hæc vt ita ſint; eſt tamen vnitatis & puncti in ſuo cuiuſque genere ratio longè diuerſa. Neque enim punctum perinde vt vnitas, ſæpius etiam infinities (ex ſaniore loquor philoſophia) repetitum, vel minimam quantitatis particulam conſtituendi aptum eſt; cum ſibi millies, non ſecus ac ſemel additum, punctum nunquam excedat; nec aliquid produeat puncto maius. At longè aliter ſe habet vnitas erga diſcretam quantitatem: quam, vel ſemel repetita, producit; nullúſque poſſit verus numerus exhiberi, cuius pars non ſit vnitas, eáque ſæpius repe-

tita non constituatur. Ecce enim vt apud Euclidem libro citato def. 2. numerus definitur.

Prop. II. *Definit.*

Numerus est vnitatum composita multitudo.

Expositio.

Multitudo ergo vnitatum, siue entia plura, materia sunt apta ad numerum constituendum: eúmque actu constituent: vbi accesserit. Vnio quædam inter illa, siue *compositio* tanquam numeri forma; quam illis mens affingat; nulla alioqui (cum possint esse naturæ diuersissimæ) potituris: vt propter illam mentalem vnionem numerus quilibet ad aliud entis genus, quàm ad ens rationis pertinere non possit. Nec vero plura illa entia, siue plures vnitates numerum constituendi minus aptæ futuræ sunt: quod numeri speciem mens ipsa nec assequi, nec enunciare possit: illa enim vnitatum ad numerum constituendum requisita connexio aptè fingi cogitaríque potest absque cognita numeri specie: neque absurdum fuerit quempiam asserere se, vel syderum, vel arenæ marinæ nnmerum ignorare.

Prop. III. *Definit.*

Numerus par, est, qui in duas partes æquales diuidi potest: qui non potest, vel qui à pari vnitate differt, impar dicitur. *Pares itaque sunt* 4, 6, 10. *&c. impares* 3, 5, 9. *&c.*

Prop. IV. *Definit.*

Numerus pariter par est. Cuius semissis est numerus par, vel, qui est paris alicuius numeri duplus.

Expositio.

Si numerus quispiam in duas æquales partes, quæ & ipsæ sint par numerus, diuidi potest; dicitur pariter par. Vt 20. cuius semissis 10, par est numerus. Quæ definitio à resolutione, siue diuisione petitur: altera vero à compositione: vt si numerus par 10., bis sumatur; compositus 20. non potest non esse pariter par.

Prop

Prop. V. *Definit.*

Pariter impar numerus eſt, cuius ſemiſſis eſt impar: vel, qui numeri imparis duplus eſt. *Vt, 14. Cuius ſemiſſis 7. eſt impar, vel, qui duplus eſt imparis numeri. 7.*

Prop. VI. *Definit.*

Numerus pariter par tantùm eſt, qui à ſolis paribus numeris diuidi adæquatè poteſt.

Expoſitio.

Hæc eſt ſpecies pariter paris numeri. Exigit enim vt non tantum ſemiſſis par ſit numerus. Sed huius etiam ſemiſſis pars dimidia, par eſſe debet & denique alia quæcunque pars; per quam adæquatè diuidi poteſt par ſit ſemper numerus. Tales tantum eſſe demonſtrat Eucl. lib. 9. prop. 32. omnes & ſolos, qui à binario ſunt dupli; vt 4, 8, 16 &c.ab hac autem ſerie excluditur ipſe binarius; eò quod ſemiſſis eius, qui eſt vnitas, par non ſit numerus.

Prop. VII. *Definit.*

Pariter par, & pariter impar eſt: qui ſemiſſem quidem parem numerum nanciſcitur; ſed ipſe ſemiſſis imparem habet dimidiam ſui partem, *Vt 20, cuius ſemiſſis 10 eſt par numerus: ſed ſemiſis 5 huius numeri 10, impar eſt. Tales autem demonſtrat Eucl. lib. 9. Prop. 34. omnes qui nec ſunt à binario dupli, nec dimidium habent imparem.*

Prop. VIII. *Definit.*

Pars eſt numerus numeri, minor maioris: cum minor metitur maiorem. Partes autem, cum non metitur.

Expoſitio.

Ita Euclides lib. 7. def. 3. & 4. numeros definit; qui cum altero numero maiore conferuntur. Duplici ergo ratione ſe habere inter ſe poſſunt, vel enim minor numerus aliquoties repetitus maiorem præcisè, & adæquatè metitur; ita vt nec eum ſuperet, nec ab eo deficiat: & huius generis numerus, Pars maioris dicitur. Quod ſi numerus minor repetitus à maioris quantitate deficiat; ita vt ſi ſemel adhuc repetatur; eandem excedat: non iam pars, minor ille numerus dicendus eſt maioris; ſed Partes; eò quod in duas partes primùm diuidi debeat, vt maiorem numerum præcisè

metiri, & exhaurire dici queat. Vtrumque allato exemplo declaro. Numerus 4. minor, & 12 maior, inter se conferuntur. Ille, istius Pars ex hac definitione rectè asseritur: si enim numerus 4 ter repetatur; maiorem 12 præcisè metitur, & exhaurit. At si idem numerus 4 ad 13 metiendum assumatur: nequaquam vtlibet repetitus numerum 13 adæquabit. Si enim ter tantùm repetatur, minorem producturus est numerum numero 13. producet scilicet 12: qui deficit vnitate à 13. At si quater repetatur; ex ea repetitione nascetur 16 excedens numerum 13, tribus vnitatibus. Vt ergo numerus 4 numerum 13 metiri adæquatè possit: eum in duas partes diuidi necesse est, nimirum in 1. & 3. Tunc igitur si 4. ter repetatur vt fiat 12: numeroque 12 addatur quaternarij altera illa pars 1: tūc numerus 4 numerū 13 adæquatè metiri dicetur per se quidem ter repetitus, & per sui partem illam 1. Similiter idem numerus 4 metietur numerum maiorem 14: si 4 in duas partes 2 & 2 secetur, earumque altera ad 4 ter repetitum, hoc est ad 12 additur; sic enim numerum maiorem 14 adæquatè metietur, & exhauriet.

Porrò pars illa minoris numeri ad ipsum addenda, vt numerum maiorem præcisè metiatur, ab ipso minore numero nomen accipiet: vt in allatis Exemplis: quia vt 4 metiretur numerum 13, diuidendus fuit in duas partes 1 & 3; earúmque alteram 1 sibi ter repetito adsciuit: adscita illa pars 1. denominabitur à numero ipso metiente 4. dicetúrque vna Quarta: non secùs, vt idem numerus 4 metiatur 14. id præstabit assumptâ sui parte 2: quæ dicetur, duæ Quartæ, ab ipso metiente 4, qui diuisus est, denominata. Nec aliter, si idem numerus 4 numerum 15. metiri deberet; sui partem 3 facta eiusdem 4 diuisione in 1 & 3 assumeret: quæ denominaretur tres Quartæ ab illo ipso numero 4. Sed de his longè plura libro secundo: Vbi de numeris fractis agendum erit accuratius. Habes hìc interim quid pars, & quid partes vocetur numeri alicuius: cur ita vocetur: vnde item denominetur quidquid ad metientem numerum addi necesse est: vt mensura adæquata constituatur. Nec prætereundum hìc, quam vocamus partem absolutè, à non paucis partem dici aliquotam: aliquantam vero quam Partes, cum Euclide nuncupamus.

Prop. IX. *Definit.*

Multiplex absolutè, est numerus maior minorem aliquoties præcisè continens. Multiplex vero abundans est numerus maior minorem aliquoties continens, eiusque præterea aliquam partem.

Expositio.

Hæc præcedentis inuersa est definitio, vt patet; eique possunt eadem exempla

exempla inseruire. Sicut enim numerus 4 est pars numeri 12. iuxta illam definitionem: ita iuxta hanc, 12 est multiplex numeri 4 absolutè. Rursus sicut idem numerus 4. dicitur partes numeri 13: ita numerus 13 reciprocè dici debet numeri 4. multiplex, non simpliciter & absolutè; sed abundans; eo quod præter numerum 4 ter repetitum, contineat partem quandam numeri 4, vnitatem scilicet, quæ quarta pars est numeri 4 ab ipso denominata, vt paulo ante explicatum est.

Hic tantum obseruandum venit varias species numeri tùm absolutè multiplicis, tum multiplicis abundantis: quas omnes constituit varia repetitio numeri minoris in maiore contenti. Numerus enim maior dicetur triplex minoris: si in eo ter præcisè contineatur; vt 12 dici debet triplex, vel triplus numeri 4: & vicissim 4 dicitur sub triplus vel tertia pars numeri 12; sumpto tam multiplicis 12, quàm sub multiplicis, siue partis 4 nomine à terna illa repetitione numeri minoris 4, vt maiorem 12 adæquet: vel quia maior 12, minorem 4 ter continet. Eodem modo numerus 13, triplex erit abundans numeri 4. qui reciprocè dicetur sub triplus deficiens numeri 13. siue pars tertia deficiens eiusdem. Idem esto de reliquis generis vtriusque multiplicis speciebus iudicium.

Corollarium.

Hinc sequitur vt vnitas numeri cuiusvis pars sit, ab ipso numero denominata? Nam vnitas toties repetita, quoties ipse numerus indicat; numerum ipsum præcisè metitur, & adæquat. Vt, vnitas dici debet pars Quarta numeri 4, vel sub-quadrupla eiusdem, nomine ab ipso 4, desumpto; eo quod 1 quater repetita numerum 4 præcisè metiatur, vel adæquet. Contrà verò numerus 4 asseretur Quadruplus, vel quadruplex vnitatis; eò quod ipsam quater præcisè contineat: eademque est de cæteris omnibus numeris ratio.

Prop. X. *Definit.*

Numerus primus est quem sola vnitas metiri potest. Numerus autem quem alius quispiam præter vnitatem metitur, compositus dicitur.

Expositio.

Numeri itaque 2, 3, 5, 7, & alij maiores infiniti (dantur enim numeri primi plures omni proposita multitudine primorum numerorum iuxta Euclidem lib. 9 Prop. 20) sunt primi numeri: quia sola vnitas repetita, & quidem toties ex Coroll. præcedente quoties ipse numerus indicat, numeros illos metitur. Compositi autem numeri sunt 4, 6, 12 30 &c. dantur enim minores numeri (qui pars, iuxta Prop. 8. propriè vocantur) qui ipsos

ipsos metiantur aliquoties repetiti. Vnde etiam nascitur hæc eorum denominatio, dum compositi vocantur. Licet enim numerus 12, verbi gratia, ex duobus numeris minoribus 7 & 5; vel etiam ex tribus 3, 4, 5, vel aliis eiusmodi simul additis generetur, eóque nomine ex illis compositus rectè dici posse videatur. Alius tamen est apud authores, Euclidem præsertim, huius vocis sensus: non enim quarumlibet partium collectionem ad vnum aliquem numerum generandum, compositionem vocant. Sed partium æqualium, vel partis vnius sæpius repetitæ, quæ numerum ex ipsa eius repetitione genitum, vt pars propriè dicta, metiatur. Quæ compositionis ratio, multiplicationem semper importat duorum numerorum: dum scilicet alter repetitur; alter designat multitudinem repetitionum. Additionem autem simpliciter sumptam excludit: posset alioqui numerus primus eo modo compositus dici; potest enim ex variis partibus inæqualibus simul additis, non secùs ac non primus, conflari. Hoc eodem sensu numerus primus (quando composito numero opponitur) eo nomine donatur: idem enim est ac simplex & incompositus, ac sui ipsius radix & principium à nullo alio priore numero dependens, à quo producatur: atque adeò in genere primus sit.

Prop. II. *Definit.*

Primi inter se numeri sunt: quos sola vnitas communis mensura metitur. Compositi autem, quos præter vnitatem alius numerus, vt mensura communis, metitur.

Expositio.

Si duo vel plures numeri proponantur eius naturæ, vt nulla eis competat mensura communis; nullus scilicet numerus dari possit, qui quauis sui repetitione eos præcisè metiatur; primi inter se erunt omnes illi numeri, siue duo, siue plures extiterint: Esto sint alioqui ipsi singuli, compositi sua singulari mensura potientes. Vt 18 & 25, primi inter se sunt: quamuis vterque in se, & sigillatim sumptus, sit compositus. Primi item inter se erunt 19 & 24. quorum ille primus est; hic compositus. Certum illud quidem, numeros quotcunque, quorum singuli in se primi sunt, primos semper fore inter se. Patet Nam illos metiretur aliquis præter vnitatem numerus, si quis eos metiretur numerus communis. Possunt tamen duo vel plures eandem mensuram communem sortiri: quorum vnus, nec vno plures sit numerus primus. Cum scilicet numeri alicuius primi, diuersæ speciei multiplices vna cum ipso numero primo inter se conferuntur vt 5, 10, 15, compositi sunt, quamuis eorum vnus 5 sit primus numerus. Ipse enim 5 seipsum primo metitur; tum metitur reliquos 10 & 15 tanquam pars, multiplices suos: Nec vllus alius his poterit annumerari, ita vt sin-

ſint ſimul cum numero 5 compoſiti : qui eiuſdem 5 non ſit aliquis multiplex. Omnis enim primus numerus ad numerum, quem non metitur (qui ſcilicet non ſit eius multiplex) primus eſt, inquit Eucl. lib. 7. Prop. 31.

Prop. XII. *Poſtulatum.*

Liceat numerum quencumque ſignis, aut notis, ſiue characteribus exprimere.

Expoſitio.

Cur enim nunc minimè liceat; quod cibi licere ſemper cenſuêre, & vt licitum nullæ non aſſumpsêre nationes. Nulla enim aliquando extitit adeò rudis & barbara: quin aliqua numerandi, putandique facultate, inſigni præ cæteris humana mentis ratione præditæ argumento non polluerit: ſimulque compendia excogitarit; quibus poſſet breuius & iucundius exerceri: quorum aptiſſimum fuit, verborum orationiſque prolixioris loco characteres ſubſtituere, ſiue ſpecies. Hæ ſiquidem numerum vnitatum copioſiſſima multitudine conſtantem, nec niſi longo verborum circuitu enunciandum, oculis ſubiiciunt; non ſecus ac Tabellæ Hiſtoriam cernendam vnico intuitu proponunt: quam fuſiſſima verbis inita deſcriptio vix tandem explicet; & concipiendam, vt par eſt, exhibeat; nec niſi linguæ illius qua profertur, peritis exponat. Accedit verbis vix poſſe tam varias ad Epilogiſmum colligendum neceſſarias numerorum operationes abſolui: dum alij in vnicum cogendi occurrunt numeri; alij ab aliis ſubducendi, alij multiplicandi, diuidendi alij, in alios terminos conuertendi, ſeponendi, reponendi; in omnem denique partem verſandi: quæ omnia adhibitis characteribus facilè, vt vſus docet, perficiuntur: errandique, vt in tractandis numeris eſt maximè procliue) periculum declinatur.

Variæ itaque nationes varios characteres ſibi delegêre, quibus numeros deſignarent. Plures, non alios aſſumpsêre, quàm quibus, vel ſcribunt, vel legunt; aliqui characterum loco, calculis alio & alio ſitu, & ordine inter ſe compoſitis vtuntur: qui numerandi modus apud Barbaros illos Indiæ occidentalis populos viget: vt eo poſſint multorum ſæculorum ſeriem deſignare, ſuorúmque Regulorum tempora, rerúmque annis ſingulis geſtarum memoriam poſteritati commendare.

Duo præ cæteris inſignes Characteribus numeros deſignandi modi obſeruantur. Prior fuit Romanis familiaris; vt monumenta eorum quam plurima teſtantur: vnde etiam illi eorum characteres, & Romani & Latini vocitantur. Poſterior Arabibus illis antiquis, qui vt cæteras ita præ cæteris Mathematicas diſciplinas excoluêre, acceptus fertur. Qui & propter Characterum paucitatem, & propter eoſdem tractandi facilitatem non ſi-

ne magno totius huius artis emolumento nuſquam Gentium non eſt admiſſus. Quo de genere, quo ſolo deinceps vſurus ſum, plura inferius diſſerenda recurrent: nunc interim de priore; cuius cognitio non rarò neceſſaria eſt pauca attingenda. Sit itaque.

Prop. XIII. *Problema.*

Arithmetici Romanorum characteres exponendi ſint: & ex eorum forma numeri quilibet deſignandi, vel, deſignati, verbis efferendi.

Expoſitio.

Tres ſunt Problematis huius partes explicandæ: quibus tota ferè conſtat huius numerandi rationis cognitio Præ cæteris enim ipſa characterum forma ſignificandíque vis percipi debet. Qui enim legas, qui ſcribas ignoto tibi characterum, ſignorúmve ſenſu? Deinde eorum inter ſe compoſitio ad numerum quemlibet exprimendum prænoſcenda eſt: ac tandem contra. Expreſſi characteribus numeri ſenſus, verbis efferendus.

Ad primum caput quod attinet. Pauca admodùm ſunt prima & ſimplicia Latinæ huius numerandi rationis elementa: ex quorum deinde varia compoſitione profecti ſunt characteres reliqui Vix enim plura, quam quæ hoc Schemate habentur, reperire eſt, vt ſtatim manifeſtum fiet. Quinario ergo numero continentur iiſque deſignantur numeri quinque, vulgari charactere expreſſi ſingulis ſubſcripti.

I	V	X	L	C
1	5	10	50	100

Quanquam & ipſa etiam vix vt ſimplicia à nonnullis admittantur. Volunt enim elementum hoc X, quo denarius vnitatum numerus exprimitur, componi ex elemento V. contra-poſito: vt ſcilicet deſignetur numerus denarius, duplus Quinarij huius duplicato charactere V, vt fiat X. Similiter proximè ſequens character L ad numerum Quinquaginta vnitatum exprimendum, inſtitutum, non nouam cenſent figuram, ab eadem figura V Quinarium deſignante diuerſam; ſed eandem ex obliquo ſitu characteris V, in rectum Literæ L mutato genitam. Ex quo colligunt continuò characterem C, numero centum vnitatum exprimendo deſtinatum, naſci ex proximè antecedente L, dum eius lateri perpendiculari ſummo apponitur lineola, lineæ inferiori parallela, vt fiat huiuſmodi figura Ⲉ: quæ propter ſimilitudinem, quæ inter Ⲉ & C intercedere obſeruatur, in eam tandem tranſierit. Verùm, vt hæc ita habeant: quæ cum ex inſtituto profecta ſint, certi aliquid vix licet affirmare; illud, quod hac in re momenti maioris duci debet, omnino certum eſt; reliquos omnes deinceps characteres numerorum centenario maiorum

ex

ex ipſo centenarij charactere c alterna quadam viciſſitudine poſitionis, de qua ſtatim eſſe deductos. En aliquot vnà cum eorum valore vulgaribus Atithmeticis ſubſcriptis notis expreſſo, quos in infini-

c	ıɔ	cıɔ	ıɔɔ	ccıɔɔ	ıɔɔɔ	cccıɔɔɔ
100	500	1000	5000	10000	50000	100000

tum promouere licebit per continuam characteris c, vel directi, vel conuerſi appoſitionem ad proximè præcedentem iuxta Canones, & mox tradenda Præcepta. Hic tantum obſerua characterum illam mutationem ita iniri: vt inter terminos progreſſionis à centenario inchoatæ, & per rationem decuplam propagatæ: quales ſunt 100, 1000, 10000. &c. alius quidam terminus immittatur: qui proximè minoris quintuplus quidem ſit, at ipſius proximè maior ſit duplus. Ecce enim, vt inter terminos 100 & 1000 interiectus ſtatuatur terminus 500, prioris Quintuplus: cuius ſit duplus poſterior. Obſerua ſecundò medij illius termini characterem alium nunquam eſſe, quàm maioris proximè ſequentis partem poſteriorem notis ɔ conuerſis conſtantem. Ita character ıɔ pars eſt poſterior characteris cıɔ proximè maioris. Ita ıɔɔ, characteris ccıɔɔ. & ıɔɔɔ characteris cccıɔɔɔ; & ſic de cæteris. Obſerues denique characteres tam terminorum Geometricæ progreſſionis per decuplam rationem continuatæ; quam interiectorum terminorum, (qui etiam ipſi inter ſe progreſſionem in decupla ratione conſtituunt) ita ad inuicem ſe habere: vt ſequens immediatè maior notam c ſiue conuerſam, vt in poſteriore progreſſione, ſiue directam ſimul & conuerſam, vt in priore, præ charactere antecedente ſuæ progreſſionis ſibi adſciſcat. Sic enim deſignatos habes characteres terminorum prioris progreſſionis c, cıɔ, ccıɔɔ &c. ſic poſterioris ıɔ, ıɔɔ, &c. Qua verò ratione dato cuiuis numero debitus character efformandus ſit quà, dati characteris numerus, vel ipſis verbis, vel vulgaribus notis exprimatur. Ipſæ ſunt duæ poſteriores Propoſitionis partes tractandæ: quas aggredior. Quod vt quam clariſſimè proſequar.

Obſerua in primis characteres omnes huius generis ab ipſo primo vnitatis charactere, ordine perpetuo ita componi & digeri: vt formæ diuerſæ characteres iis ſolis, & omnibus numeris aſſignentur: qui ab vnitate iuxta Quintuplam primùm, tùm duplam rationem, ita alterantim ſemper obſeruatam creſcunt: ſiue deinde caracteres ipſi noni omnino ſint, vt ab vnitate vſque ad centenarium contingit: ſiue poſteriores ex prioribus componantur, vt poſt centenarium in infinitum conſequentes, vt ſuperius duplex allata ſeries declarat: quam in vnum connexam hic appono, cum ipſis quos repreſentant adſcriptis numeris.

I	V	X	L	C	IↃ	CIↃ	IↃↃ	CCIↃↃ
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000

Si ergo character quiſpiam ſimplex, & vnicus proponatur: cuius Valor verbis, aut vulgaribus notis Arithmeticis exprimi debeat: pro certo primum habeto numerum, huiuſmodi charactere ſimplici ſignificatum, vnum aliquem fore ex illa ſerie per Quintuplos & duplos numeros alternatim poſitos extenſa. Et ſi quidem character ille, vnus aliquis fuerit ex quinque primis ad numeros ab vnitate vſque ad centenarium exprimendos deſignatis, vt vel V, vel X &c. Quis tam rudis, qui numerum huiuſmodi charactere expreſſum ignoret? At verò ſi vltra centenarij characterem, vtpote ex multiplici centenarij charactere C cōpoſitus fuerit, vt CCCIↃↃↃ vel IↃↃↃↃ. noueris quidem, vt paulò ante monui, eo charactere vnum aliquem numerum exprimi, ordinis ſuperiùs allati, in infinitum extenſi: noueris item ex characteris compoſitione, an ad Progreſſionem pertineat decuplæ rationis, ſi nimirum directis conſtet notis C, ſimul & conuerſis an certè ad numeros interiectos ſolis conuerſis notis Ↄ deſignari ſolitos. Reſtat tamen ipſa numeri ſpecies, huiuſmodi charactere deſignata, cognoſcenda. Quam vt aſſequaris, hac vtere certiſſimâ regulâ.

Si propoſitus character directis ſimul, & conuerſis notis C conſtat, vt CCCIↃↃↃ; tot figuris O, quot notis C aut directis, aut conuerſis (æqualis enim ſemper eſt vtrarúmque multitudo) conſtiterit, duabúſque inſuper præfige vnitatem: factus numerus is eſt; quem propoſitus character deſignat. Vt quia in proximo charactere CCCIↃↃↃ, tres ſunt notæ C directè poſitæ: tres figuras O, & inſuper duas hoc eſt, quinque delineabis: quibus præfiges vnitatem hoc modo 100000. Atque hic eſt numerus quem poſitus ille character D repreſentat: ſic character CIↃ; qui vnicâ notâ C, vel directâ vel conuerſa conſtat: ex eo numerus charactere illo deſignatus: erit 1000; ex præfixa vnitate & tribus figuris O collectus; quarum vna habetur ex nota C vnica characteris; cui duo O addi debent, vt fiat quæſitus numerus 1000.

At ſi character conuerſis tantum notis Ↄ conſtiterit. Præfixæ figuræ 5, tot vnáque ampliùs, figuræ O adſcribantur. Hic enim numerus, is erit qui quæritur. Vis ſcire, verbi gratia, quis numerus hoc charactere IↃↃↃ deſignetur? quia igitur tribus notis Ↄ conuerſis conſtat; tribus figuris O & vnâ amplius, hoc eſt, quatuor præfigenda eſt nota vulgaris 5, vt fiat numerus 50000: qui quæritur.

Vtriuſque huius regulæ ratio clara eſt, ex tradita horum characterum compoſitione. Cum enim in Progreſſione numerorum decuplam rationem ſeruantium primus poſt centenarium terminus ſit 1000: eiuſque character

CIↃ

c ı ɔ vnicâ notâ c (directam tantùm, aut tantum conuersam intelligere) constet: quæ vnicam figuram O iuxta traditam regulam numero tribuit, quem huiusmodi character c ı ɔ significat: eidem prętere a figuræ O alia duplex adiũgenda est: vt fiat totus numerus 1000 significatus dicto charactere c ı ɔ. Quia verò vt reliqui deinceps Termini maiores eiusdem progressionis per decuplam rationem vnicâ figurâ O semper crescunt: Ita etiam characteres eisdem terminis exprimendis designati vnicâ notâ C semper crescunt: Ideo duplex illa figura O semper addenda erit ad multitudinem figurarum O; quam multitudo notarum C, cuiuslibet characteris indicat. Atque ita superiùs inuentus est numerus 100000: qui respondeat characteri c c c ı ɔ ɔ ɔ additis duabus figuris O ad tres illas, quas tres characteris notæ c c c vel ɔ ɔ ɔ denotant ad significatum numerum pertinere.

Eadem fere est ratio regulæ posterioris ad terminos intermedios, eorúmque characteres pertinentis. Quia enim primus eius generis terminus 500 duabus figuris O constat; eius vero character ı ɔ vnicâ tantùm notâ. ɔ. ideo ad obtinendum numerum significatum 500 ad figuram vnicam O, quam nota ɔ vnica indicat; alia addenda est, notáque arithmetica 5 præfigenda, vt fiat 500 numerus illo charactere designatus. Cum ergo deinceps tam multitudo figurarum O numerorum illorum intermediorum; quam multitudo notarum ɔ characterum numeros illos significãtium, vnitate semper crescat: multitudo figurarum O, quibus numerus quilibet intermedius constabit semper superabit vnitate multitudinem notarum ɔ, quibus constat character cuilibet numero respondens. Rectè igitur regula illa præcipit vt ad figuras O, quas notæ ɔ characterum denotant, addatur vnica figura O, tum præfigatur omnibus illis figuris O nota arithmetica 5: vt habeatur numerus quolibet charactere oblato designatus.

Ex hac simplicium characterum, eisque respondentium numerorum declaratione eruetur facilè compositorum characterum expositio; & qui eis designantur, numerorum inuestigatio. Scito itaque characteres compositos, non nisi ex simplicibus repetitis constitui. Scito rursus eum ordinem ea in compositione seruari; vt maiores characteres, maiorisque valoris, minoribus (excipitur quidam casus mox aperiendus) semper præponi. Noueris denique in hac characterum compositione nunquam bis repeti characterem vllum ex intermediis illis inter terminos progressionis, decuplæ rationis positos: quibus scilicet significatur numerus quintuplus simplicis termini proximè minoris, vt præfixa 5 indicat; quales sunt characteres ı ɔ, ı ɔ ɔ ı ɔ ɔ ɔ, &c. exprimentes numeros 500, 5000, 50000 vt ex tradita regula manifestum est. Ratio autem cur caracteres huiusmodi bis repeti nequeant, clara est. Quia cum proximè maior character simplex semper exprimat numerum duplum numeri per caracteres illos intermedios expressi: si bis ponerentur, non alium repræsentarent numerum, quam qui

repræsentatur à simplici charactere proximè maiori, quem assumere præstat. Porro characteres reliqui omnes repeti possunt; & componi simul; Ita vt bis, ter, rarò quater (ob rationem afferendam) nunquam quinquies. Ratio est, quia à quouis charactere simplici, Verbi gratia, C qui repeti potest; vsque ad characterem simplicem intermedium IↃ quatuor tantùm reperiuntur numeri æquales numero per characterem priorem C desinato. In hoc ergo casu, quater ad summum character C repeti deberet. Hoc modo CCCC, vt quadringenta siue 400, exprimerentur: nam 500 hoc charactere simplici IↃ designantur, à charactere verò intermedio vsque ad characterem proximè maiorem, vt à charactere IↃ vsque ad CIↃ quatuor etiam sunt numeri æquales numero 100 per eundem primum characterem C designato: quo fit vt hoc etiam in casu idem primus character C quater repeti ad summum possit hoc scilicet modo IↃCCCC, vt scilicet nongenta, siue 900 significentur. Verum, vt paulò ante memini, rarò quater repetitus inuenitur idem character. Sed cum quater repetendus foret, semel per compendium ponitur cum proximè sequente maiori charactere. Atque hic est casus, in quo minor quidem character, vt supra monui, maiori præponitur, longè tamen diuersus est sensus. Nam tunc tandumdem maioris characteris, cui præfigitur, valorem minuit, quantus est ipsius valor; vt, compositus huiusmodi character XL significat quadraginta, siue 40. Character sequidem X denarium significans, denarium illum suum demit à quinquagenario per characterem simplicem L designato, ita vt compendioso hoc charactere XL, loco istius XXXX vti mos ferat; ea tamen conditione, vt nunquam, nisi vnus character minor maiori præponatur vt tantò minor euadat eius valor. His prænotatis haud ægrè verbis efferetur aut vulgaribus notis exprimetur numerus latinis characteribus designatus quouis modo compositis. Ecce enim proponatur huiusmodi character compositus

| CIↃ CIↃ IↃ CC L V III. |

Quæris numerum, vel, Verbis, vel notis communibus arithmeticis expressum, qui ei respondet. Dicto citius quæstioni satisfiet: si singulis simplicibus characteribus numerum respondentem exhibeas, quem repetas; si character ipse repetatur. Dic igitur hoc characterismo designari mille bis: septingenta, quinquaginta octo, siue notis vulgaribus 1758. Nam character primus & maximus CIↃ bis ponitur, ideoque bis eius numerus mille, est exprimendus, secundo loco habetur character IↃ, qui cum sequentibus CC coniungendus est, vt pote ad centenarios vtroque pertinente. Iunge igitur quingenta charactere IↃ significata ad centum, bis, vt exigit character C bis positus; vt fiant septingenta. Sequens character L, quinquaginta denotat. Denique V cum III hoc est, quinque cum vnitate ter repetita, siue cum ternario, efficit octo, vltimam numeri partem

tem

tem. Ex vnico hoc exemplo ſatis clarè colligatur: quomodo numerus quouis charaĉtere compoſito expreſſus, enunciari verbis debeat: aut vulgari charaĉterum arithmeticorum genere deſignari quod negotium totum clariùs adhuc percipietur ex declaratione partis tertiæ problematis, huic oppoſitæ.

Itaque ſit iam propoſitus numerus, vel verbis, vel notis vulgaribus arithmeticis expreſſus: qui charaĉteribus latinis deſignari debeat. Sit verbi gratia numerus A 9645 nouies mille, ſexcenta, quadraginta quinque permutandus in latinos charaĉteres. In primis ſecundus eſt numerus A in partes ſingulis eius notis ſignificatas: cuiuſmodi ſunt numeri B, C, D, E. Hancenim numeri diſſolutionem exigit romanus notandi modus, qui ſingulis ſimplicibus numeris reſpondentes charaĉteres adhibere ſolet.

A 9645.

B 9000 C. 600 D 40 E 5
Iɔɔ cIɔ cIɔ cIɔ cIɔ. Iɔ c, XL, V
vel
9000 600 45
cIɔ ccIɔɔ. Iɔc VL.

Hac ſtatuta numeri diſſolutione, primæ eius parti B, maximi præ ſequentibus valoris, charaĉteres aſſignabis huiuſmodi, quos refert Schema; nimirum primo loco charaĉterem Iɔɔ, qui (vt ex diĉtis patet) exprimat 5000, quinquies mille, tum ei apponetur charaĉter cIɔ millenarij, quater repetitus, vt ſcilicet cum priore numero quinquies mille charaĉtere Iɔɔ expreſſo; fiat numerus 9000, nouies mille. Hoc membro primo B ita expedito Secundum C 600, eodem modo charaĉtere debito donabitur, habes ex ſuperioribus charaĉterem Iɔ deſignare centum, quinquies: huic ergo appone ſemel charaĉterem c, quo centum exprimitur, habebis charaĉterem compoſitum Iɔc centum, ſexies, ſiue ſexcenta ſignificans. Tertium verò membrum D 40, notabitur, ſi charaĉteri L, quo 50 exprimuntur, præponatur X. qui ſui valorem; ideſt, 10. auferat à charaĉtere L, vt reliqua fiant 40. vltimum denique membrum E 5 ſuo inſignietur charaĉtere V. His abſolutis compoſueris latinos charaĉteres datum numerum A 9645 exprimentes. Verùm eoſdem, vel eorum membra quædam paulò aliter deſignare licebit vt idem ſchema refert: nam ſi charaĉteri ccIɔɔ, quo decies mille ſignificatur, præponatur charaĉter cIɔ millenarium deſignans, ſui valorem hoc eſt, mille à numero 10000 decies mille ſubducet; quo ſubduĉto numerus propoſitus 9000 nouies mille, reliquus fiet hoc charaĉtere cIɔ ccIɔɔ deſignatus. Eodem modo, duo ſimul membra vltima D 40 & E 5 quæ hoc charaĉtere XL V expreſſa habentur: breuiùs exprimi poſſunt: ſi charaĉteri L numeri 50 præponatur charaĉter V, vt fiat VL; hic enim valorem maioris

maioris L minuet quinario: quo dempto à 50 remanebit numerus 45 charactere illo VL designatus: totúsque numerus A 9645 hoc demum modo CIƆ CCIƆƆ. IƆC VL repræsentabitur. Atque ex hoc vno paradigmate colligi posse videtur ars tota numerorum quemcunque datum characteribus Romanis exprimendi. Quædam tamen omittendæ non sunt obseruationes ad hanc rem pertinentes.

Primò itaque obserua characteres aliquos non semper eodem modo efformari, vt character IƆ, quingenta significans, in hunc alterum, D, transiisse passim videtur, ob figuræ, opinor, similitudinem; ob quam etiam character CIƆ millenarij, in alphabeticum elementum M mutatus est. Cuius etiam aliæ formæ reperiuntur. Quales Π Π. ∞. ↀ. ω.

Secundo obserua, si cuilibet characteri lineola transuersa superponatur, eius valorem mille cuplo maiorem fieri $\overline{\text{I}}$ significat mille $\overline{\text{II}}$ bis mille $\overline{\text{V}}$ quinquies mille $\overline{\text{C}}$ Centies mille $\overline{\text{CIƆ}}$ millies mille & ita de cæteris characteribus ita notatis. Sunt etiam qui alterum alteri characterem superponant: vt ope superpositi, cuiusdam quasi numeratoris, declaretur quoties inferior sumendus sit. Ita his characteribus appositis in schemate designantur numeri vulgaribus notis expressi; quæ designandi ratio rarò, nec immerito, vsurpatur nec sine errandi periculo.

II		XII		L		CIƆ	
C	200.	CIƆ	1200,	CIƆ,	50000	CIƆ	1000 000 &c.

Atque hæc est numerum quencunque romanis characteribus designandi ratio: hæc, numerum hoc modo designatum, verbis explicandi: hæc verbis propositum, debitis characteribus exprimendi. Quæ erant tria huiusmodi characterum officia hoc Problemate declaranda. Quo vnico eorum cognitio, quando occurrent, satis ampla obtineri queat. Eorum porro vsus tum in addendo tum subducendo, multiplicando, diuidendo, quia impeditissimus est. In numeris præsertim maioribus, hic minimè tradendus visus est. Vt tantò cumulatiùs vulgarium characterum facultas amplissima iuxta ac expeditissima explicetur Esto itaque.

Prop. XIV. *hypothesis.*

Communia elementa Arithmetica sunt Decem.

Expositio.

Mirum sanè, humanæque mentis dignissimum inuentum: numerum quemlibet: quantus quantus extiterit; characteribus tam paucis designa-

ri posse. Eorum hæc est forma, & habitus nemini, & nomine, & significatione non notus 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Priores nouem ad numerum quendam vnitatum significandum singuli sunt instituti; & quidem ita vt à primo charactere 1 vnitatem designante, reliquorum valor vnitate deinceps augeatur. Vnde & significantes, si secundum se spectentur singuli, dici solent: & propter illud continuum & æquale posteriorum supra antecedentes, vnitatis incrementum, & progressionem quandam inter eos ordinatam componens; vocantur communis numericæ progressionis termini siue numeri. Vltimus verò siue decimus character O; nullam quantitatem discretam per se designat: vnde & nihili nota dici consueuit, siue Barbarè, Zero: qua Barbara voce, modo etiam Barbaro, nulla eius vel casus, vel numeri habita ratione vtendum erit. Licet autem per se inepta sit hæc figura ad quampiam vnitatum multitudinem significandam: aptissima tamen est, vt reliquis annexa earum pretium immutet, & augeat, non secùs ac reliquæ figuræ significantes, dum aliæ aliis adscribuntur. Vt ecce expono.

Prop. XV. *hypothesis*

Cuiusvis arithmeticæ notæ valor, siue significatio pendi debet ex loco, gradúve: quem inter cæteras figuras numericas occupat.

Expositio.

Longè alia est horum communium characterum numeros designandi ratio ab ea, quæ characteribus latinis conuenit. In his siquidem, vt supra explicatum est, valor semper æstimatur iuxta ipsam simplicē & immutatam cuiuis notæ à prima institutione inditam significationem. Vis exempli gratia, hunc numerum tercenta viginti quinque notis latinis exprimere. Id absolues ex tradita superiùs methodo: si singulis membris suos characteres attribuas toties repetitos, quoties exigit ipse numerus atque ita designabitur hic allatus numerus c c c x x v ter repetito charactere c bis autem charactere x; vt ille, centum, ter; hic bis decem, siue viginti significare possit. At verò vt eundem numerum notis vulgaribus exprimas, haud quaquā repetitione opus est vilius characteris. Idem enim character 3. qui tres tantùm vnitates perse, & ex prima institutione significat: ter centum, ter mille, ter decem &c. aptus est absque repetitione designare. Quod quomodo habeat, nunc accipe.

Duo sunt in quolibet huius generis charactere attendenda. Primum est simplex eius significatio: qua nouem illorum singuli ad certam quandam vnitatum multitudinem designandam instituti sunt. Alterum est locus, quem (quando plures simul concurrunt, vt ad numerum denario maiorem

denotandum ſemper contingit) ſinguli occupant. Hic enim locus, ſiue gradus, valoris denominationem quandam nouam illis tribuit, diuerſam pro loci diuerſitate: quæ in eo verſatur. Locorum illorum, ſiue graduum claſſiúmve ordo ab ipſo primo charactere ad dextram, numeri cuiuſvis initium ducit: & primum ipſe gradum ſibi vendicat: qui ad læuam proximè ſequitur (qui alias penultimus diceretur) ſecundum gradum; tertium tertius à primo, quartus quartum &c. Rursùs character quilibet (attende mirum in hoc numerandi genere artificium (in primo gradu, vnitates ſimpliciter ſuas deſignat. At in gradu ſecundo, non vnitates, ſed vnitatum decades, ſiue vnitates à denario denominatas exprimit. In tertio verò loco tot vnitatum decades repreſentat: quot vnitates in ſecundo. Vel tot vnitatum centenarios, quot in primo. Pariter in quarto loco, ita augetur eius valor, vt millies ſibi ſit æqualis in prima, ſede poſito, centies, ſi in ſecunda verſaretur: & valorem ſedis illius obtineret. Decies denique valorem obtinet, qui illi in tertio loco deberetur. Ita vt in eo locorum ordine character quilibet valorem decuplo ſemper maiorem acquirat, eo valore; qui ei tribueretur ſi gradum proxime antecedentem occuparet. Exemplum eſto numerus A, B, C, D. Character D primi gradûs ad dextram, quatuor vnitates ſignificat. At idem character in ſecunda ſede C poſitus, quatuor, non vnitates, vt in prima; ſed vnitatum decades, ſiue Quadraginta deſignat: ita numerum vnitatum decuplo maiorem tunc denotet. Idem vero character in tertio loco B, ſibi ipſi in ſecunda claſſe poſito eſt decies æqualis ſiue ſui ipſius eſt decuplus; centuplus autem ſui, cum in primo gradu ſtatuitur, ita vt non quatuor vnitates, vt in D, non quatuor vnitatum decades, vt in C. ſed quatuor vnitates centies, & quatuor vnitatum decades decies, tunc contineat, hoc eſt, vnitates Quadringentas. Quas, ſi idem character ad quartam ſedem A promoueatur, continebit decies: centies, Quadraginta vnitates, quas ei ſedes C tribueret. Millies denique quatuor vnitates, quas, ſi in primo gradu D ſiſteretur, denotaret.

A	B	C	D
4	4	4	4.

Quamquam autem eundem characterem 4 omnibus his Gradibus diuerſis A, B, C, D aſſignarim, vt manifeſtior euaderet hæc valoris mutatio per decuplam rationem, quam gradus ſeſe continuè verſus læuam conſequentes innehunt: tamen idem obſeruatur, & ſi omnes diuerſi ſtatuantur characteres. Neque enim ratio habetur characterum antecedentium, vt characteris ſequentis valor ſtatuatur; ſed tantùm graduum: quos ipſi antecedentes occupant. Vt non minus huius numeri 4325 character 4, quarti gradus ſignificet quatuor vnitates millies, ſiue vnitates quater mille: quàm in ſuperiori Paradigmate, in quo eadem figura 4 repetebatur eaſdem vnitates ſignificabat.

Iam

Iam verò apertè constat, quàm aptè annumerata sit figuris nouem arithmeticis significantibus decima illa figura O, siue zero, nihil significans: non enim ratione significationis propriæ; sed ratione graduum, ex quibus reliquarum figurarum valor penditur, adhibetur: dum enim illis adscribitur, eás ad gradus promouet altiores, eóque modo efficit significantiores. Vt in superiori exemplo A, B, C, D. Si trium figurarum posteriorum loco substituantur tria zero: prima figura A illis tribus zero præfixa eundem suum pristinum valorem retinet, eodem suo gradu quarto ope trium illorum zero, retento. Eadémque foret ratio etsi figuris significatiuis figura illa o permisceretur. Vt in eodem Paradigmate: expunge figuram C 4 gradûs secundi, cui substituas zero: nihil valoris de figuris A & B decedet, aut ad ipsas accedet; nec vllam perinde mutationem patietur figura D primi gradûs: sed tantùm, dum verbis exprimendus erit numerus ille posterior A, B, C, D, valor nullus huic secundo gradui C tribuetur: vt statim declarabitur.

A,	B,	C,	D
4	4	4	4
A			
4	o	o	o
A	B	C	D
4	4	o	4

Hic demùm obseruanda est quædam passim apud autores numerorum distinctio ex ea graduum, simúlque figurarum varietate, petita: qua alij dicuntur digiti; alij, articuli, alij, compositi. Digiti dicuntur numeri tantùm: qui nouem illis vulgaribus notis significatiuis exprimantur. Articuli verò quicunque digito numero carent: cuiusmodi necessariò sunt omnes; quorum primum gradum occupat zerò: nullus enim numerus carere potest digito: qui solus primum gradum occupare potest: quin eius primum gradum occupet zero. Tales ergo sunt 10. 20. 130.200. &c. Compositi denique sunt omnes, qui digiti cum non sint, id est, qui characteribus pluribus quam vno constet, digito tamen non carent; vel, quod idem est, eorum primus gradus à figura aliqua ex significatiuis occupatur: esto non significatiua o alium aliquem ex sequentibus gradum occupet. Itaque hi omnes & similes compositi numeri dicendi sunt 11, 18, 124, 205, 3006 &c. Hæc porrò numerorum denominatio à numerorum, vt videtur, natura tam aliena non aliunde profecta est; quàm ex quadam numeros quoslibet exprimendi ratione per digitorum articulorúmque manus conformationem. Vt enim numerum quemlibet denario minorem, hoc est figurâ vnâ aliquâ aptum exprimi, significetur: digitis exporrectis etiamnum id absoluitur: eadémque ratione vsi sunt antiquiores; isque mos quasi naturâ duce apud nullum nunquam inualuit. Numeri verò denario maiores, quibus nullus numerus denario minor adhæreret, quales sunt omnes numeri: quorum primus gradus est zero, per articulos tantum, ad eos

inflexis & adductis digitis ab antiquioribus designabantur. Vnde huiusmodi numeris indita est articulorum denominatio. Dicti denique sunt compositi numeri: qui & articulis simul & digitis exprimebantur, qui scilicet ita denario maiores erant, vt denario minoribus non carerent; quos per digitos designari oporteret. Vide totam hanc Chirologiam emendatam & elegantissimè expressam, vt reliqua, apud Betinum Apiario 11.

Prop. XVI. *Problema.*

Datum quemlibet numerum notis arithmeticis designatum, verbis exprimere; verbis expressum notis designare.

Expositio.

Duo hæc problematis huius capita conuersa, vnico numerationis nomine continentur; quamuis enim numeratio absolutè sumpta omnem numerorum tractationem significare videatur: vt tamen hic sumi solet, eam tantùm denotat: qua numeri cuiuscumque characterismo vulgari designati valor oratione effertur: vel contra characteribus exprimitur quilibet numerus verbis prolatus. hoc porrò duplex numerationis officium facilè præstabitur: si præter ea, quæ paulò ante de gradibus, quibus constat omnis tum paruus tum magnus numerus, tradita sunt obserues.

Primo cuilibet numero notis arithmeticis expresso competere varios enunciandi modos; & quidem tot, quot gradibus aut figuris (tot enim gradus, quot figuras continet) constiterit. Exempli gratiâ, proponitur numerus quatuor figuris A, B, C, D totidémque gradibus constans: multiplici enunciatione diuersâ eius valorem siue, qua constat, vnitatum multitudinem licebit efferre initio enunciationis semper facto ab ipsa figura A gradus vltimi. Dices enim illum continere sexaginta quatuor vnitates centies & præterea viginti octo, vel, & præterea duas vnitates, decies, cum octo denique vnitatibus.

A	B	C	D
6	4	2	8

Nam si duplicis characteris A & B numerus 64 quasi absolutus; neque vllas sequentes figuras C, D ei adhærere censeatur: haud dubium quin rectè efferatur his verbis *sexaginta quatuor*. Quia verò figura B 4 habita ratione duorum sequentium graduum C & D centenariorum denominatione afficitur: ideo duo characteres A 6 & B 4. suam significationem non simpliciter sed cum denominatione centenariorum in figuram B 4 cadente obtinent, & numerum exprimunt sexaginta quatuor vnitatum centies: adde iam numerum characteribus C 2, & D 8 designatum: qui est viginti octo vnitates. Habebis totum hunc numerum A, B, C, D 6428 verbis enunciatum sexaginta quatuor vnitates

centies

centies; & viginti octo. Dixi præterea numerum duobus postremis characteribus C 2 & D 8 expressum, ita etiam efferri posse; vt dicatur, duæ vnitates, decies (propter characterem C 2 ad denarios pertinentem, siue denariorum denominatione affectum) & denique, octo vnitates. Quo eodem iure quia gradus characteris A 6, habitâ ratione gradus proximi, characteris B 4, denariorum denominatione afficitur: ideo efferri poterit idem character 6 etiam hoc modo *sex decies centies*. *Sex* quidem quia eius est propria significatio. *decies* vero, quia habitâ ratione characteris B proximè sequentis, character A 6 sui ipsius valorem auget decuplo. Quia autem character B 4, gradum occupat centenariorum, & ab eo denominatur: quæ denominatio in gradum A refunditur: ita vt gradus A sit decuplus gradûs B, sed gradus B centenariorum denominatione gaudet: hinc fit vt gradus A duabus denominationibus, & denariorum, & centenariorum afficiatur; eò quod sit eius valor decuplò maior quam valor gradûs B qui est maior centuplò primi gradûs D valore.

Rursùs. Vt totam hanc denominationum varietatem maioris lucis gratiâ percurram. Si tres gradus A, B, C, omisso quarto D, attendantur: gradus A ad gradum C comparatus ad centenarium pertinet: gradus verò B ad denarium. Ergo ita efferretur numerus A, B, C 642 sexcenta, Quadraginta duo, non simpliciter, sed decies: eò quod gradus C primus non sit; sed secundus, & denariorum denominationem sit adeptus: eiúsque gradûs valor augeatur deinceps per decuplum incrementum graduum sequentium. Efferri ergo debet character 6 gradûs A tertij à gradu C; sexcenta, decies: character autem 4, gradûs B secundi post C. Quadraginta, item decies: ipse denique character C 2, suâ, quam obtinet denominatione affectus, efferetur, duo, decies. Vltimus verò character, D 8. efferetur, octo simpliciter: caret scilicet omni denominatione, cum primus sit ipse gradus; in quo vnitates simplices & absolutæ reperiuntur. Totus ergo numerus ille A, B, C, D, 6428. ita acceptus, vt tres characteres priores simul attendantur, in hunc modum, vt ante statui, verbis enunciari debet Sexcentæ, Quadraginta duæ vnitates decies; & octo insuper. Sic enim reuerà verbis exprimitur multitudo vnitatum hoc numero 6428. contentarum.

Ex hac ratiocinatione colligitur quàm variis modis idem numerus characteribus designatus possit enunciari: si nimirum in varia membra quæcunque distribuatur: quorum singula efferantur habitâ ratione, & gradûs, quem caracteres in singulis membris occupant; & denominationis quæ postremo membrorum singulorum characteri competit ex prioribus totius numeri gradibus. Sic enim superiùs diuisus est numerus 6428. in duo membra 64 & 28. & enunciatus est sexaginta quatuor vnitates centies (quia posterior character 4. tertium gradum totius numeri occupat, vnde illi aduenit centenariorum denominatio) & insuper viginti octo. Sic idem

numerus in alia membra, 642, & 8 proximè diuisus est: vnde enunciatus est sexcentæ Quadraginta duæ, vnitates, decies; & insuper octo vnitates: quæ vnitatum multitudo æqualis est priori vnitatum multitudini; licet verbis non parùm discrepantibus vterque numerus efferatur. Quæ quamquam verissima sint: vnus tamen quidam numeros characteribus designatos verbis efferendi modus, vt omnium aptissimus, & charissimus, vsurpari vulgo solet: qui propositi problematis absolutam & integram solutionem exhibet: de cuius constructione statim. Sed secundò obserua. Paucis admodum numeris; infinitorum, qui dari possunt, habitâ ratione; vocem propriam, quâ efferantur, conuenire sæpiúsque opus esse repetitione vocis vni alicui numero ex instituto concessę: vt aliorum valor exprimatur. Et quidem in primis, nomine gaudent proprio nouem illi numeri vulgares characteribus nouem vulgaribus expressi; quos vocari digitos superiùs monui: deinde articulis competunt voces propriæ, non tantùm qui inter decem & centum habentur: vt viginti, triginta, Quadraginta &c. sed etiam qui inter centum & mille reperiuntur: vt centum ducenta, Quingenta &c deductis tamen articulorum vtrorúmque vocibus, vt patet ex primis illis nouem qui digitis, attribuuntur. Ad compositos numeros quod attinet, nullum tributum est nomen singulare: sed vt constant numero digito, & articulo; ita voce efferuntur compositâ ex vocibus digiti & articuli; vel duplici digitis & articulis propria, vt vndecim, sedecim &c. Item viginti vnum, viginti quinque; Quadraginta quatuor &c. Nec tantum compositi numeri voce propriâ, qua exprimantur, carent: sed omnes millenario maiores, vno excepto numero vnitatum mille millies; qui millio vocari consueuit. Quod cum ita sit, vt numeri quàm aptissimè fieri posset, exprimerentur; meritò & institutum & admissum est passim, vt numerorum; qui ab vnitate ad millenarium habentur, quando hi omnes voce propriâ designari possunt; denominatione repetitâ, prout numeri propositi quantitas exiget, enuncientur quasi per periodos. Quod qua ratione præstetur, cum Problematis allati solutionem contineat, aperiendum nunc est initâ constructione: cuius Præcepta paucis versiculis memoriæ causâ complector.

Constructio partis prioris Problematis.

Proponatur numerus A characterum multitudine paulò copiosiore constans oratione exprimendus, id absoluetur sequentibus præceptis obseruatis.

Vltima signetur puncto nota dextra sequentes
Linque duas, quartámque nota; sic perge secando
In ternis numerum constantia membra figuris

Dum

Dum numeras, here in punctis; totiésque vocato
Mille, semel dempto; quot dextera puncta sequuntur.

Præceptum primum. *Vltima signetur puncto nota dextra sequentes &c.* pertinet præceptum hoc ad aptam numeri dati præparationem, vt possit aptè eius valor verbis aut scripto enunciari, apta autem erit. Si dati numeri A figura vltima ad dextram, quæ est 3, punctulo subscripto insigniatur B. Tum duabus omissis figuris 2 & 4, proximè sequentibus versus læuam quarta figura 7 puncto C iterùm inuratur: eodémque modo reliqua deinceps puncta versus læuam suis figuris subscribantur, vt subscripta hic sunt puncta D & E, characteribus 5 & 9.

A	3	9	4	2	5	6	8	7	2	4	3
		.			.			.			.
		E			D			C			B

Vbi obseruandum est membra singula tribus figuris semper constare, excepto interdum primo membro; quod vnicâ figurâ, aut duabus, vt hic, constare potest. His ita paratis sequitur Præceptum secundum. *Dum numeras here in punctis totiésque &c.* Hoc præcepto iubetur vt singula membra, quæ tribus figuris constant omnia excepto interdum vt memini, primo membro tanquam absoluti numeri & simplices, verbis aut scripto exprimantur, addita denominatione ad figuram vltimam quæ puncto afficitur, pertinente. Vt in hoc exemplo; membrum primum est 39. Effert igitur 39 quasi numerum absolutum ab omnibus sequentibus versus dextram figuris: qui ita sumptus efferetur his verbis *Triginta nouem*: quibus appone denominationem figuræ posteriori 9, punctulo inustæ congruentem; quæ hisce verbis indicatur. *Totiésque vocato mille, semel dempto &c.* Id est, dices huius membri 39 valorem esse *trigintà nouem millia, millies millies* ter repetita voce *mille* semel in recto, bis in obliquo, toties scilicet, *semel dempto, quot dextera puncta sequuntur* ipso computato puncto E huius membri: hæc enim huic figuræ 9 denominatio competit. Licet enim quatuor puncta E, D, C, B, numerum in quatuor membra distinguant: membrum tamen primum ad dextram 243, ad millenarium non attingit, nec millenarij denominationem sibi vendicat: prima enim figura à millenario denominata, est figura 7, puncto C insignita; quæ denominatio in reliqua deinceps mẽbra versus læuam refunditur. Rectè igitur fit illa vnius puncti exceptio puncti, scilicet B in allato præcepto. Hoc igitur mẽbro 39 enunciato ita vt dicatur triginta nouẽ millia, millies, millies siue millia mille millies, aut triginta nouem millia millena millies, semel semper in recto, & deinceps bis in obliquo. Hoc, inquam, primo membro expedito ad alterum 425 progrediendum est tanquam foret numerus simplex, iis verbis exprimendus *Quadringenta viginti quinque millia millies* (ea enim est denominatio characteris 5 puncto affecti) bis repetita voce, mille propter duo puncta D & C. Vel, quia habetur vox propria, scilicet millio, tributa ex Instituto ad numerum continentem mille vnitates millies exprimendum: ita

ita idem membrum ex ea enunciabitur Quadringenti viginti quinque milliones. Hinc patet quæ membri sequentis 687 enunciatio esse debeat. Dicetur nimirum *sexcenta octoginta septem millia*. Semel tantùm additâ denominante voce millia, ob punctum vnicum quo afficitur character 7 eiusdem membri vltimus. Vltimum denique membrum 243 simpliciter, & sine vlla adiecta denominatione exprimendum est: quia nulla alia præter vnitatum simplicium denominationem, characteri 3 vltimo eius membri gradúsque primi competit. Dicetur itaque absolutè membrum hoc vnitates continere *Ducentas Quadraginta tres*. Totus ergo propositus numerus A collectis in vnam eius membrorum omnium enunciationibus, ita exprimitur.

Triginta nouem millia millies millies | Quadringenta viginti quinque millia millies, siue, Quadringenti viginti quinque milliones | Sexcenta octoginta septem millia | Ducenta Quadraginta tria.

Quod si zero aliquot figuris significatiuis interdum permixta occurrant: interrumpenda quidem est continua significatiua enunciatio ob defectum figurarum significantium; denominatio tamen eadem semper erit; illæ enim nihili figuræ O nihilominus quàm figuræ significantes, gradus constituunt singulorum characterum, ex quibus gradibus oritur cuiuslibet characteris denominatio. Exempli loco efferendus sit hic numerus A, qui idem cum superiore foret, nisi in locum quorundam significantium characterum, zero aliquot substituta forent. Eius igitur membris per punctulorum figuris debitis appositionem

A 3 9 0 2 0 0 8 0 0 0 3
. . . . .

distinctis, ita exprimetur *Triginta nouem millia millies, millies | viginti millia millies | octoginta millia | & tria*. Quod si post membrum primum 39 nullus occurreret character significatiuus; sed omnes forent zero enunciaretur primum illud membrum denominatione adiectâ; quam exhiberent illæ nihili figuræ in debita membra distributæ.

Demonstratio.

Nulla eget hæc prior Problematis pars demonstratione aliâ; quam quæ ex ipsa allata expositione, petitur. Ex ea enim aperta euadit ratio denominationum variarum, quæ singulis characteribus numerum quemlibet designantibus conueniunt, prout in varia membra numerus distribuitur. Harum autem distributionum omnium aptissima ostensa est ea: quæ hic adhibita est; tum quia ordinatissima est; tum quia numeros omnes vsurpat quibus significandis vox propria ex instituto conuenit: Quare datum numerum characteribus expressum, verbis aptè expressimus. Quod faciendum erat iuxta priorem propositionis partem.

Scholium

Scholium.

Ne quid omittatur, quod ad hoc prius numerationis officium conducere poſſit: memineris me attigiſſe ſuperiùs eum caractetem numeri alicuius voce propriâ, qua eius valor exprimatur, non carere: cui denominatio mille millies congruit dicíque conſueuiſſe *millionem.* Si igitur iuxta hanc denominationem numerum quempiam lubeat exprimere; opere haud multùm graui id conſequeris, hoc ſcilicet. Propoſitus ſit numerus A per milliones exprimendus. Suis illum punctis in membra diſtingue tribus figuris, vt prius, conſtantia; qualia ſunt B, C, D &c. facto initio ab vltimo charactere 3 ſiue à primo totius numeri gradu. Cernis ergo ex ea diſtributione denominationem *mille millies* ſiue *millio* cadere in punctum D ſiue in characterem 5 occupantem locum ſiue gradum ſeptimum. Hunc igitur duplici puncto D diſtinctionis gratiâ affice. Tum omiſſo puncto E proximè ſequenti, duplici iterum puncto affice gradum poſt D ſeptimum ſiue characterem F 6; cui iam adhærebat alterum punctum ex priori diſtributione debitum: & ſic deinceps perge quandiu numeri dati figurarum multitudo parietur, omiſſo ſemper puncto intermedio, quod iam per ſolitam diſtinctionem ſtatutum fuerat. Quibus abſolutis duabus diſtinctionibus, ita ex eis efferetur datus numerus. *Quadraginta ſex milliones millionum* | *Quadringenta triginta nouem millia millionum* | *Quadringenti viginti Quinque milliones* | *Sexcenta octoginta ſeptem millia* | *& ducenta Quadraginta tria.* Quæ enunciatio apprimè conſonat ijs, quæ tum in expoſitione, tum in conſtructione declarata & obſeruata ſunt ad denominationum rationem pertinentia: vt fuſiori explicatione hîc non ſit opus.

$\overline{A}$	4	6	4	3	9	4	2	5	6	8	7	2	4	3
		:			.			:			.			.
		F			E			D			C			B

Obſerues præterea cum numerus occurrit fuſiori figurarum membrorúmque multitudine conſtans: non abs re fore ſi punctis ſingulis minuſculæ notæ Arithmeticæ adſcribantur initio facto à primo ad dextram puncto, cui adſcribatur zero: ſequenti ad læuam, 1; tertio 2, &c. vt refert Schema. Quarum ope notarum ſtatim appareat, quoties vox illa, mille, ſemèl in recto, deinceps in obliquo repetenda fuerit: ipſæ enim punctorum multitudinem indicant; ex quibus numeratio inſtituitur. Cæterum quia in amplioribus huiuſmodi numeris frequens illa repetitio vocis, *millies*, non ſolum ingrata eſt, ſed inutilis etiam videtur: neque enim tantam vnitatum congeſtam multitudinem continuo ſingulorum mem-

4	6	4	3	9	4	2	5	6	8	7	2	4	3
	.			.			.			.			.
	4			3			2			1			0

brorum decuplo illo incremento impeditionem mens cognitione nisi confusa complecti potest: vt satis fore videatur; si pronunciato membri cuiusque numero, denominatio omissâ repetitione in actu tantùm signato efferatur. Vt in hoc Paradigmate, in quo membrum primum 46 designat Quadraginta sex Millia Millies Millies Millies, vt punctulum adscriptum exigit: breuiùs eius quantitas membri exprimetur: si dicatur significare Quadraginta sex millia, Millies repetita quater, semel quidem in recto, & ter in obliquo secundum verò membrum 439. efferatur Quadringenta Triginta nouem Millia Millies, ter iterato: & ita de cæteris membris. Atque hactenus satis de priore Numerationis officio. Nunc exponendum est alterum, eius conuersum.

Constructio Posterioris partis Problematis.

Ex priore Problematis parte satis multis declarata, plana euadit hæc pars posterior, qua modus doceri debet, quo numerus quilibet vel verbis, vel scripto exhibitus, Arithmeticis notis possit exhiberi. Duo enim obseruanda tantùm sunt. Primum est numerum exprimendum (si tamen aptè proponatur) membris aliquot constare: quorum singula tribus characteribus constant, primo excepto, qui vno aut altero constare potest: quorum postremo adhæret denominatio. Alterum est, tres hujusmodi singulorum membrorum characteres, aut omnes, aut eorum duos vel vnum figuras o siue zero esse posse; quibus in casibus, exprimi verbis, cum nihil significent, non possunt: verùm tunc denominatio annexa, ipsos satis, eorúmque multitudinem, etsi plura membra eius generis concurrerent, indicabit. Res plana, planior euadet vno aut altero Paradigmate proposito.

Esto igitur numerus scripto propositus (si enim verbis proponatur; quid in chartam referri vetat?) characteribus donandus. *Quingenta Quadraginta tria Millies Millia | Trecenta viginti septem Millia | ducenta Quadraginta sex* Exprime membrum illud primum (Quingenta Quadraginta tria) quasi denominatione illa (millies millia) omnique alia careret, sed simplex foret vnitatum numerus: denominatio enim characteres non immutat sed graduum tantùm multitudinem. Prima ergo illi membro hi d:bentur characteres A 5 4 3, pro certo interim habito, duo membra integra secutura; id enim exigit denominatio adhærentis millenarij bis repetiti: quæ semper membra vno plura quam repetatur indicat: vltimum enim membrum ad Millenarium non pertinet? Membrum secundum est (Trecenta viginti septem) tres ergo characteres B 327. tres hosce numeros exprimentes membro iam posito appone tanquam simplices, nulla habita ratione denominationis (millia) quam illi comparat membrum sequens quod est (ducenta Quadraginta

A	B	C
5 4 3	3 2 7	2 4 6

Quadraginta ſex) characteribus C 246 exprimendum. Atque ita totus tandem habetur numerus characteribus debitis deſignatus, qui oratione tantum enunciabatur.

Alterum exemplum, in quo vacua loca occurrunt, eſto huiuſmodi Notis exprimere cupis hunc numerum Quadringenta tria millies millia | ſex millia | ducenta. Cernis ergo membrum primum duas notas ſignificantes exigere; quibus ſignificentur Quadringinta, & tria. Vt autem Quadringenta exprimantur, tres neceſſariæ ſunt figuræ; quæ tres conſtituant gradus & primæ figuræ denominationem centenariorum adſciſcant. Tria verò illa exprimi debent vltimâ membri figurâ: reſtat ergo ad membrum illud abſoluendum, vt figura ſecunda ſit zero. Et verò in numeri propoſitione nulla fit decadum, ſiue denariorum mentio; ſed à centenario ad ſimplices vnitates fit progreſſus. Debet ergo figura non ſignificatiua, ſiue zero, decadum locum occupare: ita vt membrum illud primum ſit A 403: cuius denominatio (millia millies) duo ſupponit membra ſecutura. Prius eſt (ſex millia nulla vel centenariorum vel denariorum mentione factâ: quorum proinde gradum occupare debet duplex zero, vt membrum B 006 ſtatuatur. Poſterius eſt (ducenta) quod ſtatuetur, vt C 200 Duplex enim zero neceſſarium eſt, vt gradus ſuppleatur tùm denariorum, tùm vnitatum ſimplicium: ſine quo centenarij ſtare non poſſunt. Totus ergo numerus propoſitus, characteribus expreſſus, ita habet 403 006 200, vt refert ſchema. Ex his patet quid in cæteris, in quibus gradus quidam prætermittuntur, præſtari debeat: eorum ſcilicet locum occupare debet zero; vt eo nomine; zero non numerus, ſed numeri ſupplementum iure vocari poſſit. Datus ergo quilibet numerus, aut voce pronunciatus, aut ſcripto mandatus, hac methodo characteribus rectè deſignatur. Quæ erat altera propoſitionis pars abſoluenda.

A	B	C
403	006	200
.	.	.

Scholium.

Totam Problematis ſolutionem vſque ad numerum ſeptem figuris conſtantem: cuius prima ad læuam figura ad millionem ſpectat, ſequentes verſus continent memoriæ cauſa.

Claſſis prima capit digitos. Decadéſque ſecunda.
Tertia centenos. Millenos quarta. Decémque
Millia quinta. Capit centum ſed millia ſexta.
Millia mille ſequens vult ſeptima. Millio dicunt.

Prop. XVII. *Probl.*

Duos vel plures numeros in vnum per additionem colligere.

Expositio.

Additio vt vox ipsa sonat, est Quantitatis siue continuæ, siue discretæ partes aliquot ad totum vnum componendum vnire, ac colligere: quas propterea vnius eiusdémque speciei oportet esse: alias enim ad totius compositionem ineptæ forent. Hic de additione agitur partium Quantitatis discretæ: quales sunt numeri quicunque, & quotcunque dati; sunt siquidem omnes eiusdem naturæ; multitudines scilicet ordinatæ: quas in vnum aliquem numerum colligi nihil vetat. Cum nullus sit tantus numerus, quin alius eo maior possit exhiberi. Non secùs ac in Quantitate continua tot rectæ lineæ dari non possunt, quin vna aliqua ex ipsis simul adiunctis conflari possit: omni enim datâ rectâ lineâ maior in infinitum, & pluribus partibus constans dari potest. Positâ ergo possibili tam quoad partes quam quoad totum, illâ numerorum collectione, hîc eius absoluendæ modus traditur: quem Præceptis aliquot, hisce versiculis memoriæ causâ contentis expono.

Constructio.

A summo numeros eiusdem classis ad imum
Dirige. Coge gradus: genitíque figura notetur:
Vnica si fuerit; si duplex, vltima tantùm:
Altera seruetur classi iungenda sequenti.

Vt Præcepta hæc totâque Additionis operatio proponatur planiùs; exemplo vtendum est omnium Additionum instar futuro. Sint ergo addendi in vnum numeri.

A 34572.	B 3688.	C 27.	D 632

Præceptum primum his verbis continetur. *A summo numeros eiusdem classis ad imum dirige.* Quibus docetur apta numerorum addendorum inter se dispositio ad ipsam Additionem; quæ dispositio talis esse debet: Vt omnium addendorum numerorum characteres *eiusdem classis*, hoc est, eiusdem gradûs, siue loci in vnam rectam seriem à superiore loco ad inferiorem porrectam componantur: quicunque deinde ordo in numerorum collocatione

locatione seruetur. Hanc dispositionem seruatam cernis in hoc Schemate.

	E	F	G	H	L
A	3	4	5	7	2
B	—	3	6	8	8
C	—	—	—	2	7
D	—	—	6	3	2
R	3	8	9	1	9

Cernis scilicet datos numeros ita compositos; vt omnes characteres primi gradûs L rectam vnam seriem efficiant: vnam gradûs secundi H, siue denariorum classis: suam classis tertia G centenariorum, suam classis quarta F millenariorum: suam Quinta E decies millenariorum: suamque reliquæ deinceps classes, quotquot extiterint. Quæ classes inæquali characterum multitudine constare possunt, vt hic proditur, prout numeri addendi varij sunt, & inæquali figurarum multitudine exprimuntur. Quæ inæqualitas multitudinis classium ad læuam cernitur; ad dextram cerni non potest. Nullus enim tam exiguus numerus etsi foret vnitas, dari potest; qui classem primam digitorum non admittat. Numeris omnibus hoc modo ritè dispositis linea recta subducitur, vt refert Schema; sub qua conflatus ex additione numerus exarandus erit iuxta sequens Præceptum.

Præceptum secundum. *Coge gradus* Id est, Adde singularum classium characteres initio facto à prima classe L. Adde scilicet (initium duco à summo & deorsum pergo, vt aptiùs videtur; licet ab imo sursum versus ascendere nihil obstet) 2 ad 8: fiet 10: adde 7, fiet 17: adde denique 2, fiet 19 ex tota illa prima classe L collectus: quo numero quid fieri debeat docet Præceptum sequens.

Præceptum tertium. *Genitíque figura notetur: Vnica si fuerit; si duplex vltima tantùm: altera seruetur classi iungenda sequenti.* Id est si ex additione primæ huius classis L genitus fuisset numerus, qui vnicâ figurâ exprimeretur, fuissétque digitus: figura illa subductæ numeris rectæ lineæ subscriberetur, ad numerum scilicet R, & quidem ita, vt directè in eadem classe L statueretur. At quia genitus est hic numerus 19 duplici figura constans; ideo præcipitur; vt vltima figura 9 illius, sub linea scribatur directè sub addita classe, priore figurâ 1 mente interim seruatâ; quippe quæ ad sequentem classem H decadum, cum decadica sit, pertineat, eíque addi debeat, iuxta verba illa. *Altera seruetur* &c. Igitur ad 1 mente seruatũ adde supremã figuram 7 classis H sequentis; fiet 8, adde 8, fiet 16: adde 2, fiet 18: adde 3 fiet 21. Qui collectus ex classe H numerus, cum duplici & ipse figurâ constet, posteriorem figuram 1 subscribi in eadem classe secunda postulat; dum prior 2, mente seruatur ad sequentem classem G addenda. Additâ ergo mente seruatâ figurâ 2 ad 5 fit 7: additâ 6, fit 13: addita 6, fit 19. Subscribitur ad R figura 9 posterior; prior verò 1 in classem F transfertur, addenda vtique ad supremam eius figuram 4, vt fiat 5: cui numero additur figura 3 (nec plures in ea classe addendæ supersunt) & fit 8, subscribenda lineolæ rectæ ad R. Denique vltimus gradus E vnicam tantùm

figuram 3 continet: quæ sola suo in ordine reponitur. Atque ita tandem absoluta est additio datorum partialium numerorum A, B, C, D: genitúsque est numerus R. 38919, vnus quatuor illis æqualis, vt statim probabitur. Hic tantum obserua: si quando contingat (vt contingit non rarò) vltimam classem coaceruatam numerum gignere duabus figuris constantem; vtramque figuram subscribi debere. Neque enim mente retinenda est prior figura, sed exprimenda; cum nulla alia sequatur classis, in quam transferri debeat.

Demonstratio.

Vt tradita methodus hæc plures numeros in vnum colligendi recta veráque demonstretur (quanquam adeò clara videatur; vt nulla probatione egere censeri soleat) supponendum in primis est; tunc demonstratam fore:

	E	F	G	H	L
A	3	4	5	7	2
B	—	3	6	8	8
C	—	—	—	2	7
D	—	—	6	3	2
R	3	8	9	1	9

cum numerus R per additionem datorum numerorum A, B, C, D genitus, probatus fuerit tot vnitates continere: quot continent numeri partiales A, B, C, D. Id porrò euidens est ex eo: quod totalis numerus R, tot simplices vnitates, tot vnitatum denarios, centenarios, millenarios &c. contineat: quot vnitates simplices, quot vnitatum denarios, centenarios, millenarios &c. numeri partiales addendi continent. Denarius enim vnitatum, vnitatum denario; centenarius, centenario &c. non potest non esse æqualis. Ergo etiam denarij aliquot, totidem denariis; aliquot centenarij, centenariis totidem &c. sunt æquales. Quod si præter illos gradus à primo remotiores, ipsi etiam gradus duo primi, qui ad vnitates simplices, siue ad digitos pertinent, æquales fuerint; dubitari nullatenus poterit de æqualitate additorum numerorum, & totius numeri ex aditione collecti. Probatur itaque antecedens illud nimirum vnicum numerum R ex additione collectum continere tot simplices vnitates, tot vnitatum denarios, centenarios &c. quot numeri partiales complectuntur. Nam iuxta methodum vnitates omnes simplices datorum numerorum partialium, siue digitos, in vnicam seriem L digestos addi præcipitur in vnicum numerum: qui repertus est 19. Hic ergo numerus 19 æqualis est omnibus simul digitis 2, 8, 7, 2 datorum numerorum. Rursus præcipitur, vt omnes gradus secundi, siue denariorum, quos continent dati numeri; quique in serie H 7 8 2 3 congesti sunt addantur: vt fiat vnicus ex illis omnibus gradibus denariorum simul additis numerus vnicus 20 decadum hoc est 200. Ita vt vnicus numerus 200 tot decades vnitatum contineat: quot decades continet tota series H. Iam verò si numerus 19 æqualis toti classi L, addatur ad 200. æqualem toti classi H decadum partialium; addatur scilicet 10 (figura enim illa 1 nu-

meri

meri 19 est secundi gradus siue denariorum) ad 200 vt fiat 210. addatur deinde posterior numeri eiusdem 19, figura 9 primi gradûs, atque adeo in locum figuræ o numeri 210 substituatur; fiet numerus vnicus 219; qui tot decades, tótque præterea vnitates simplices contineat: quot decades, & quot vnitates simplices continent numeri partiales duarum classium L & H. Ergo si dati numeri nullis aliis vlterioribus gradibus constarent: rectè haberetur vnicus numerus 219 illis æqualis. Eodem modo ostendetur numerus collectus ex classe centenariorum G 5, 6, 6 hoc est 500, 600, 600; qui est 1700 æqualis partialibus illis centenariis. Cui numero 1700. centenariorum numerus 200. additur, dum mente seruata figura 2 numeri 21 ex secunda classe geniti, additur ad figuras tertiæ classis G tanquam ex illis vna, cum sit tertij gradus; & producitur 19, hoc est, propter gradus præcedentes 1900: cuius posterior figura 9 subscribitur classi centenariorum, vt pote ad eam pertinens, mente autem seruatur figura prior 1 millenariis annumeranda. Iam ergo numerus 1919 tot centenarios, tot denarios vnitatum, tot item simplices vnitates continens; quot centenarios vnitatum, quot earum denarios, quot vnitetes simplices continent classes tres G, H, L. Numeris trium illarum classium est æqualis. Eodem modo ostendetur numerus iuxta traditam methodum collectus ex cæteris classibus sequentibus F & E, æqualis classibus illis: atque adeo totus ex omnibus classibus additis genitus, æqualis omnibus datis partialibus numeris. Numerum ergo vnum ex pluribus datis per additionem collegimus. Quod faciendum erat.

Prop. XVIII. *Probl.*

Additionis absolutæ examen instituere.

Expositio.

Proximè demonstratum quidem est vnicum numerum ex multis rectè colligi, si tradita methodus accuratè seruetur: sed quia nihil procliuiùs quàm Logistam, etiam attentissimum, dum tot numerorum complicationes percurrit, in defectum aliquem labi: ideo absolutum opus ex authorum omnium communi sententiâ examini subiiciendum est; vt ab omni latentis vitij suspicione liberetur. Variis autem modis institui potest examen illud: quorum aliquot hic tradere conuenit. Sit itaque.

Conſtructio prima.

Ex numeris A, B, C, D ſuperiùs additis collectus eſt numerus R additione ſingularum claſſium inchoatâ à ſupremo eius charactere. Sic enim claſſis prima (quæ hiſce characteribus 2, 8, 7, 2 conſtat) collecta eſt iuncto ſummo eius charactere 2 ad 8, vt fieret 10: cui tertius character 7 additus eſt, vt fieret 17; ac tandem infimâ figura 2 additâ, genitus eſt numerus 19. Tum ad ſecundam claſſem & cæteras deinceps perrectum eſt initio ſemper facto à figura ſupremâ ad numerum A pertinente. Nunc igitur eandem additionem inſtitue contrario ordine ſeruato: Adde ſcilicet ſingularum claſſium characteres initio ab earum infimo, ducto: ſeruatâ interim reliqua additionis methodo. Si enim abſolutâ hoc ordine additione idem numerus R generetur: vix eſt de rectè peracta additione dubitandi locus: vix enim, ſi in priorem additionem quis error ſubierat, idem recurret in poſteriorem, vt idem numerus R producatur. Quod ſi numerus per ſecundam additionem collectus, à numero R per priorem genito diſcrepet: habeto pro certo inalterutrâ admiſſum errorem quempiam fuiſſe: quem opere attentius repetito emendare oporteat.

A	3	4	5	7	2
B	—	3	6	8	8
C	—	—	—	2	7
D	—	—	6	3	2
R	3	8	9	1	9

Conſtructio ſecunda.

Hoc ſecundum additionis examen haud tam planè fortaſſe hic percipietur, quàm poſt traditam ſubtractionem: cum ab ipſa pendeat. Hic tamen, cum ſit eius locus, omittendum non eſt; præſertim cum hic neceſſaria ſubtractio maximè ſit expedita, & à quolibet iniri facile poſſit. Cum igitur numerus R æqualis ſit ſuis omnibus partibus A, B, C, D ſimul ſumptis: ſi à numero R demantur ſingulæ illæ partes; dematur ſcilicet ab eo numerus A, verbi gratiâ; tum à reliquo dematur B, denique ab hoc reliquo dematur C neceſſarium eſt (aut alias erratum foret) vt reliquus fiat nnmerus D vltimus. Debent ſiquidem partes ſimul ſumptæ toti eſſe æquales. Verùm quia ſubtractio illa integrorum numerorum A, B &c. à numero R totam ſubtractionis doctrinam ſupponit: aliam affero ſubtrahendi rationem ſimpliciſſimam quæ iniri a quouis poſſit quæque idem cum præcedente præſtet. Quæ ita habet.

A	3	4	5	7	2
B	—	3	6	8	8
C	—	—	—	2	7
D	—	—	6	3	2
R	3	8	9	1	9
		1	2	0	0

Initio facto ab vltima claſſe deme numerum ex eâ collectum (hic vnica figura 3, numeri A in èa claſſe reperitur) à claſſe vltima

vltima numeri R, respondente: deme scilicet figuram 3 à 3: nihil fit reliquum. Perge ad penultimam classem; quæ figuras 4 & 3 continet, siue simul numerum 7 quem demas à numero 8 eiusdem classis, numeri R: relinquitur 1; quam figuram characteri 8 subscribes, vt habet schema: quæ habitâ ratione figuræ 9 sequentis, est decadica, & cum ipsa efficit numerum 19: à quo rursus demetur numerus 17 ex additione trium figurarum 5, 6, 6 alterius classis, collectus, & relinquetur figura 2, characteri 9 subscribenda: quæ cum figurâ 1 sequente efficit numerum 21: Vnde subtrahi debet numerus ex tota classe figuræ 1 superposita genitus; qui est 20: ita vt restet, factâ numeri 20 ex 21 subtractione, figura 1, suo loco, quando ita occurrit, relinquenda: ita vt à numero 19, qui tandem ex toto numero R superest, demi debeat tota classis prima 2, 8, 7, 2. siue 19. Ergo nihil reliquum fit ex numero R hac vltimâ subtractione factâ. Quod signum est certissimum rectè institutam fuisse additionem numerorum A, B, C, D dum collectus est numerus R. Ratio est, quia numerus R totalis, si æqualis est partialibus numeris A, B, C, D simul sumptis; tot vnitates simplices, tot denarios vnitatum, tot centenarios &c. continere debet: quot simplices vnitates; quot denarios, quot centenarios &c. continent numeri A, B, C, D simul sumpti. Ergo si singulæ classes partialium numerorum A, B, C, D; in quarum singulis reponuntur numeri eiusdem gradûs iuxta primum additionis præceptum; demantur ex classibus numeri R sibi respondentibus nihil fieri debet reliquum peractis partialibus illis subtractionibus: Quod si quispiam supersit, vitio non caret additio, vtrique repetenda.

Constructio tertia per abiectionem nouenarij.

Celebre habitum semper fuit examen illud; quo non solum additio, de qua hîc agitur; sed etiam, quæ sequuntur operationes arithmeticæ elementares subtractio, multiplicatio, & diuisio, probari solent compendiosissimè: quod ex mira quadam nouenarij proprietate deducitur, statim vbi praxis declarata fuerit, demonstranda. Praxis autem his continetur versiculis.

Tolle vtrimque nouem: nota si superauerit aqua:
Fecisti rectè numeris de pluribus vnum.

Quorum hic est sensus: Tolle nouem tam ex numeris A, B, C, D partialibus additis; quam ex totali numero R ex additione genito. Sed

A	3	4	5	7	2			
B	—	3	6	8	8			
C	—	—	2	7				
D	—	6	3	2.			F	3
R	3	8	9	1	9.		E	3

ita tolle, quasi characteres simplicis forent significationis, & primæ classis omnes, siue digiti; ac proinde tolle nullo seruato ordine, nisi eo, qui necessarius est ad vitandam characteris alicuius omissionem; quæ nisi quis seruaretur, facilè contingeret: dum autem hanc nouenarij subtractionem prosequeris; vbi numerum nouenario maiorem per characterum additionem effeceris, dempto nouenario reliquum cum alio charactere coniunges, donec omnes percursi fuerint characteres tunc autem reliquum, si quod est, sepones: si nihil restat; sepones zero. Praxim totam circa allatum hactenus Paradigma lubet exercere ordine numerorum seruato inter subtrahendum nouenarium.

Initio itaque facto à supremo numero A. duas eius primas figuras 3 & 4 adde: fiet 7: adde tertiam 5, fiet 12 iam nouenario maior: ergo eo dempto superest 3: huic adde sequentem figuram 7, fiet 10, deme 9, restat 1: adde vltimam figuram 2, fiet 3: tum accede ad numerum secundum B; eiusque primam figuram 3 adde ad figuram 3 ex numero A relictam; fiet 6: adde sequentem 6, fiet 12: deme 9, restat 3: cui addes 8, fiet 11; dempto nouenatio, restat 2: cui addes vltimam figuram 8 eiusdem numeri secundi B, vt fiat 10: deme 9; restat 1: cui addes primam tertij numeri C figuram 2, vt fiat 3. Sic perge eadem methodo donec omnium numerorum figuras omnes percurreris: quibus in hoc exemplo percursis, reliqua fit tandem figura F 3 seponenda. Tum eandem operationem circa numerum R ex additione genitum institue: eâ peractâ. Supererit figura E 3, priori F relictæ æqualis. Vnde coniicere licebit factam additionem nullo errore laborare. Nunc iure quætas vnde hæc tam mira nouenatij facultas proficiscatur? Aperio. Sed priùs aliud obserua; quod admirationem augeat.

Si duos quoslibet characteres simul addas, qui numerum nouenario majorem, atque adeo duabus figuris scribendum (hunc enim duabus figuris constare necesse est, si, vt ponitur, est nouenario maior) generent: duæ illæ figuræ simul additæ producunt excessum, quo factus numerus nouenarium superat. Ecce. Addis duas figuras 6 & 7: fit numerus 13 nouenario maior: cuius excessus supra nouenarium alius non est, quàm numerus 4, qui ex additione duarum figurarum 1 & 3, quibus numerus 13 constat, generatur. Ita etiam duæ figuræ 7 & 8 additæ producunt 15: cuius numeri figuræ 1 & 5 additæ exhibent 6 excessum numeri 15 supra 9. Quod non tantum verum est, cum duæ figuræ numerum efficiunt nouenario vnico maiorem, quales sunt numeri inter 9 & 18 interiecti: sed etiam cum nouenarij multiplices superant. Vt numerus 43 excedit 36, qui multiplex est nouenarij proximè minor quàm 43, numero 7: quem duæ figuræ 4 & 3 simul

additæ

additæ conflant. Quod si numerus quispiam duabus figuris constet huiusmodi, vt simul additæ numerum generent nouenario maiorem: nihilominùs tamen excessum produnt, quo numerus ille aliquem nouenarij multiplicem superat, licet non proximè minorem. Vt numerus 75; cuius figuræ duæ 7 & 5 additæ efficiunt 12, superat 63 multiplicem nouenarij, numero 12: cuius numeri 12 si duæ figuræ 1 & 2 rursùs addantur, vt fiat 3: erit hic numerus 3 excessus, quo idem numerus 75 superat proximè minorẽ nouenarij multiplicẽ 72. Addo insuper non tantũ numerum duobus characteribus designatum quempiam nouenarij multiplicem superare excessu: qui ex duabus figuris numerum exprimentibus simul additis exhibetur; Verùm etiam idem omnino contingere in numeris, qui pluribus figuris exprimuntur. Ecce. Numerus 325 tribus figuris exprimitur: quæ simul additæ tanquam simplices, efficiunt 10. Hic est excessus numeri 325 supra nouenarij multiplicem quempiam. Quod si rursùs duæ figuræ 1 & 0 huius excessûs 10 simul addantur, vt fiat 1, erit 1 excessus numeri 325 supra nouenarij multiplicem proximè minorem. Atque ita de cæteris: ita vt in superiori exemplo numerus R 38919 superet nouenarij multiplicem proximè minorem, numero E 3: in quem tandem resoluti sunt numeri ex singulis figuris numeri R, tanquam simplicis significationis geniti. Quæ nouenarij miracula, cum non nisi iucundâ contemplatione possint demonstrari; hîc declaranda est, allata, vnde ea colligantur, Lemmaticâ propositione huiusmodi.

Prop. XIX. *Lemma.*

Si ex quouis numero detrahatur nouenarius quoties fieri potest; idem numerus relinquetur, qui relinquitur eodem nouenario detracto ex eiusdem numeri figuris tanquam simplicis significationis, siue, velut essent digiti sumptis.

Expositio.

Huius Propositionis sensus, planus ex proximè dictis euadit quidem; paulò tamen distinctiùs hîc eundem expono. Sit itaque numerus A 532 exempli loco. Dico igitur nouenario detracto ex hoc numero, quo Quingentæ triginta duæ vnitates exprimuntur, eandem reliquam fore notam arithmeticam: quæ relinquitur detracto nouenario, ex numero B collecto ex additione trium figurarum 5, 3, 2 tanquam simplicium digitorum, siue nullâ gradûs inter eas habitâ ratione, vnde valor numeri æstimatur.

A 5 3 2.	B 10
C 1	C 1

Vtrobique enim facta nouenarij subtractione reliqua fit. Nota C. I.

Demonstratio.

Euidens est Articulum minimum 10 (hic enim proximè maior est quolibet digito) componi ex Nouenario & vnitate adde enim duas figuras 9 & 1, fit Articulus 10. Nec minùs euidens est Articulos reliquos 20, 30, 40, & cæteros vsque ad Articulum 90, qui maximus est omnium duabus figuris constantium: sequitur enim proximè Articulus 100, qui tribus figuris constat; componi ex tot Articulis Articulo 10 æqualibus: quot continet vnitates figura significatiuæ figuræ O præfixa. Ita Articulus 20. continet Articulum 10, bis; 30 continet ter 10., & sic de cæteris. Nam Articulus 20. oritur ex 10 & 10. additis, hoc est, duplus est numeri 10; cuius triplus est Articulus 30 propter eandem rationem: 40 autem Quadruplus &c. ita vt figuræ 2, 3, 4, &c. præfixæ figuris o demonstrent quotuplex sit quilibet Articulus 20, 30, 40, &c. Articuli 10. siue duarum simul figurarum 9 & 1, ex quibus Articulus 10 componitur: siquidem Quotuplex est totus numerus totius numeri, totuplex est idem numerus, numeri eiusdem partium simul sumptarum. Ergo Articulus 20 duplex est figuræ 9, & simul figuræ 1 Articulus autem 30 earumdem figurarum 9 & 1 erit triplex; 40, Quadruplex &c. Ergo dempta toties figura 9 ex quolibet Articulo; eius generis duarum figurarum; quot vnitates figura Articuli significatiua continet: tot vnitates, siue tot figuræ 1 ex eodem Articulo reliquæ fient, quot vnitates continet eadem illa figura figuræ o præfixa eiusdem Articuli, hoc est, remanebit illa ipsa figura Articuli. Ita ex Articulo 70, verbi gratia, demptâ figurâ 9 septies: remanent vnitates septem, hoc est, figura 7 eiusdem Articuli figuræ o præfixa. Certum autem est: quod si ex Articulo, qui minor sit Articulo 90, dematur 9 toties, quoties fieri potest; toties demi, quot vnitates continet figura Articulum constituens. Nam Articulus quilibet toties continet 10 hoc est 9 & 1 quoties eius figura significatiua continet vnitatem. At eius figura significatiua minor ponitur quam 9 Ergo dempto Nouenario toties ex Articulo, qui minor sit Articulo 90; quot vnitates eius figura continet, ampliùs demi non potest: nam remanet tantùm ipsa figura significatiua, vt ostensum est; quæ minor est quam 9 ex suppositione, quod Articulus minor sit Articulo 90. Quod si fuerit 90, dempta ex eo figura 9 quoties fieri potest nihil, vt patet, remanet.

Quæ omnia circa Articulos minores quàm 100; hoc est figuris tantùm duabus constantes tradita; non secùs se habent in Articulis, qui tres figuras continent vnam scilicet significatiuam, quam sequatur zero duplex. Nam si ad 90, quo ex Articulo demptâ figurâ 9, nihil reliquum fit, addatur 10, vt fiat 100, hoc est, addatur figura 9 & figura 1: clarum est ex eo articulo 100 remanere eius figuram 1 significatiuam post subtractionem figuræ

guræ 9 quoties fieri poteſt. Cum enim ad Articulum 90, ex quo ſubducto nouenario quantùm fieri poteſt, nihil ſupereſt: addatur 9 & 1, vt fiat 100; reliquam fieri figuram 1 neceſſe eſt; ſi ex eo dematur figura 9 quantùm fieri poteſt. Ergo ſi eadem figura 9 dematur ex 100 bis, hoc eſt, ex 200 remanebit figura 1 bis, hoc eſt, figura 2 præfixa duplici zero, vt fiat Articulus 200. Idem in cæteris Articulis maioribus contingit vſque ad maximum trium figurarum Articulum 900: qui detracto Nouenario exhauritur. Ad quem Articulum 900 exhauſtum, ſi addatur 100 vt fiat Articulus 1000 quatuor figurarum: haud dubium, quin detracto ex eo Nouenario, reliqua fiat figura 1; quæ ſuperfuerat priùs, eodem nouenario ex 100 ſubducto: ſolus enim numerus 100 additus eſt ad exhauſtum numerum 900 vt fieret Articulus 1000. Quæ ratiocinatio, cum locum habeat in omnibus Articulis, qui præfixâ figurâ ſignificatiuâ figuris quotcunque o conſtant: concludi certò debet Articulum quemlibet vnâ aliqua ex figuris nouem ſignificatiuis, & quotcunque ei adſcriptis zero conſtantem poſt ſubductam, quantùm fieri poteſt, ex eo figuram 9: tot adhuc habere reliquas vnitates; quot ipſa figura ſignificatiua deſignat, hoc eſt, illa ipſa figura reliqua ſupereſt. Hinc fit, ſi numerus in Exemplum adductus 532, & alius quilibet, in Articulos ſuos 500 & 30 & in Digitum 2; quibus conſtat, reſoluatur: & ex Articulis ſingulis 500. & 30 dematur Nouenarius; quoties fieri poteſt, figuras eorum ſignificatiuas 5 & 3 tanquam ſimplices digitos ſupereſſe. Tres igitur figuræ numeri 532 ſigillatim ſumptæ, & tanquam ſimplices digiti; ſi ſimul addantur; vt fiat numerus 10: ex quo, quia numerum 9 excedit, dematur ſemel adhuc idem numerus 9: relinquetur figura 1, illa ipſa; quæ reliqua ſupereſſet, ſi ex numero 532 ſubduceretur Nouenarius quoties fieri poſſet. Quod erat demonſtrandum.

His ita demonſtratis, cum aliunde velut per ſe notum ſit, totum quemuis numerum tot Nouenarios, tótque inſuper vnitates continere; quot nouenarios, & quot inſuper vnitates continent eiuſdem totius numeri partes ſimul ſumptæ. Hinc euidenter ſequitur Additionem illam vitio carere; in qua collectus ex partialibus numeris totus numerus reperietur tot nouenarios continere; quot partiales numeri continent; & vtrinque præterea ſuperſit æqualis vnitatum (ſi quæ ſuperſint) multitudo. Duo ergo cognoſcenda forent ad Additionis Examen per Nouenarij abiectionem inſtitutum. Vnum eſt; Nouenarium toties abiici ex partibus, quoties ex toto numero per earundem partium Additionem collecto abiicitur. Alterum: eandem figuram poſt Nouenarij abiectionem vtrinque factam, ſiue ea fuerit zero, ſiue ſignificatiua, ſupereſſe.

Iam verò obſeruandum eſt, dum examen huiuſmodi non ſolùm Additionis, ſed etiam ſequentium operationum, (ad eas enim, vt ſuperiùs memini, etiam ſpectat) adhibetur: certò quidem cognoſci figuram illam, quæ, abiecto Nouenario tam ex partibus, quàm ex toto, reliqua ſuper-

eſt: id enim paulò antè eſt demonſtratum: atque adeo æqualiſne ſit an inæqualis. Verum non perinde cognoſcitur an nouenarius ex partibus toties abiectus ſit, quoties ex toto, vt patet ex illius abiectionis methodo: ita enim abiicitur nouenarius, vt abiectionis tantùm, non item abiectionum factarum multitudinis ratio habeatur. Vt in allato Paradigmate. 532, nota quidē ſit reliqua figura 1 poſt abſolutam ſubductionē nouenarij, quoties fieri poteſt: at quoties ſubductio illa fiat non attēditur, nec aduertitur quoties numeri 500, 30, 2, hoc numero 532 expreſſi cōplectantur 9: ſed tantūj ex numero 500, ſi ex eo abiiciatur 9 quoties fieri poteſt, ſupereſſe figurā 5, ex 30 ſupereſſe 3; ex toto numero 532 ſupereſſe 1, tacitā & minimè quæſitā abiectionum multitudine. Quod cum ita ſit, in dubium nec omninò immeritò vocatur hoc nouenarij examen: fieri enim poteſt, vt poſt abſolutam nouenarij detractionem tam ex partibus, quàm ex toto ex ipſis collecto ſuperſit eadem figura, nec tamen partes illæ toti ſint æquales. Quod contingeret: ſi vel ad totum, vel ad partes adderentur zero quotlibet: item ſi ad alterutrum apponerentur quotlibet figuræ 9, vel certè duæ figuræ quæ ſimul figuræ 9 eſſent æquales: cuiuſmodi ſunt 3 & 6, 4 & 5 &c. in iis caſibus omnibus, factis vtrimque abiectionibus nouenarij, eadem figura, reliqua futura eſt: & tamen additio vitioſa erit, cum inæquales ſint partes, toti ex illis collecto: tunc præſertim, cum vel 0 vel 9 aliquam claſſem à primis remotiorem maioríſque valoris occupabunt. Hac de cauſa non æquè omnibus probatur examen hoc nouenarij.

Verùm eſto vitioſum ſpeculatiuè eſſe poſſit: vix tamen, niſi de induſtria, & vitio per artem quæſito, vitioſum practicè erit aliquando. Quis enim, niſi ſciens & volens, nouenario integro; vel duabus figuris nouenario æqualibus præcisè aberraturus eſt? deinde ea ſaltem examinis pars certiſſima eſt: cum ſcilicet figuræ reliquæ poſt ademptum nouenarium ex partibus & ex toto, inæquales extiterint. Hæc enim figurarum illarum inæqualitas: errorem inter addendum alicubi commiſſum arguit: eſto earundem æqualitas non ſtatim arguat, nullibi commiſſum propter allatas paulò antè rationes. Quæ, quia, vt dixi, locum tantum habent: cùm quis de induſtria errorem in operationem inducit, quod nequaquam errori, ſed perfectæ cognitioni verti debet: ideo vſurpari tutò poſſe cenſeo, vt hactenus à peritiſſimis quibuſque vſurpatum declarant eorum opera ob miram eius cum breuitate coniunctam facilitatem.

Corollarium.

Ex eadem Propoſitione antecedenti illud etiam planum fit; quod primâ ſpecie tam reconditum iure videbatur, nimirum, duas quaſlibet figuras, quibus numerus quiſpiam conſtet, ſi ſimul addantur, exceſſum exhibere

bere; quo numerus ille ſuperat nouenarium. Vt ſi numeri 15, duæ figuræ 1 & 5, ſimul addantur: generatur numerus 6, quo 15 ſuperat 9. Nam articuli 10 exceſſus ſupra 9, eſt ipſa articuli 10 præfixa figura 1, vt oſtenſum eſt: cui ſi addatur altera eiuſdem numeri 15, figura 5; fit 6: qui numerus vt probatum eſt, relinquitur ſubducto nouenario, quoties fieri poteſt, à numero 15. Eadem enim eſt ratio numerorum pluribus, & duabus tantùm figuris conſtantium. Illud tamen diſcrimen intereſt, quod in quibuſdam numeris duarum figurarum ipsâ primâ earum figurarum additione habeatur exceſſus eorum ſupra nouenarium: cum ſcilicet ex additione conflatur numerus nouenario minor; aut etiam nouenario æqualis: in aliis verò aliæ præterea ineundæ ſunt nouenarij abiectiones antequam ad vltimam, quæ figuram nouenario non maiorem reliquam faciat, deueniatur. Vt ſi proponatur numerus 78. eius figuris 7 & 8 additis fit 15; huius autem figuris 1 & 5 rursùs additis fit 6, nouenario minor; in quo ſiſtendum eſt. Vt iucunda planè, ac expedita ſit nouenarij ſubductio à quouis numero, nullâ ſubductionis nouenarij ſed tantùm additionis mentione factâ. Vt ſi à numero 58764 ſubduci debeat nouenarius, vt reliqua figura nouenario minor ad examen aliquod neceſſaria, obtineatur: ita addendo operari licebit. Adde 5 & 8, fit 13; hoc eſt, per proximè tradita, 4; eò quòd duæ figuræ 1 & 3 ſimul conflent 4. Adde ergo 4 ad ſequentem figuram 7, fit 11, ſiue 2: Adde 2 ad figuram proximam 6, fit 8 minor nouenario. Adde ergo denique 8 ad figuram 4 vltimam, fiet 12, ſiue 3, additis eius figuris 1 & 2. Habes igitur figuram illam 3 ad examen numeri 58764 neceſſariam nullâ nouenarij factâ mentione, nec vllâ adhibitâ eius ſubductione; ſed tantùm figurarum additione.

Prop. XX. *Probl.*

Plures numeros in vnum aliter colligere.

Conſtructio.

A	7 4 3 9
B	5 8 3 7
C	7 8 2
D	1 2 9 4 8
F	1 1 1
E	1 4 0 5 8

Alia quædam numeros plures addendi ratio reperitur; quæ etſi expeditior præcedente non videatur: iucunda tamen eſt; quæque numeros in omnem ſenſum verſandi viam aperiat, quam paucis expono Proponantur addendi numeri A, B, C. Hi in primis inter ſe componantur ſeruato claſſium ordine, vt in præcedenti methodo imperatum eſt, & in hoc ſchemate obſeruatum cernis. Tùm non à primâ claſſe vt ante, ſed à poſtrema additionem ordire. Adde ſcilicet figuras duas 7 & 5: fiet 12: quem totum numerum ſub linea ſcribes ad D; ſed ita, vt poſterior figura 2 directè in claſſe

claſſe reponatur additarum figurarum, prior vero 1 in vlteriorem ad læuam, vt par eſt cum decadica ſit ad poſteriorem 2 comparata, promoueatur. Deinde adde proximam claſſem tribus figuris 4, 8, 7 conſtantem: ex quarum additione fit 19: ſubſcribe in eadem claſſe characterem 9, alterum autem in vlteriori ſub figura 2 prius poſita. Perge ad præcedentem claſſem; ex cuius figuris 3, 3, 8 additis gignitur 14. Quas figuras ſuum in locum repones, vt proximè factum eſt: Idemque fieri debet additis primæ claſſis figuris 9, 7, 2: quæ efficiunt 18. His peractis, vt abſoluatur additio, addi debent more ſolito duo numeri D 12948, & F 111 provt diſpoſiti ſunt per præcedentem operationem. Habebitur ergo numerus E 14058 æqualis tribus datis numeris A, B, C. Nec obſcura eſt huius methodi ratio. Conflatus enim ex ſingulis claſſibus numerus in debitas claſſes reponitur non ſecùs ac in præcedenti methodo. Et verò ſi in ea figura, quæ mente interdum ſeruantur, ſuis in claſſibus collocentur: iidem ſubſcripti numeri haberentur, licet non eodem ordine. Vt refert hîc appoſitum ſchema. In quo ex prima claſſe 9, 7, 2 additâ genitus eſt numerus 18; eiuſque figuræ in ſuum locum repoſitæ. Ex ſecunda claſſe 3, 3, 8 fit 14 qui ad longum ſcribitur nullâ figurâ mente ſeruatâ. Idem in cæteris claſſibus præſtatur; vt tandem habeantur duo numeri D & F: qui demùm additi exhibent numerum E, tribus A, B, C æqualem.

A	7	4	3	9	
B	5	8	3	7	
C		7	8	2	
D	1	1	1	8	
F	1	2	9	4	
E	1	4	0	5	8

Prop. XXI. *Probl.*

Numeros plures materiali aliquâ denominatione affectos in vnicum per additionem cogere.

Expoſitio.

Occurrunt non rarò additiones inſtituendæ numerorum qui abſoluti non ſunt; ſed ſecum adiunctam habent aliquam denominationem: cuius ratio inter addendũ debet haberi; quod propterea additionis genus à Logiſtæ inſtitutore prætermitti non debet. Variæ autẽ ſunt huiuſmodi denominationes. Aliæ enim à Geometricis menſuris; aliæ à ponderibus aliæ à monetis: aliæ à temporibus petuntur &c. eorúmque generum variæ apud varias nationes ſtatuuntur diſtinctiones. Vnum aut alterum, omnium inſtar, exemplum adducam; ex quo conſtet, quid in ſimilibus præſtare conueniat: illúdque ex Geometricis menſuris petam; quæ eædem apud omnes, communes ſunt. Hæ ſunt milliaria, ſtadia, paſſus, pedes, palmi, digiti Grana: quarum omnium proportiones hæc Tabella exhibet. Nam ſi ad læuam in ſerie

A

	A	Stad.	Paſ.	Ped.	Pal.	Dig.	Gran. B
Milliare	1—	8.	1000.	5000	20000.	80000	320000
Stadium	1 —	—	125.	625.	2500.	10000.	40000.
Paſſus	1 —	—	—	5.	20.	80.	320
Pes	1 —	—	—	—	4.	16.	64.
Palmus	1 —	—	—	—	—	4.	16.
Digitus	1 —	—	—	—	—	—	4.
Granum	1 —	—	—	—	—	—	1.
	C						D

C menſurarum, menſuram deſignes quamlibet: à quâ ad dextram pergas in eadem ſerie; occurret in communi concurſu eius ſeriei deſcendentis quoties deſignata ad læuam menſura menſuras ſingulas minores contineat. Exempli gratiâ milliare (quod eſt maxima harum omnium menſurarum) continet ſtadia 8. Paſſus 1000. Pedes 5000. Palmos 20000 &c. Similiter, ſtadium continet Paſſus Geometricos 125. Pedes 625. &c. Idem in reliquis menſuris contingit. Rursùs ex eadem tabella diſces: quoties menſura maior, proximè minorem contineat: id enim notum fiet: ſi in ſerie A C ſumatur quæuis menſura, à qua ad dextram pergas vſque ad primò occurrentem numerum ſiue numerum ordinis Diagonalis AD: cuius nomen ad caput tabellæ habetur. Atque ita milliare comperitur ſtadia 8 continere. Stadium Paſſus Geometricos 125. Paſſus Geometricus, Pedes 5. Pes, Palmos 4 Palmus Digitos 4 Digitus, Grana 4. Atque ita habet huius menſurarum Geometricarum Tabellæ conſtructio: in cuius formam alias quaſlibet quando res exiget, parare tibi poſſis.

Præcognitis igitur, vel ex hac Tabella, vel aliunde, variarum menſurarum rationibus, proponantur menſuræ addendæ, quas hoc ſchema refert, A, B, C.

	Milliaria	Stadia	Paſſus	Pedes	Palmi	Digiti
A	1254	6	104	4	3	2
B	522	4	93	0	2	3
C	24	0	7	3	3	0
D	1801	10	204	7	8	5
E	1801	3	80	4	[illegible]	1

fert, A, B, C. In quo apta obſeruatur numerorum diſpoſitio ad additionem. Quæ in duobus tota conſiſtit. Primum eſt, vt claſſium ordo ſemper obſeruetur, vt in ſimplici additione præceptum eſt: ſecundum. Vt men-

ſuræ eiuſdem denominationis ſiue eiuſdem ſpeciei ſuo ſub titulo in eadem ſerie deſignentur. Vt milliaria cum milliariis; Paſſus cum paſſibus &c. collocentur: iſque in ea collocatione ordo ſeruetur. Vt quò maiores ſunt menſurarum ſpecies, eò priores ad læuam ſedes occupent. Vt hic; milliaria, vt cæterarum menſurarum maximæ; primùm locum ſibi vendicant: ſtadia ſecundum: Paſſus, tertium &c. Quod ſi numerus quiſpiam menſura alicuius ſpeciei careat: debet eius locus figurâ O repleri, vt errandi periculum declinetur cautiùs, ſeruatis ordinibus continuis. Ita vides in numero B deſiderari Pedum menſuram: & in numero C, nec ſtadia, nec digitos reperiri; ſed eorum vices ſuppleri appoſitis figuris O. his ita paratis Additio inſtituetur, duobus quaſi diuerſis modis. Primus ita habet. Adde numeros omnes ad eandem menſuræ ſpeciem pertinentes, productis ſingulis ſuo ſub titulo lineæ ſubſcriptis, vt refert numerus D. Hæc autem ita inſtituta additio à quauis ſpecie poteſt inchoari: ſingulæ enim ſpecies ſingulos ex additione profectos numeros ſuos complectuntur. Quia tamen ex additione plurium numerorum inferioris ſpeciei, ſiue minoris valoris gigni ſolet numerus tot vnitatum; vt maioris valoris aut vni, aut pluribus menſuris æquiualeat: ideo tunc ad maiorem menſuram reductio fieri debet: nunquam enim inferioris valoris numerus, vt aptè huiuſmodi numeri denominati proponantur, maior eſſe debet numero; qui indicat quoties ſpecies maior continet minorem. Itaque in ſuperiori additione reducentur omnes numeri quos productus D continet, ad debitas maiores ſpecies ducto à minimâ ſiue vltimâ, quæ ad digitos pertinet, initio. Cum igitur numerus digitorum 5 excedat numerum 4; quot ſcilicet digitos menſura proximè maior Palmus continet; ideo dempto 4 à numero 5, & reliquâ figurâ 1 ſubſcriptâ, augere debeo Palmorum numerum 8 vnitate, cui æquales ſunt illi 4 digiti: vt fiat Palmorum numerus 9. Qui & ipſe ſuperat numerum & quidem duplicatum 4; quot ſcilicet Pes vnus palmos continet. Demptis igitur palmis 8 ex 9, Palmum vnum qui reliquus fit, ſubſcribo: augeo verò Pedum numerum 7 binario palmis 8 æquiualente; vt fiat Pedum numerus 9. Quia verò Paſſus Pedibus 5 tantùm conſtat: ideo dempto 5 ex Pedum

	Milliaria	Stadia	Paſſus	Pedes	Palmi	Digiti
A	1254	6	104	4	3	2
B	522	4	93	0	2	3
C	24	0	7	3	3	0
D	1800	10	204	7	8	5
E	1801	3	80	4	1	1

Pedum numero 9, reliquum 4 Pedibus ſubſcribo, & vnitatem ad Paſſuum numerũ 204 addo, vt fiat 205 maior numero 125, quot Paſſus ſtadium vnum continet. Quare è paſſibus 205, demo 125 reliquo 80 Paſſibus ſubſcripto, eorúmque paſſuum 125 loco ad ſtadia 10 addo ſtadium vnum fiúntque ſtadia 11, ſed ſtadia 8 milliare conficiunt. Ergo à ſtadiis 11, demo 8, reliqua 3 ſubſcribo: ac demùm milliariorũ numerũ 1800 augeo vnitate, vt fiat 1801. Quibus omnibus abſolutis reductionibus habebitur numerus E æquiualens numero D ex additione genito; ſed, vt ſolet, ac debet, expreſſus. Qui quidem numerus E primo loco haberetur ſi inter addendum fiat ipſa reductio. Atque hic eſt ſecundus addendi modus: quem quaſi à priore diuerſum dixi ſuperiùs.

Si enim initio facto à minimi valoris ſpecie toties vnitatem mente retineas ad ſpeciei proximè maioris numerũ addendam: quoties conflatus fuerit numerus minoris ſpeciei, in maioris vnitate contentæ, & reliquũ ſubſcribas. Conſequeris tandem numerum E ex additione productum, vt ex digitorum 2 & 3 additione, fit 5 ſubſcribo 1, mente retineo 1 loco digitorum 4. Tum addo palmos, vnum mente ſeruatum, & 3, 2, 3 hoc modo, 1 & 3 ſunt 4, id eſt Pes vnus mente iam ſeruandus, vel memoriæ causâ ſeponendus, vel punctulo alicubi deſignandus: tum pergo, addendo figuras duas 2 & 3 reliquas, quæ Pedem alterũ conficiunt: & inſuper vnitatem: quâ ſubſcriptâ, duos pedes mente ſeruatos Pedibus 4 & 3 annumero. Eodem modo ad reliqua membrà fiet progreſſus vt fuſiori expoſitione non ſit opus.

Examen.

Si iuxta priorem addendi methodum inſtituatur additio: ita vt ſinguli numeri eadem denominatione affecti colligantur abſque reductione; vt in Paradigmate habentur ad ſeriem D: non aliter inibitur examen, quàm in ſimplici additione; ſi ad ſingula membra adhibeatur; fit enim eo modo ſimplex additio ſæpius repetita. At ſi inter addendum reductio interueniat aliqua minoris ſpeciei ad maiorem; quia ita numeri membrorum confunduntur; aliter inſtituendum erit examen illud. Quod cui fundamento nitatur, cum non ſatis pateat, non debet hîc omitti eius expoſitio. Accipe igitur primo eius praxim: cui ſubiungam eius demonſtrationem.

Repetito ſchemate ſuperiore, in quo additi ſunt tres numeri A, B, C; ex quibus collectus eſt numerus E; ita per abiectionem nouenarij examinabitur additio. Initio facto à numeris maximæ denominationis, vt hîc à milliaribus, abiici debet nouenarius tam à numeris additis, quam à numero producto E, eorúmque membris: Sed ita, vt ſi qua figura reliqua ſuperſit, ea multiplicetur per figuram; quæ indicat quoties ſpecies illa maior, à qua nouenarius abiicitur, proximè ſequentem excedat (ſi tamen exceſſus ille figurâ vnica exprimatur) vel per figuram, quæ ſupereſt,

dem pro nouenario à numero, qui excessum exprimit: productus vero illi ipsi sequenti speciei minoris addatur tãquam ad eam pertineat. Si enim post omnia hoc modo percursa membra, eadem figura tam in additis numeris, quàm in producto supersit; additionem rectè absolutam, non secus ac in simplicibus numeris contingit, testatur. Rem in Paradigmate nostro declaro.

Abiecto nouenario ex milliaribus additis, nihil superest, abiecto verò è stadiis 6 & 4, superest 1. quæ figura multiplicanda est per 8, vt proximè traditum monitum exigit; nam stadium Passus continet 125: à quo si nouenarius more solito abiiciatur, remanet 8: atque ita per hanc figuram multiplicanda est ea, quæ in stadiis superest, vt hic, figura 1, vt ad passus fiat progressus Multiplicatâ igitur figurâ 1 per 8 producitur 8, Passibus 104, 93, 7 annumeranda, vt nouenarius tam ex ea, quam ex passibus simul abiiciatur. Hac autem abiectione peractâ superest figura 5. Quæ, quia Passus Pedibus 5 constat, multiplicabitur per hunc Pedum in Passu vno contentorum numerum 5, & productus 25 iungetur cum Pedum additorum numeris 4 & 3; vt nouenarius abiiciatur ex tribus numeris 25, 4, 3 tanquam simplicibus notis more solito. Qua abiectione factâ, relinquitur figura 5: quæ ad numeros 3, 2, 3 Palmorum adiungetur; si per 4 (tot enim palmos pes quilibet continet) multiplicetur, vt fiat numerus 20. Si ergo à numeris 20, 3, 2, 3 subducatur nouenarius, superest figura 1. Quæ per 4 multiplicari debet, eò quod Palmus digitis 4 constet; ex ea autem multiplicatione habetur figura 4; ex qua & simul ex 2 & 3 ad digitos pertinentibus dempto nouenario nihil remanet. Nihil ergo remanere debet (si additio rectè instituta est) si ex numero E eodem modo, & ordine nouenarius reiiciatur. Quam abiectionem, vt tota hæc operatio mansuescat abs re non fuerit percurrere.

Reiecto igitur nouenario ex milliaribus 1801, superest 1 ducatur per 8, quot scilicet stadia milliare continet, fiet 8, stadiis 3 iungenda. Ex quibus duabus figuris 8 & 3 dempto nouenario superest 2. Hæc figura multiplicari debet per 8, vt declaratum est, dum additorum numerorum subtractio institueretur: fiet ergo 16 numero Passuum 80 adiungendus. Ex his autem duobus numeris 16 & 80 dempto nouenario restat 6. Quæ figura per 5 multiplicata (qui Passus Pedes 5 continet) producit 30: ex quo numero, & simul ex 4 ad Pedes pertinente, si dematur nouenarius, superest figura 7. Vtique multiplicanda per 4, vt productus 28 ad palmos, ad quos pertinet figura 1, adiungatur: dempto ergo ex 28, & 1, nouenario, superest figura 2 multiplicanda per 4, vt fiat 8. Ex qua tandem & simul ex digitorum figura 1 detracto nouenario, nihil superest. Quod necessarium esse monui, vt facta additio omni erroris suspicione liberaretur. In hanc igitur formam numeros quauis denominatione affectos addere licebit; & additionis

tionis examen inire: cuius nunc adducenda est demonstratio, quæ Lemmati nititur huiusmodi.

Prop. XXII. *Lemma.*

Si numerus quilibet per alium multiplicetur, & ex producto nouenarius quoties fieri potest subducatur: eadem figura supererit; quæ superfuisset: si ex numeris multiplicatis tanquam simplicibus subducto nouenario reliquæ figuræ inter se multiplicarentur; & ex producto nouenarius subduceretur.

Expositio.

Duo numeri A 12 & B 14 in se ducti produxerint C 168. Ex quo numero subducatur nouenarius quoties fieri potest: subducatur, inquam, ex eo valorem suum retinente; non autem tantùm ex eius figùris tanquam simplicibus (quamquam idem numerus reliquus futurus sit vtrâuis subtractione inita iuxta Prop. 19.) & supersit figura D 6 post eam subductionem. Dico eandem figuram D super-futuram: si ex numeris singulis A & B reiiciatur nouenarius, & reliquæ figuræ E 3, F, 5 in se ducantur, vt fiat numerus G 15; ex quo nouenarius reiiciatur more solito.

Demonstratio.

Si vterque numerus A & B in duas partes secetur, quarum prior sit vel 9 (vt hic in vtroque numero) vel multiplex eiusdem figuræ 9: posterior verò sit figura reliqua, vt hic, E & F. certum est partes illas quæ vel sunt 9. vel figuræ 9 multiplices, tam in se mutuo quàm in quemlibet numerum alium ductas numeros producere nouenarij multiplices: ac proinde ex eis subducto nouenario nihil superesse reliquum. Cum autem numerus C productus ex multiplicatione totius numeri A in totum numerum B, constet ex partialibus quatuor numeris, qui producuntur singulis partibus vnius in singulas partes alterius ductis, vt inferiùs, vbi de multiplicatione tractabitur, fusiùs exponetur; quales sunt hic numeri H, K, L, G; quorum primus H fit ex priore parte 9, numeri A, in priorem partem 9, numeri B. Secundus K ex eadem parte 9, eiusdem numeri A, in alteram partem 5, numeri B. Tertius ex posteriore parte 3 numeri A, in priorem partem 9 numeri B. Quartus denique G, ex partibus posterioribus 3 & 5 eorundem numerorum A & B Tres ergo priores numeri H, K, L, cum sint nouenarij multiplices, numerum conflant, si simul addantur, 153: qui per nouenarij subtractionem exhaurietur. Restat

A 12	B 14
C 168,	D 6
E 3, F 5. G 15	
H 81, K 45, L 27, G 15	

ergo ex toto numero C ſolus Quartus numerus G, ex partibus E & F in ſeductis genitus, ex quo nouenarij ſubductio fieri debeat. Quare eadem figura ſupererit: ſi à toto numero C ex multiplicatione totorum numerorum A & B producto reiiciatur nouenarius: quæ relinquitur ex numero G, qui producitur ex partibus E & F nouenario minoribus in ſe ductis. Quare. Si numerus quilibet &c. Quod erat probandum.

Corollarium.

Quo examen probatur additionis numerorum denominatorum

Exemplum propono claritatis causâ duorum tantùm membrorum: eadem ſiquidem eſt plurium ratio; cum duo tantùm ſibi proxima inter ſe comparentur. Sint nimirum ſtadia A 48, & Paſſus B 64 addenda, ad ſtadia C 7, & Paſſus D 130. Per ſimplicem additionem gignetur numeri E 55 ſtad.& F 194 Paſſ. ſeruatâ autem hîc traditâ methodo gignentur G 56 ſtadia, & H 69 Paſſ. tranſlati ſiquidem ſunt Paſſus 125 ex Paſſibus 194, ad ſtadia; relictique ſunt Paſſus 69; ad ſtadia verò A & C additum eſt ſtadium vnum paſſibus illis æquiualens: quod per additionem in productum G illapſum eſt. Dico igitur ſi nouenarius reiiciatur ex numeris A & C

Stadia	Paſſus
A 48	B 64
C 7	D 130
E 55	F 194
G 56	H 69

ſtadiorum, & relicta poſt hanc abiectionem figura 1 multiplicetur per 8 quæ figura remanet abiecto nouenario ex figuris numeri 125, paſsûs vni ſtadio æquiualentes exprimentis) productus autem 8 ad paſſus B & D apponatur: vt ex tribus numeris 8, 64: 130 reiiciatur nouenarius: relinqui figuram (ea eſt 4) eandem; quæ relinquitur reiecto nouenario è numero G additorum ſtadiorum, & relictâ figurâ 2 multiplicatâ per, 8; genitóque 16, ad numerum H 69 paſſuum appoſito: ac tandem ex figuris duorum numerorum 16 & 69 reiecto nouenario; ſi additio rectè peracta eſt. Quod oſtendo euidenter.

Ex paſſuum numero F 194, quia ſuperat numerum 125 vni ſtadio æquiualentem, ſubtrahitur ipſe numerus 125 & reliquus fit numerus H 69 ſi itaque nouenarius reiiciatur ex toto numero F 194, & ex eius partibus 125, H 96; eadem figura (ea eſt 5) reliqua fiet. Quia verò paſſus illi ex numero F detracti conuerſi ſunt in ſtadium vnum; quod ad numerum E 55 additum produxit G 56: ſi viciſſim ſtadium illud vnum conuertatur in paſſus 125 multiplicato numero, quo G ſuperat E (qui hic eſt vnitas) per 125; & productus apponatur ad H 69; vt ex duobus numeris 125 & 69 dematur nouenarius; haud dubium quin eadem figura reliqua fiat, quæ relinquebatur

relinquebatur reiecto nouenario ex numero F 194. At per Lemma proximè positum, perinde est in ordine ad reiectionem nouenarij siue multicetur numerus 125, siue numerus 8, qui oritur reiecto nouenario ex 125 per numerum (hoc est, hic per vnitatem) quo G superat E. Ergo reiecto nouenario ex duobus numeris 8, & H 69 eadem figura superest, quæ superfuerat eodem nouenario reiecto ex numero F 194: quæ eadem est cum figura relicta post reiectionem nouenarij ex duobus numeris additis B & D Vt fieret F. Iam verò quia eadem etiam relinquitur reiecto nouenario ex numeris A & C additis; & ex producto E: si relicta hæc figura multiplicetur per 8; & addatur productus tam ad figuram relictam ex B, D, quam ad eandem quæ relinquitur ex F, vel etiam ex 8 & H 69: æquales fient numeri; atque adeò ex eis reiecto nouenario æqualis vtrimque figura superfutura est. Quia demùm tradita praxis iubet, vt reiecto nouenario ex numero G, figura reliqua 2 mutiplicetur per 8; vt ex producto 16, simul & ex H 69 dematur nouenarius. Rectè iuberi constat ex eo, quod figura 8 multiplicans figuram reliquam ex numero E 55, reiecto nouenario, & simul excessum, quo G superat E; duos numeros producat, qui simul sunt æquales numero producto ex multiplicatione eiusdem figuræ 8 per figuram relictam ex numero G reiecto nouenario: hæc enim figura constat excessu numeri G supra numerum E, & figurâ relictâ ex E post subtractionem nouenarij ex eo, vt patet. Quare cum eadem figura, vt ostensum est, supersit; si nouenarius subducatur ex numeris tribus: quorum primus est productus ex figura reliqua abiecto nouenario ex E 55 multiplicata per 8, secundus est productus ex excessu numeri G supra E (qui alius non est quàm pars numeri F valoris minoris in numerum maioris conuersus) per eandem figuram 8 multiplicato: tertius denique est numerus H reliquus ex F, postquam eius quædam pars ad numerum E maioris valoris transiit, vt fieret G Cum, inquam, ex his tribus numeris (qui hic sunt 8, 8 & H 69) reiecto nouenario eadem figura supersit, quæ superest ex numero per figuram reliquam 1 reiecto nouenario ex A & C simul, ductam in 8, producto, & simul ex numeris B & D. Eadem autem figura ex tribus numeris illis 8, 8 & H 69 reliqua, abiecto nouenario, eadem sit cum figurâ, quæ relinquitur ex numero 16 per figuram 2 reliquam ex G 56, ductam in 8 genito; & simul ex numero H 69: eadem figura relinquetur ex illo ita genito numero 16 simul cum H 69: quæ superest ex numero 8 & numeris simul B & D; si tam ex his quàm ex illis reiiciatur nouenarius. Rectè igitur collectos esse constat numeros G 56, & H 69 per additionem numerorum A & C ad stadia pertinentium; & numerorum B & D pertinentium ad Passus: si figura iuxta traditam praxim inuestigata, æqualis vtrimque reperiatur. Quod autem hic de duobus tantùm assumptis membris stadiorum & Passuum, duobúsque tantùm numeris constantibus ostensum est idem de quocunque

cunque membris concludetur. Si nimitum id de duobus primis demonstretur: tum assumatur numerus ex primis duobus collectus; cum quo tertius compatetur: & sic, quotquot membra extiterint, deinceps pergatur. Quod paulò fusiùs, quod non paulò obscurius foret, hic oportuit explicari.

Prop. XXIII. *Definitio.*

Subtractio numeri à numero est inuestigatio discriminis, quod inter numeros illos intercedit.

Expositio.

Per se clara est hæc subtractionis definitio. Notandum tamen discrimen duorũ numerorum hic in genere non quæri: Quis enim, si modò quid numerus sit non ignoret, duorũ propositorũ numerorum æqualitatẽ aut inæqualitatem non obseruet? sed ipsam quæri discriminis quantitatem. Hæc enim quiuis in modicis numeris facilè perspiciatur; in magnis tamen ob magnam quæ mentem obruere solet, vnitatum multitudinem non ita obuia est; quin arte aliqua egeat, quâ certò & euidenter nosci queat. Notandum etiam non duorum tantùm numerorum discrimen inquiri posse; sed quotquot propositi fuerint: duorum tamen vnicâ mentis apprehensione cognosci posse: est enim hæc numerorum æqualitas aut inæqualitas, ens relatiuum inter duos, & non plures terminos: ita vt si plures fuerint termini, etsi vnicum fuerit fundamentum, plures resultent relationes. Itaque ad subtractionem hanc, de qua hic agendum est, duo tantùm numeri vnicâ operatione tractandi concurrunt. Denique obseruandum ab hac definitione non excludi numeros æquales: vnus enim numerus quò minùs ab alio subtrahatur nihil vetat: notúmque fiet eorum discrimen, quod nihil est, figuráque nihil O exprimendum. Verùm quis arte egeat vt numerum simplicem (si enim de Algebraicis agatur aliter sentiendum est) à numero simplici æquali subducatur, nullúmque discrimen agnoscat inter eos? Quare de solis inæqualibus duobus numeris futurus est hîc sermo.

Prop. XXIV. *Probl.*

Datis duobus numeris inæqualibus, minorem ex maiori subtrahere.

Expositio.

Duplex attendi potest duorum numerorum inæqualitas: alter altero maior dici potest vel absolutè cum scilicet maiorem vnitatum multitudinem complectitur, quibusvis tandem figuris arithmeticis exprimatur vterque:

que: vel etiam ratione figurarum, cum alter altero non tantùm ratione plurium vnitatum maior est, sed etiam eius figuræ figuris minoris eiusdem gradûs, sunt maiores. Vt si duo numeri 5463 & 4352 proponantur prior posteriore maior est: & quia plures vnitates continet; & quia eius figuræ maiores sunt figuris eiusdem gradus, Posterioris. Quo in sensu minor numerus ratione pauciorum suarum vnitatum, maior ratione figurarum maioris valoris non rarò dici posset. Sed hæc figurarum inæqualitas, quanquam, vt patebit, àliquam varietatem in subtrahendi modum inuehat; hic minimè attenditur. Sufficit enim inæqualitas absoluta ad hoc, vt minor numerus à maiore subducatur: eorúmque discrimen definiatur. Quod sequentium Præceptorum obseruatione præstabitur.

Constructio.

Qualibet in propria signetur classe figura
Tollatur minor à maiore. Relicta notetur.
Subdita si maior fuerit: pete dena priori
De classe: vnde notam demas. Reliquo adde figuram
Maioris: genitámque gradûs subscribe figuram
Eiusdem: nota at anterior multabitur vno.

Proponatur numerus A maior: à quo subtrahi debeat numerus minor B.

Præceptum primum. *Qualibet in propria signetur classe figura* Pertinet præceptum hoc ad aptam subtractioni ineundæ, numerorum collocationem: qualis futura est: si, quemadmodum in additione obseruari præceptum est; numerorum figuræ, eiusdem gradus, directè sibi respondeant; siue in eadem classe reponantur; ita vt ad dextram primus ordo à superiore ad inferiorem sit integer & completus, vt refert appositum schema.

A	5	4	6	3
B	4	3	5	2
C				

Præceptum secundum. *Tollatur minor à maiore, relicta notetur.* Maioris numeri figura respondens minoris numeri figuræ eiusdem gradus, potest esse maior figura minoris; potest etiam esse minor, vt paulo ante monui: Itaque præceptum hoc eum casum: in quo figura superior maior est figurâ inferiore subtrahendâ: proximè sequens casum alterum exponet.

A	5	4	6	3
B	4	2	3	2
C	1	2	3	1

Igitur sit numerus B subducendus à maiore, numero A: maiore, inquam, non tantùm ratione quantitatis totius numeri; sed etiam ratione figurarum singularum. Dispositis amborum numerorum figuris, vt iubet Præceptum primum: subtractionem ordire à prima classe, tollendo à superiore figura 3, inferiorem 2: figura verò 1 *relicta notetur* in eadē classe sub linea recta C numeri subscripta. Tum perge ad classem sequentem, & figuram 3 deme à superiore 6, notatâ, vt prius, reliqua figura 3. sub linea. Idem præsta in reliquis classibus, quotquot extiterint. Habebis tandem numerum C ex omnibus illis relictis figuris conflatum, qui per subtractionem quæritur. Id est, numerus C est excessus, quo numerus A numerum B superat: atque adeo duorum numerorum A & B discrimen.

Præceptum tertium *Subdita si maior fuerit, pete dena priori de classe*, &c. Hoc est, si figura numeri inferioris maior sit figura numeri superioris sibi respondente: tunc figura inferior à superiore sola subduci nequibit. Tunc ergo quid præstandum? Vt si proponatur numerus B minor, à numero A subducendus: non potest figura 9 à figura 5 superpositâ demi. Ergo tunc omissa subtractione illa impossibili figuræ 9 à 5. *Pete dena priore de classe.* Id est, à figura 4 classis proximè ad læuam sequentis, mutuam accipe vnitatem: quæ vnitas habitâ ratione classis prioris, non est simpliciter figura 1, sed numerus 10. Ab hoc ergo numero 10., qui maior semper erit quacumque figura subtrahenda; dematur inferior illa figura 9 iuxta illa verba. *Vnde notam demas.* Notam scilicet, siue figuram illam 9 deme à mutuato numero 10: qua subtractione factâ, reliqua superest figura 1. Hac ergo quid fiet? Accipe. *Reliquo adde figuram maioris.* Id est, huic figuræ 1 reliquæ per subtractionem figuræ 9 à numero mutuato 10, adde maioris numeri figuram 5, à qua fieri nequiuit subtractio figuræ 9: fiet ergo ex ea additione figura 6. Quæ lineolæ rectæ subscribenda erit in eadem classe, vt illis verbis præcipitur *Genitámque Gradûs subscribe figuram eiusdem.* Atque ita expedita est subtractio primæ illius figuræ minoris numeri. Quæ paulò aliter ab Aliquibus absoluitur, in hunc scilicet modum.

A	2345
B	1469
C	0876

Vnitas illa, quam à figura 4. mutuo accipi debere dixi, vt figura 9. inferior subtrahi posset, præfigitur vel præfixa concipitur figuræ 5, à qua subductio figuræ 9 iniri non poterat: ita vt fiat numerus 15: à quo tum demum subtrahitur figura 9, vt reliqua figura 6 subscribenda ad C obtineatur. Sed vteruis modus vsurpetur, in idem recidit operatio: siue enim à toto numero 15 subducatur 9; siue à numeri 15 parte 10, & reliquæ figuræ 1. addatur altera eiusdem numeri 15 pars 5, eundem numerum 6 reliquum generari necesse est. Videbitur tamen fortasse Tyronibus

traditus

traditus hîc superior modus expeditior. Vtrouis vtere ad arbitrium.

Præceptum quartum. ***Nota at anterior multabitur vno,*** Anterior scilicet nota 4 maioris numeri A, quæ proximè antecedit figuram 5: à qua mutuò accepta est vnitas: cuius valor est 10 ratione figuræ 5 mutuantis, ***multabitur vno.*** Id est, censebitur minui vnitate, & ex 4 fieri 3: nec immeritò mutuam enim dedit vnitatem, vt figuræ 5 præcedentis classis ad subtrahendum figuram 9, iusto minori succurreretur. Qua mutatione suppositâ, promouenda est subtractio, eadem planè methodo.

Subtrahi itaque debet numeri B figura 6 à figura 3 loco figuræ 4 substitutâ. Quia verò figura 6 maior, à figura 3 minore subduci nequit: hæc rursùs à figura 3 proximè antecedente exiget mutuam vnitatem: quæ & ipsa vnitas, non 1 simpliciter; sed 10 significat ratione mutuantis figuræ. Ergo ab hoc numero 10 subducetur figura 6, & reliquo 4 addetur figura 3, vt fiat figura 7 subscribenda in eadem classe ad numerum C. Illa verò numeri A superioris figura 3 mutatur in 2 ob traditam vnitatem: Ita vt figura 4 numeri B illi supposita non iam à 3 sed à 2 subducenda sit. Quod cum fieri nequeat: subducetur à numero 10 mutuato à figura antecedente 2 (quæ deinceps censebitur propterea esse 1) subducta autem figura 4 à numero 10, reliqua fit figura 6. cui si addatur 2, in quam mutata est 3; habebitur figura 8 ad C subscribenda: quæ eadem haberetur, si à numero 12, conflato ex numero 10 mutuato, & figura 2, à qua fit subtractio; subduceretur eadem figura 4.

Denique loco figuræ 2, numeri A substitui debet 1 propter mutuum ab ea acceptum. Deme igitur figuram 1 numeri B à figura, quæ illi superposita censetur, nempe 1: nihil remanet subscribendum ad C, nisi zero: quæ figura ad initium numeri posita, foret inutilis. Subducto itaque B ex A, assero remanere C 876. Quod ostendendum est.

Demonstratio Constructionis.

Repetatur Paradigma duplex inter construendum, allatum: primum, ad Præceptum secundum; secundum ad Præceptum tertium. Probandum itaque est numerum C traditâ methodo inuentum differentiam esse: quæ inter numeros A & B intercedit; siue esse excessum; quo maior numerus A minorem B superat. Quod ita colligo. Si ab omnibus vnitatibus numeri A maioris, demantur omnes vnitates numeri B minoris: reliquæ ex maiore numero A vnitates non possunt non esse excessus numeri A supra minorem B. Sed numerus traditâ methodo inuentus continet vnitates omnes, quæ demptis omnibus vnitatibus numeri B ex omnibus

A 5463	A 2345
B 4232	B 1469
C 1231	C 876

vnitatibus numeri A relinquuntur. Ergo numerus C est numerorum A & B differentia. Clara est maior: minor est probanda. Tunc omnes vnitates numeri B ab omnibus vnitatibus numeri A demi censendæ sunt: si

A 5463	A 2345
B 4232	B 1469
C 1231	C 876

vnitates, quas Digitus numeri B continet, quas secundus eius Gradus, quas tertius, quas reliqui gradus deinceps. Hoc est, vnitatum denarij centenarij &c. Complectuntur, demantur à Digito numeri A, ab eius denarijs, centenarijs &c. & reliquæ vnitates tam Digitales, quam denariorum centenariorum &c. reponuntur ad numerum C. Sed tradita methodo id præstatur. Ergo tradita methodo rectè inuenitur discrimen C numerorum A & B. Maior ex eo fit euidens, quod numerus quilibet componitur ex vnitatibus; quas eius prima classis siue Digitus, quas secunda denariorum, quas centenariorum tertia &c. continent; & in quas resolui potest, tanquam in varias particulas: quales prioris numeri A particulæ forent 5000, 400, 60, 3. Si igitur à particulis huiusmodi, in quas diuisus concipitur maior numerus A, subducantur particulæ numeri minoris B eiusdem denominationis, vt Digiti à Digitis; denarij à denariis &c. & reliqui digiti, reliqui denarij &c. subscribantur ad numerum C: numerus C continebit partiales excessus partium singularum numeri A supra partes singulas numeri B. Ergo etiam totus ex partibus suis conflatus numerus C continebit excessum numeri totius A ex partibus suis conflati, supra totum numerum B, partibus etiam suis omnibus constantem. Partes siquidem omnes simul sumptæ toti sunt æquales; nec variatur vnitatum multitudo, quam numerus quilibet continet, per vllam eius diuisionem. Minor verò quod traditâ methodo fiat huiusmodi partium, quibus constat minor numerus B, subductio ab omnibus partibus numeri maioris A; ex ipsis Præceptis ad hanc subductionem absoluendam statutis manifesta est, in exemplo præsertim priore in quo omnes figuræ maioris numeri A, maiores sunt figuris omnibus eiusdem classis numeri minoris B. Nec multo minus idem clarum est in secundo. Licet enim mutuatio illa vnitatis à figura præcedente adhibeatur: non tamen mutat multitudinem vnitatum illius classis à qua mutuum accipitur: Sed tantùm classis illa in duas partes diuiditur; quarum vna est 10 ratione habitâ figuræ mutuantis: altera verò sunt reliquæ vnitates figurâ reliquâ post mutuationem expressæ; quæ figura ad denarios pertinet ratione sequentis figuræ mutuantis, non secùs ac vnitas mutuo tradita, & à sua figura seiuncta; non simpliciter censetur 1, sed 10. Rectè igitur tradita methodo repertum est discrimen duos inter datos numeros. Quod præstandum erat.

Scholium

Scholium.

Occurrit non rarò, vt posita numeri subtrahendi figura maiore quàm sit ei respondens superior, mutua accipi nequeat vnitas à figura anteriore. Si enim anteriorem contingat esse zero, nulliúsque per se valoris; quomodo ex ea vnitatem, siue (vt declaratum est) decadem mutuabere? Vt ecce: proponitur numerus B à numero A subtrahendus. Ordinatis iuxta legem traditam numeris; subduci debet figura 7 numeri B à superiore minore 5. Ergo mutuanda est à figurâ O proximè antecedente vnitas; cuius valor foret 10, siue mutuanda est decas vna: sed figura O omni caret valore: Quem igitur alteri tribuat? In hoc itaque, aliísque similibus casibus ad figuram recurrendum erit; quæ prima valoris alicuius, siue significatiua, obuia fiet.

A	4 0 0 5
B	2 6 4 7
C	1 3 5 8

Vt hic, ad figuram 4 primam numeri A: à quâ mutua sumetur figura 1 non quidem in commodum immediatè figuræ 5, à qua subtractio fieri nequit: illa enim figura 1 ad figuram 5 comparata, non 10, sed 1000. significat: omnes siquidem vnitates, quibus constat figura 4, propter quartum eius gradum Millenariæ sunt: sed in commodum proximæ sequentis figuræ o, Tunc ergo figura illa o, figuræ 4 proxima post acceptam vnitatem mutuam, que illi præfigi censetur, mutabitur in 10. Rursus ergo ab hoc numero 10 vnitatem mutuabitur altera sequens figura o, vt & ipsa in 10 mutetur. Sed numerus ille 10 post mutuo datam vnitatem in figuram 9 conuertitur: quod opportet meminisse. Iam quia figura O figuræ 5 proxima conuersa est in 10: poterit mutuò sumi ab ea vnitas, cuius valor est 10. Tunc verò ab hoc numero 10 demetur figura 7; & reliqua figura 3 addetur ad figuram 5; vt habeatur 8; quæ subscribatur ad numerum C loco autem figuræ illius O, figuræ 5, proximæ substitui censeri debet figura 9 propter eandem rationem, ob quam priorem figuram O in 9 mutari diximus. Adeo vt demptâ vnitate ex figura 4, vt fiat 3. & Duplici figurâ O mutata in 9 reliquarum figurarum numeri B subtractio absoluenda sit. Quoties ergo numerus maior vnâ aut pluribus figuris O constabit: hæc regula perpetua obseruanda est. Mutua accipiatur necessaria ad subtractionem maioris figuræ inferioris vnitas (cuius valor est 10) à prima figura significatiua: quæ propterea vnitate multetur: omnes verò figuræ O in 9 mutari supponantur, eáque mutatione numeri superioris supposita, subtractio inferioris instituatur. Quæ tunc tantò facilius absoluetur; quòd nulla ampliùs mutuatio iniri debeat: maior enim figura numeri inferioris nulla esse potest, quàm figura 9: quæ in tali casu numeri superioris figuris substituta fuit.

Illud præterea hic obseruasse non fuerit inutile. Nimirum. Si figura numeri B inferioris, respondentem superiorem nanciscatur vnitatem. Vt in hoc Paradigmate contingit: in quo, demptâ figura 2 numeri B, relinquitur figura 3 subscribenda. Tum quia figura 4 à figura 2 subduci nequit; vnitas mutuo accipi debet à figura proximè antecedente: quæ cum sit ipsa vnitas, ipsa mutuò sumetur: eiúsque loco substituetur O: ita vt sequens numeri B figura 6, demenda sit à figura O: quod cum fieri nequeat, petetur mutua, vnitas à figura 4. Vt fieri subtractio possit more solito. Atque ita habebitur numerus C reliquus absolutâ subtractione totâ.

A	4125
B	2642
C	1483

PROP. XXV. *Problema.*

Absolutæ subtractionis examen inire.

Expositio & Constructio.

Hic non methodi subtrahendi numerum à numero, probatio instituitur: hæc enim iam allata est. Sed ipsius operationis peractæ; vt certior fiat Logista omnia traditæ methodi Præcepta à se obseruata fuisse, nullúmque propterea errorem inter subtrahendum à se commissum. Quanquam enim hæc operatio præ cæteris breuissima sit, & minimè implicata; cum tribus tantùm numeris constet; ea tamen est interdum humanæ mentis imbecillitas, & inaduertentia; vt in facillimis labatur: à quo periculo leui operâ sese potest liberare, cum præsertim alicuius momenti res agetur. Porro Examen illud non vno tantùm modo iniri potest. Paratissimum illud est: quod per Nouenariam abiectionem instituitur: cuius modum memoriæ causa complector his versiculis.

A maiore nouem, factóque, vnáque minore
Abiicito: nota par generari debet vtrimque.

Horum verborum sensum repetito Paradigmate superiori expono. Subductus est numerus B à numero A, & reliquus factus est C. Nosse itaque in animo est; an reliquus C, is verè sit qui relinqui debet. Ergo. *A maiore A, nouem abiicito* eo modo, qui in additione expositus fuit: ita scilicet vt omnes figuræ numeri A tanquam simplices, primíque gradûs censeantur: qua abiectione peractâ,

A	2345	
B	1469	5 / 5
C	876	

peractâ, figura reliqua (quæ hic est 5) seponatur. Tum *A facto vnáque minore abiicito nouem.* Abiice nimirum nouenarium à figuris numeri B minoris, siue subtrahendi; & *facti*, siue per subtractionem geniti C, tanquam ambo forent numerus vnicus: & reliquam figuram 5 sepone. Quæ cum eadem sit cum priore sepositâ: Argumentum euidens est rectè institutam esse subtractionem: siquidem *Nota par generari debet vtrimque.* Quod si duas illas sepositas figuras post nonenariam reiectionem reliquas, inæquales esse contingeret: haud dubium quin subtractio, vt vitiosa, repetenda foret. Ratio huius examinis clara est ex iis, quæ suprà in Additione demonstrata sunt. Duo enim numeri B & C, ille subtrahendus, hic post subtractionem à toto A reliquus, ipsi toti A sunt æquales: eò quod totus A per subtractionem distractus sit in duas partes: quarum vna est numerus B subtractus; altera est numerus C reliquus. Si enim reliquus hic C, est excessus; vt verè esse probatum est, numeri A supra numerum B: duos B & C simul additos, necesse est maiorem A generare. Quare si à numero A, ex Additione duorum B & C genito nouenarius abiiciatur, relictáque figura obseruetur: eadémque Nouenarij reiectio à duobus simul numeris B & C, quasi addendis instituatur: eadem debet figura relinqui; vitiosa alioqui subtractio censenda foret certissimè: quamquam eâdem cum certitudine, vt declaratum est superiùs, subtractionem vitio omni carere non liceat afferere; etsi duæ illæ reliquæ figuræ æquales repertæ fuerint: cuius differentiæ rationem, & minoris huius certitudinis periculum, aut nullum, aut de industria tantùm quæsitum ostendi: vt non nisi tutissimè, tum hìc, tùm illic adhiberi possit Examen huiusmodi ex Nouenaria reiectione petitum.

Examen aliud subtractionis.

Si minor addatur reliquo: maiórque creetur
A maiore minor rectè subductus habetur

A	2345
B	1469
C	876

Nam cum, vt proximè declaratum est, numerus B minor siue subtrahendus; & reliquus C per subtractionem, partes esse debeant totius numeri A, ipsi æquales: haud dubium quin simul additæ (si tamen rectè inuentus est reliquus C, rectè instituta subtractione) producant ipsum totum A.

Aliud

Aliud.

Si demas reliquum à maiore, minorque creetur
A maiore minor rectè ſubductus habetur.

Cum enim minor numerus B ſiue ſubtrahendus, & reliquus C, ſimul ſint partes duæ toti numero A æquales; ſi C reliquus rectè per ſubtractionem conſtitutus eſt; neceſſarium eſt, vt ſubductâ parte C ex numero A, relinquatur altera pars B; non ſecus ac relinqui neceſſe eſt partem C, dum B ab eodem A ſubducitur.

PROP. XXVI. *Probl.*

Aliâ quadam tàm nouâ quàm iucumdâ ratione numerum minorem à maiore ſubtrahere.

Conſtructio.

Proponantur duo numeri, A maior, & B minor: qui à maiore A ſubtrahi debeat. Hi, vt in præcedenti methodo traditum eſt, ad ſubtractionem ineundam comparentur: ita ſcilicet. vt minor B ſubſcribatur maiori A ſeruatâ graduum ſiue claſſium ratione. Tum hæc Præcepta obſeruentur.

Omnes eſſe nouem maioris pone figuras:
Dematúrque minor. Maiori iunge relictum.
Poſtremanque monas ſedem præfixa capeſſat.

Præceptum primum. *Omnes eſſe nouem, maioris pone pone figuras: dematúrque minor.* Id eſt, omnes figuræ numeri A, à quo ſubtrahi debet minor numerus B, conuerti intelligantur in figuram 9; ita vt nouus planè numerus E proponatur: vnde ſubtractio fieri debeat. Numeri B. Cuius quidem figura quælibet ſubtrahetut à figurà ſibi reſpondente numeri E ſine vllâ omnino vnitatis mutuatione à figura præcedẽte, contra quam fiat in communi ſubtrahendi modo: nulla enim numeri B figura maior eſſe poteſt quàm ſibi ſuperpoſita, cum omnes cenſeantur eſſe 9. Si igitur iuxta hoc Præceptum primum, demas figuram 9 primæ claſſis numeri B à ſuperiore figura 9 numeri

E	9999
A	2547
B	1469
D	8530
F	11077
C	1078

numeri E, reliqua fiet figura O, lineolæ ſubſcribenda ad D. Si deinceps demas 6 à 9; remanebit figura 3: quam item ſubſcribes ad D. Atque ita ad reliquas figuras numeri B ſubtrahendas à numeri E figuris perges, quotquot extiterint; donec totum numerum D per hanc ſubtractionem reliquum conſecutus ſis; quamquam à vero, qui inquiritur longè alienum: ex quo tamen verus facile elici poſſit ſeruato ſequenti præcepto.

Præceptum ſecundum *Maiori iunge relictum.* Adde ſcilicet hunc numerum D. proximè inuentum ad maiorem numerum A, à quo fieri debebat ſubtractio numeri B. Naſcetur ex eâ additione numerus F. Qui vt inferiùs patebit, conſtabit ſemper figura 1 ad initium. Hanc ergo figuram 1, ſiue Monadem præfixam cæteris figuris numeri F, è primo illo loco in poſtremum, hoc eſt in primam claſſem amanda iuxta illa verba, *Poſtremámque Monas*, &c. eámque adde ad figuram 7 numeri F vltimam, ſiue primæ claſſis, vt fiat figura 8. Itaque ex numero F naſcetur numerus C, hac factâ mutatione, deletâ ſcilicet figurâ illa 1 numeri F; & reiectâ ad primam claſſem, reliquis omnibus figuris intermediis immutatis. Dico igitur (ecce inauditam nouenarij facultatem) numerum C illum ipſum eſſe, qui ſubducto numero B ex numero A reliquus fit; atque adeò exceſſum eſſe, quo numerus A ſuperat numerum B minorem. Quod vix ſuadeatur, niſi euidenti demonſtratione concludatur. Quam ecce.

Demonſtratio.

Supponendum eſt primò. Si duobus numeris inæqualibus idem addatur numerus; eandem eſſe poſt hanc additionem, genitorum numerorum differentiam: quæ fuerat ante eam inter numeros inæquales. Quid euidentius? Addita enim, quæ inter priores numeros differentia fuerat, tam duorum priorum minori, quàm minori duorum poſteriorum minorem maiori æqualem conſtituit.

Supponendum eſt ſecundò. Si duo numeri inæquales in duas quaſcunque partes diuidantur: & pars vtraque minoris à partibus duabus maioris ſubducatur, vna ab vnâ, altera ab alterâ; reſiduos ambos numeros ſimul ſumptos, æquales eſſe reſiduo numero; qui gignitur, ſi minor totus & inſectus, à maiore toto & inſecto ſubducatur. Imò eodem iure idem continget: ſi partes quotcumque minoris ſubtrahantur à toto maiore inſecto, vel ab aliquibus eius partibus vel etiam contrà; ſi totus minor à parte vel partibus maioris ſubducatur. Nam numerus minor ſiue per partes, ſiue totus & integer à maiore, ſiue integro, ſiue in partes diuiſo ſubductus non mutat vnitatum, quibus vterque conſtat; multitudinem: ſicut etiam non mutatur vnitatum multitudo eius numeri, qui reliquus fit; ſiue in

partes sectus sit, siue partibus additis indiuisus existat. Totum enim suis partibus omnibus simul sumptis est æquale. His positis.

A	2547
N	10000
E	12547
B	1469
H	10000
G	11469
D	8530
F	11077
H	10000
K	1077
C	1078

Addantur tàm ad numerum A maiorem, quàm ad minorem B subtrahendum numeri æquales N & H tot figuris O constantes; quot figuris constat numerus A, & præterea præfixâ figura 1. Vt fiant duo numeri E & G. Certum ergo est ex priore suppositione numeros E & G inæquales esse: siquidem inæqualibus numeris A & B idem numerus N & H additus est: & præterea certum est idem esse discrimen inter numeros E & G; quod fuerat inter A & B; ita vt si numerus G subducatur à numero E, eumdem reliquum fieri numerum necesse sit; qui reliquus foret subducto B à numero A.

Iam verò si numerus B subducatur à numero N parte numeri E: & qui relinquitur numerus, addatur ad numerum A: idem per hanc additionem nascetur numerus, qui orietur, si idem B ab ipso numero E demeretur, vt constat ex secunda suppositione: numeri enim A & N additi sunt, vt totum E conficerent. Dum autem B subducitur à numero N 10000; subductio ita initur, vt in Scholio Propositionis 24. obseruatum est, vt expunctâ figurâ primâ 1 eiusdem numeri N. reliquæ omnes figuræ O conuerti censeantur in totidem figuras 9, vltimâ exceptâ, cui præfigi censetur figura 1, eiúsque valor est 10; sed & ipsa interim non secùs ac reliquæ censeatur esse 9, subductâ à numero illo 10 vnitate, quam paulo post ipsi restituemus: ita numerus B subducatur non à numero N 10000, sed à numero 9999: qui vnitate differt à numero N 10000 additâ enim vnitate ad 9999 fit N 10000. Numerus autem 9999 totidem figuris 9 constat; quot figuris constat numerus A, nempe quatuor. Nam ex suppositione numerus N tot constat figuris O; quarum loco substitutæ totidem sunt figuræ 9; quot figuris constat numerus A

Quare cum numerus B subtrahitur à numero 9999 idem fit reliquus numerus, qui reliquus fieret, si subduceretur à numero N 10000., si tamen ipsi reliquo addatur vnitas, qua N 10000 superat 9999. Ergo cum numerus B subtrahi iubetur à numero 9999; vt habeatur reliquus D 8530. eíque addi iubetur numerus A, vt fiat F 11077 perinde est ex superiori suppositione secundâ, ac si B subduceretur ex numero E, qui gignitur ex additione numerorum A & N per constructionem; si tamen reliquus ille F augeatur vnitate; qua numerus N 10000 superat 9999 (quæ vnitas mox apponetur.) Ergo si numerus H 10000, qui cum B 1469 conflat numerum G 11469; dematur ab illo numero F: reliquus fiet numerus idem plane minùs vnitate, qui relinquitur dempto numero G ex numero E fit

autem

autem reliquus K 1077: addatur ergo numero K vnitas: fiet C 1078. qui relinquitur dempto numero G à numero E. Verùm, ostensum est iuxta primam suppositionem eundem numerum reliquum fore; si numerus G subducatur à numero E, qui relinquitur subducto B à numero A. Constat ergo: quod si numerus B dematur à suppositirio numero *9999*, tot figuris 9 constante; quot figuris constat numerus A, à quo fieri debet subtractio numeri B; & reliquus suppositirius D, addatur ad numerum A; vt fiat F à quo subtrahatur H 10000.; & reliquo K 1077 addatur 1; vt fiat C 1078, constat, inquam, numerum C esse quæsitum reliquum per subtractionem numeri B à numero A. Sed subtractio numeri H ex numero F, & additio vnitatis ad reliquum K; vnâ eademque operâ absoluitur: si Præceptum seruetur hoc versiculo contentum. *Postremámque monas sedem præfixa capessat.* Dum enim monas illa siue vnitas quam semper reperiri ad initium numeri F ostendam, reiicitur in primam classem. Illíque additur: subtractio illa additióque necessaria perficitur: non quod præfixa illa vnitas vi constructionis in figuram primi gradûs minimíque valoris, ex vltimo gradu, & valoris maximi reuocari deposcat. Sed quia, cum idem casus in omni iuxta hanc methodum institutâ subtractione occurrat, ita praxim, memoriæ causa, placuit exponere: vnde non paucis, nec dum demonstrationem huius effectûs edoctis admirandi præbuit occasionem, dum mutationem primæ illius Monadis in gradum toto ipso numero, à priori remotum attendunt. Cæterum inter operandum cum certò sciatur figuræ vltimæ, siue primi gradus numeri F accessuram vnitatem; vt ex 7, fiat 8. Quid vetet hanc vnitatem statim ipso initio addere, & loco figuræ 7 figuram 8 constituere? Quid rursùs obstet figuram illam primam 1 numeri F tanquam inutilem omittere; cum deinceps veniat expungenda?

Restat ergo declarandum, quod asserui paulò ante: nimirum numerorum F collectũ ex additione numerorũ D & A semper figuram 1 nancisci primã: id enim ad absolutam huius methodi demonstrationem probare necessarium est. Ergo ita mecum ratiocinare. Numerus G subduci debet à numero E; vt habeatur numerus C reliquus ex subtractione dati numeri B ex dato numero A, vt ostensum est. Ea autem subtractio numeri G à numero E initur partibus B & H numeri G, subductis sigillatim à numeri E partibus A & N: & quidem ita initur; vt pars B subducatur à parte N numeri E (cuius partis N loco sumptus est ei æqualis numerus 9999, & vnitas) & reliquus factus est D. Iam vt altera pars H 10000 numeri G, dematur à numero ex E reliquo post detractionem numeri B ex parte N. Iungi debet ad partem A numerus D, quem genuit subtractio B ex N. Neque enim H subtrahi potest à solo numero A, cum ipso sit semper maior; maior est enim H 10000 vnitate, quàm numerus 9999 maximus omnium numerorum totidem figuris constantium; ergo H semper est maior, quam A. De-

bet ergo A ſibi adſciſcere numerum D, qui & ipſe pars eſt numeri E (ſiquidem B ſubductus eſt à numeri E, parte N, & factus eſt reliquus D; ita vt pars D adhuc ſit numeri E)

A	2547
N	10000
E	12547
B	1469
H	10000
G	11469
D	8530
F	11077
H	10000
K	−1077
C	−1078.

Iam numerus ex duobus A & D additis conflatus, qui eſt F, maior neceſſario eſt quàm H. Nam E maior eſt quàm G; ſiue quàm B & H ſimul: demptus eſt autem B & ſuperfuit H; demptus eſt etiam idem B ex A & N ſimul, & remanſit F. Ergo F ſemper maior erit quàm H: atque adeò H ſemper ſubtrahi poterit à numero F. Non poteſt autem numerus F 11077 maior eſſe quam H 10000 ratione primæ figuræ, id eſt, prima figura numeri F non poteſt eſſe 2 vel 3 &c. quæ ſunt maiores primâ figura 1 numeri H. Nam numerus E, cuius F eſt pars, figurâ 1 primâ conſtat. Ergo ſi F conſtat (vt conſtare mox declaro) totidem figuris, quot conſtat E, eius figura prima ſuperare nequit figuram 1: alioqui F pars, toto E maior foret. Nec poteſt conſtare idem F paucioribus figuris quàm E. Nam E totidem figuris conſtat, quot conſtat H, vel N. vt enim fieret E, additus eſt ad N numerus A: cuius figuræ, cum multitudine æquales ſint ex conſtructione figuris O numeri N; per hanc additionem, earum locus occupatur à figuris numeri A: eáque additio A ad N perficitur, & habetur productus E; ſi figura 1 numeri N præfigatur numero A. Quare cum multitudo figurarum numeros N & E conſtituentium ſemper ſit æqualis: ſi multitudo figurarum numeri F minor foret, quàm multitudo figurarum numeri E; minor etiam foret multitudine figurarum numeri N. Minor ergo foret numerus F, quàm N. Quod eſt abſurdum: oſtenſus enim eſt F paulo ante maior, quàm N. Cum igitur numerus F maior ſit oſtenſus numero N vel H; ſitque eius prima figura minor quàm 2 ; vel alia quælibet his maior; vt etiam oſtenſum eſt. Ac denique totidem conſtet figuris, quot numerus H: hinc ſequitur primò primam numeri F figuram eſſe 1. Quænam enim alia eſſe queat, ſi 2, aut alia, quam 2 maior, eſſe nequeat; & aliquam tamen eſſe neceſſe ſit? Secundò ſequitur numerum H ſubduci poſſe à numero F; cum hic illo maior probatus ſit. Tertiò ſequitur dum H à numero F ſubducitur; numeri F figuram primam 1 exhauriri à prima numeri H figurâ 1 illi directè reſpondente, diſpoſitis ad ſubtractionem numeris iuxta Prop. 24. cum multitudo figurarum maioris F & minoris H, ſiue ſubtrahendi ſit æqualis. Quare rectè præcipit tradita methodus; vt figura illa prima 1 ſemper præfixa futura numero F orto ex addirione numeri D, & A, expungatur; vel certè reponatur in figuram primi gradûs numeri D, quandoquidem ei figura 1 deeſt; vt habeatur verus numerus C reliquus per ſubtractionem dati numeri B 1469, à dato numero A 2547. Numerum ergo minorem à maiori noua ratione ſubduximus. Quod faciendum erat.

Scholium

Scholium.

Explanato huius ſubtractionis modo, operationem ipſam appoſitè ad praxim paucis repeto, repetito eodem Paradigmate Numerus maior eſt A, cuius figuræ omnes cenſentur eſſe 9: ſubtrahendus eſt B. demitur ergo numeri B figura vltima 9 à 9: reſtaret o. ſed quia addi debet vnitas: addatur 1 ad figuram O, vt fiat 1 vltima figura numeri D. Tum reliquæ deinceps figuræ numeri B demantur à figuris 9: vt habeatur numerus D. hic addi debet ad numerum A. peractâ autem Additione habetur numerus 11078. Expunge primam illam figuram 1. relictus ex ſubtractione numeri B ex A, erit numerus C. Atque ita hæc ſubtrahendi ratio non minus quàm prior, expedita videatur.

A	2547
B	1469
D	8531
C	1078

PROP. XXVII. *Problema.*

Numerum minorem denominatum à denominato maiore numero ſubducere.

Expoſitio.

Vt numeros denominatos ad aliquod ſcilicet quantitatis materiæ immerſæ genus pertinentes ſuperiùs Propoſit. 21. addere docuimus; ob quandam peculiarem à denominatione profectam difficultatem: ita hic ob eandem, numerorum denominatorum ſubtractionem tradere neceſſe eſt. Quam exponam allatis numeris à tempore denominatis. Supponamus itáque annos omnes diebus conſtare 365 (exemplum enim veritatem minimè deſiderat) menſes autem diebus 30. Dies denique horis 24. (quot menſibus annus quilibet conſtet: non definio: néque enim ſupponi conſequenter poteſt annus continere dies 365, & menſes 12; ſi quilibet menſis ſtatuatur dierum 30: ſic enim annus dies 360 tantùm ſibi vendicaret.) Hac ergo factâ ſuppoſitione Paradigma proponitur huiuſmodi. Quæritur quis ſit reliquus numerus. Si ab annis 25. & diebus 246 & horis 16. demantur anni 18. Dies 268. & horæ 12.

Conſtructio.

Præceptum primum. Diſponantur, vt in additione traditum eſt, dati numeri. Ita ſcilicet vt numeri quò minoris denominationis fuerint, eò

ad dextram magis accedant: Ita præterea, vt eiusdem denominationis numeri ambo copulentur posito O vbi non haberetur membrum simile. Ita denique scribantur numeri, vt graduum siue classium summa habeatur ratio. Ita ergo ad subtractionem parabuntur numeri, vt proximè habetur ad Præceptum secundum.

Præceptum secundum. Initio facto à numeris minimæ denominationis, qui ad horas pertinent. Deme 12 horas à 16 horis: fient reliquæ 4 horæ: quæ in eodem horarum ordine subscribentur. Tum accede ad dies: & obserua difficultatem, quæ occurrit non rarò. Nimirum numerum dierum 246 superiorem minorem esse dierum numero 268 inferiore, siue subtrahendo. Quid ergo tunc opus facto? Idem ferè præstandum, quod in simili casu subtractionis communis factitatum est. Mutuò scilicet sumendus est annus vnus ab annorum numero 25, qui propterea vnitate minor censebitur. Annus autem ille mutuò sumptus in dies 365 conuertetur, plures omninò quàm sint subtrahendi dies 268, numquam enim dierum numerus vel subtrahendorum, vel eorum à quibus fit subtractio æquare debet numerum 365. alioquin ad annorum denominationem pertineret addità ad eorum numerum vnitate; quoties numerus 365 dierum haberetur. Ab hoc ergo numero 365 maiore subducatur minor 268: reliquus fiet dierum numerus 97; qui addi debet ad numerum 246, à quo fit subtractio: gignetur autem numerus 343 ad dies pertinens, in eorum proinde ordine subscribendus. Qui etiam haberetur: si dies illi 365 mutuò accepti statim adderentur ad numerum 246 iusto minorem: fierent enim dies 611 à quibus si subduxeris 268, reliquus fiet, vt ante, dierum numerus 343. Hoc ita expedito dierum membro: ad anterius annorum, pergendum est: atque ab annorum numero 24. (Hunc enim loco numeri 25 propter annum ex eo mutuatum substitui meminisse opportet) numerus 18 subtrahi debet; & reliquus 6 subscribi. Quibus absolutis habetur reliquus per subtractionem numerus, qui lineæ rectæ subscriptus est. Atque in hunc modum duobus seruatis Præceptis alij quilibet numeri denominati, ab aliis eiusdem generis subducentur.

Anni	Dies	Horæ
25	246	16
18	268	12
6	343	4

Examen.

Subtractionis huius numeri denominati à numero denominato absolutæ examen instituetur tribus modis. Primò quidem per additionem numeri reliqui per subtractionem geniti ad numerum subtractum: quæ absoluetur per Propositionem 17. Si enim ex ea additione restituatur numerus maior

maior, à quo facta eſt ſubtractio: certius non poteſt haberi argumentum probatæ ſubtractionis; ſin ſecùs factæ perperam.

Secundò ſi numerus reliquus per ſubtractionem genitus ſubducatur à numero eodem maiore: gigni neceſſario debet numerus, qui prius ſubductus fuerat. Cuius duplicis examinis ratio allata eſt ſuprà Prop. 25. duo enim numeri ſubtrahendus, & qui per ſubtractionem relinquitur, ſunt ſimul ſumpti æquales maiori numero, à quo facta eſt ſubtractio. Si ergo ſimul addantur: ipſum maiorem numerum, ſi rectæ inſtituta eſt ſubtractio, reſtituere debent.

Tertio eiuſdem ſubtractionis examen abſolui poteſt nouenarij reiectione. Si enim reiiciatur nouenarius à numero ſubtracto & à reliquo ſimul; tùm à toto, à quo facta eſt ſubtractio; eandem notam Aritmeticam vtrimque relinqui neceſſe eſt, ſi vitio caret ſubtractio. Ratio clara eſt ex proximè allata in duobus præcedentibus modis, & ex iis quæ ſuprà Prop. 22. circa huiuſmodi nouenarij reiectionem ex numeris denominatis expoſui. Ex quibus conſtat; ſi ex toto numero denominato nouenarius reiiciatur, & ex omnibus eius partibus ſimul ſumptis iuxta methodum illic traditam; eandem figuram vtrimque ſupereſſe, ſi additio partium rectè haberet. Ita ergo in hoc exemplo hæc probatio (methodum repeto vt paulò obſcurior eius ratio clarius percipiatur) inſtituetur. Repetatur ſchema præcedens.

	An.	di.	hor.
A	25	246	16
B	18	268	12
C	6	343	4
		1	
		1	

In quo à numero A, ſubtractus eſt B, & relictus eſt C. Reiecto ergo ab annorum numero 25 nouenario (ab annis enim vt maioris denominationis initium duci debet, vt citato loco traditum eſt) reſtat 7. quæ figura ad dies tranſire debet: multiplicabitur ergo per 5. Quid ita? Quia nouenario reiecto ex numero 365 dierum in anno vno contento tum, reliqua fit figura 5: qua vti oportet in hac reductione annorum ad dies, vt ibi demonſtratum eſt. Multiplicatâ igitur figura 7 per 5: gignitur 35, ex quo numero, & ſimul ex dierum mumero 246 reiecto nouenatio ſupereſt 2. Quæ figura ad horas tranſibit: ſi multiplicetur per 6 nam cum horarum, quas dies vnus continet, numerus ſit 24: ex quo reiecto nouenario reliqua fit figura 6 debet per eam figura ex diebus relicta multiplicari. Fit autem 12 ex multiplicatione 2 per 6 nouenario autem ex figuris duorum ſimul numerorum 12 & 16 ad horas pertinentium reiecto ſupereſt tandem figura 1. Quam eandem relinqui comperies: ſi eadem operatio inſtituatur circa duos ſimul numeros B & C initio facto ſimiliter ab annorum duobus numeris 18 & 6, ex quibus ſupereſt figura 6: quæ multiplicata per 5, producit 30 ad dies pertinentem: ex tribus demum dierum numeris 30, 268, 343 reie-

cto

ad dextram magis accedant: Ita præterea, vt eiusdem denominationis numeri ambo copulentur posito O vbi non haberetur membrum simile. Ita deníque scribantur numeri, vt graduum siue classium summa habeatur ratio. Ita ergo ad subtractionem parabuntur numeri, vt proximè habetur ad Præceptum secundum.

Præceptum secundum. Initio facto à numeris minimæ denominationis, qui ad horas pertinent. Deme 12 horas à 16 horis: fient reliquæ 4 horæ: quæ in eodem horarum ordine subscribentur. Tum accede ad dies: & obserua difficultatem, quæ occurrit non rarò. Nimirum numerum dierum 246 superiorem minorem esse dierum numero 268 inferiore, siue subtrahendo. Quid ergo tunc opus facto? Idem ferè præstandum, quod in simili casu subtractionis communis factitatum est. Mutuò scilicet sumendus est annus vnus ab annorum numero 25, qui propterea vnitate minor censebitur. Annus autem ille mutuò sumptus in dies 365 conuertetur, plures omninò quàm sint subtrahendi dies 268, numquam enim dierum numerus vel subtrahendorum, vel eorum à quibus fit subtractio æquare debet numerum 365. alioquin ad annorum denominationem pertineret addità ad eorum numerum vnitate; quoties numerus 365 dierum haberetur. Ab hoc ergo numero 365 maiore subducatur minor 268: reliquus fiet dierum numerus 97; qui addi debet ad numerum 246, à quo fit subtractio: gignetur autem numerus 343 ad dies pertinens, in eorum proinde ordine subscribendus. Qui etiam haberetur: si dies illi 365 mutuò accepti statim adderentur ad numerum 246 iusto minorem: fierent enim dies 611 à quibus si subduxeris 268, reliquus fiet, vt ante, dierum numerus 343. Hoc ita expedito dierum membro: ad anterius annorum, pergendum est: atque ab annorum numero 24. (Hunc enim loco numeri 25 propter annum ex eo mutuatum substitui meminisse oportet) numerus 18 subtrahi debet; & reliquus 6 subscribi. Quibus absolutis habetur reliquus per subtractionem numerus, qui lineæ rectæ subscriptus est. Atque in hunc modum duobus seruatis Præceptis alij quilibet numeri denominati, ab aliis eiusdem generis subducentur.

Anni	Dies	Horæ
25 —	246 —	16
18 —	268 —	12
6 —	343 —	4

Examen.

Subtractionis huius numeri denominati à numero denominato absolutæ examen instituetur tribus modis. Primò quidem per additionem numeri reliqui per subtractionem geniti ad numerum subtractum: quæ absoluetur per Propositionem 17. Si enim ex ea additione restituatur numerus maior

maior, à quo facta est subtractio: certius non potest haberi argumentum probatæ subtractionis; sin secùs factæ perperam.

Secundò si numerus reliquus per subtractionem genitus subducatur à numero eodem maiore: gigni necessario debet numerus, qui ptius subductus fuerat. Cuius duplicis examinis ratio allata est suprà Prop. 25. duo enim numeri subtrahendus, & qui per subtractionem relinquitur, sunt simul sumpti æquales maiori numero, à quo facta est subtractio. Si ergo simul addantur: ipsum maiorem numerum, si rectæ instituta est subtractio, restituere debent.

Tertio eiusdem subtractionis examen absolui potest nouenarij reiectione. Si enim reiiciatur nouenarius à numero subtracto & à reliquo simul; tùm à toto, à quo facta est subtractio; eandem notam Aritmeticam vtrimque relinqui necesse est, si vitio caret subtractio. Ratio clara est ex proximè allata in duobus præcedentibus modis, & ex iis quæ suprà Prop. 22. circa huiusmodi nouenarij reiectionem ex numeris denominatis exposui. Ex quibus constat; si ex toto numero denominato nouenarius reiiciatur, & ex omnibus eius partibus simul sumptis iuxta methodum illic traditam; eandem figuram vtrimque superesse, si additio partium rectè haberet. Ita ergo in hoc exemplo hæc probatio (methodum repeto vt paulò obscurior eius ratio clarius percipiatur) instituetur. Repetatur schema præcedens.

	An.	di.	hor.
A	25	246	16
B	18	268	12
C	6	343	4
		1	
		—	
		1	

In quo à numero A, subtractus est B, & relictus est C. Reiecto ergo ab annorum numero 25 nouenario (ab annis enim vt maioris denominationis initium duci debet, vt citato loco traditum est) restat 7. quæ figura ad dies transire debet: multiplicabitur ergo per 5. Quid ita? Quia nouenario reiecto ex numero 365 dierum in anno vno contentorum, reliqua fit figura 5: qua vti oportet in hac reductione annorum ad dies, vt ibi demonstratum est. Multiplicatâ igitur figura 7 per 5: gignitur 37, ex quo numero, & simul ex dierum mumero 246 reiecto nouenario superest 2. Quæ figura ad horas transibit: si multiplicetur per 6 nam cum horarum, quas dies vnus continet, numerus sit 24: ex quo reiecto nouenario reliqua fit figura 6 debet per eam figura ex diebus relicta multiplicari. Fit autem 12 ex multiplicatione 2 per 6 nouenario autem ex figuris duorum simul numerorum 12 & 16 ad horas pertinentium reiecto superest tandem figura 1. Quam eandem relinqui comperies: si eadem operatio instituatur circa duos simul numeros B & C initio facto similiter ab annorum duobus numeris 18 & 6, ex quibus superest figura 6: quæ multiplicata per 5, producit 30 ad dies pertinentem: ex tribus demum dierum numeris 30, 268, 343 reiecto

ad dextram magis accedant : Ita prætерea, vt eiuſdem denominationis numeri ambo copulentur poſito O vbi non haberetur membrum ſimile. Ita deníque ſcribantur numeri, vt graduum ſiue claſſium ſumma habeatur ratio. Ita ergo ad ſubtractionem parabuntur numeri, vt proximè habetur ad Præceptum ſecundum.

Anni	Dies	Horæ
25	246	16
18	268	12
6	343	4

Præceptum ſecundum. Initio facto à numeris minimæ denominationis, qui ad horas pertinent. Deme 12 horas à 16 horis : fient reliquæ 4 horæ : quæ in eodem horarum ordine ſubſcribentur. Tum accede ad dies : & obſerua difficultatem, quæ occurrit non rarò. Nimirum numerum dierum 246 ſuperiorem minorem eſſe dierum numero 268 inferiore, ſiue ſubtrahendo. Quid ergo tunc opus facto ? Idem ferè præſtandum, quod in ſimili caſu ſubtractionis communis factitatum eſt. Mutuò ſcilicet ſumendus eſt annus vnus ab annorum numero 25, qui propterea vnitate minor cenſebitur. Annus autem ille mutuò ſumptus in dies 365 conuertetur, plures omninò quàm ſint ſubtrahendi dies 268, numquam enim dierum numerus vel ſubtrahendorum, vel eorum à quibus fit ſubtractio æquare debet numerum 365. alioquin ad annorum denominationem pertineret additâ ad eorum numerum vnitate ; quoties numerus 365 dierum haberetur. Ab hoc ergo numero 365 maiore ſubducatur minor 268 : reliquus fiet dierum numerus 97 ; qui addi debet ad numerum 246, à quo fit ſubtractio : gignetur autem numerus 343 ad dies pertinens, in eorum proinde ordine ſubſcribendus. Qui etiam haberetur : ſi dies illi 365 mutuò accepti ſtatim adderentur ad numerum 246 iuſto minorem : fierent enim dies 611 à quibus ſi ſubduxeris 268, reliquus fiet, vt ante, dierum numerus 343. Hoc ita expedito dierum membro : ad anterius annorum, pergendum eſt : atque ab annorum numero 24. (Hunc enim loco numeri 25 propter annum ex eo mutuatum ſubſtitui meminiſſe oportet) numerus 18 ſubtrahi debet ; & reliquus 6 ſubſcribi. Quibus abſolutis habetur reliquus per ſubtractionem numerus ,¦qui lineæ rectæ ſubſcriptus eſt. Atque in hunc modum duobus ſeruatis Præceptis alij quilibet numeri denominati, ab aliis eiuſdem generis ſubducentur.

Examen.

Subtractionis huius numeri denominati à numero denominato abſolutæ examen inſtituetur tribus modis. Primò quidem per additionem numeri reliqui per ſubtractionem geniti ad numerum ſubtractum : quæ abſoluetur per Propoſitionem 17. Si enim ex ea additione reſtituatur numerus maior

maior, à quo facta est subtractio: certius non potest haberi argumentum probatæ subtractionis; sin secùs factæ perperam.
Secundò si numerus reliquus per subtractionem genitus subducatur à numero eodem maiore: gigni necessario debet numerus, qui prius subductus fuerat. Cuius duplicis examinis ratio allata est suprà Prop. 25. duo enim numeri subtrahendus, & qui per subtractionem relinquitur, sunt simul sumpti æquales maiori numero, à quo facta est subtractio. Si ergo simul addantur: ipsum maiorem numerum, si rectæ instituta est subtractio, restituere debent.

Tertio eiusdem subtractionis examen absolui potest nouenarij reiectione. Si enim reiiciatur nouenarius à numero subtracto & à reliquo simul; tùm à toto, à quo facta est subtractio; eandem notam Aritmeticam vtrimque relinqui necesse est, si vitio caret subtractio. Ratio clara est ex proximè allata in duobus præcedentibus modis, & ex iis quæ suprà Prop. 22. circa huiusmodi nouenarij reiectionem ex numeris denominatis exposui. Ex quibus constat; si ex toto numero denominato nouenarius reiiciatur, & ex omnibus eius partibus simul sumptis iuxta methodum illic traditam; eandem figuram vtrimque superesse, si additio partium rectè haberet. Ita ergo in hoc exemplo hæc probatio (methodum repeto vt paulò obscurior eius ratio clarius percipiatur) instituetur. Repetatur schema præcedens.

	An.	di.	hor.
A	25	246	16
B	18	268	12
C	6	343	4
		1	
		1	

In quo à numero A, subtractus est B, & relictus est C. Reiecto ergo ab annorum numero 25 nouenario (ab annis enim vt maioris denominationis initium duci debet, vt citato loco traditum est) restat 7. quæ figura ad dies transire debet: multiplicabitur ergo per 5. Quid ita? Quia nouenario reiecto ex numero 365 dierum in anno vno contentorum, reliqua fit figura 5: qua vti oportet in hac reductione annorum ad dies, vt ibi demonstratum est. Multiplicatâ igitur figura 7 per 5: gignitur 37, ex quo numero, & simul ex dierum mumero 246 reiecto nouenario superest 2. Quæ figura ad horas transibit: si multiplicetur per 6 nam cum horarum, quas dies vnus continet, numerus sit 24: ex quo reiecto nouenario reliqua fit figura 6 debet per eam figura ex diebus relicta multiplicari. Fit autem 12 ex multiplicatione 2 per 6 nouenario autem ex figuris duorum simul numerorum 12 & 16 ad horas pertinentium reiecto superest tandem figura 1. Quam eandem relinqui comperies: si eadem operatio instituatur circa duos simul numeros B & C initio facto similiter ab annorum duobus numeris 18 & 6, ex quibus superest figura 6: quæ multiplicata per 5, producit 30 ad dies pertinentem: ex tribus demum dierum numeris 30, 268, 343 reie-
cto

ad dextram magis accedant: Ita præterea, vt eiuſdem denominationis numeri ambo copulentur poſito O vbi non haberetur membrum ſimile. Ita denique ſcribantur numeri, vt graduum ſiue claſſium ſumma habeatur ratio. Ita ergo ad ſubtractionem parabuntur numeri, vt proximè habetur ad Præceptum ſecundum.

Præceptum ſecundum. Initio facto à numeris minimæ denominationis, qui ad horas pertinent. Deme 12 horas à 16 horis: fient reliquæ 4 horæ: quæ in eodem horarum ordine ſubſcribentur. Tum accede ad dies: & obſerua difficultatem, quæ occurrit non tarò. Nimirum numerum dierum 246 ſuperiorem minorem eſſe dierum numero 268 inferiore, ſiue ſubtrahendo. Quid ergo tunc opus facto? Idem ferè præſtandum, quod in ſimili caſu ſubtractionis communis factitatum eſt. Mutuò ſcilicet ſumendus eſt annus vnus ab annorum numero 25, qui propterea vnitate minor cenſebitur. Annus autem ille mutuò ſumptus in dies 365 conuertetur, plures omninò quàm ſint ſubtrahendi dies 268, numquam enim dierum numerus vel ſubtrahendorum, vel eorum à quibus fit ſubtractio æquare debet numerum 365. alioquin ad annorum denominationem pertineret additâ ad eorum numerum vnitate; quoties numerus 365 dierum haberetur. Ab hoc ergo numero 365 maiore ſubducatur minor 268: reliquus fiet dierum numerus 97; qui addi debet ad numerum 246, à quo fit ſubtractio: gignetur autem numerus 343 ad dies pertinens, in eorum proinde ordine ſubſcribendus. Qui etiam haberetur: ſi dies illi 365 mutuò accepti ſtatim [adderentur ad numerum 246 iuſto minorem: fierent enim dies 611 à quibus ſi ſubduxeris 268, reliquus fiet, vt ante, dierum numerus 343. Hoc ita expedito dierum membro: ad anterius annorum, pergendum eſt: atque ab annorum numero 24. (Hunc enim loco numeri 25 propter annum ex eo mutuatum ſubſtitui meminiſſe opportet) numerus 18 ſubtrahi debet; & reliquus 6 ſubſcribi. Quibus abſolutis habetur reliquus per ſubtractionem numerus ,;qui lineæ rectæ ſubſcriptus eſt. Atque in hunc modum duobus ſeruatis Præceptis alij quilibet numeri denominati, ab aliis eiuſdem generis ſubducentur.

Anni	Dies	Horæ
25	246	16
18	268	12
6	343	4

Examen.

Subtractionis huius numeri denominati à numero denominato abſolutæ examen inſtituetur tribus modis. Primò quidem per additionem numeri reliqui per ſubtractionem geniti ad numerum ſubtractum: quæ abſoluetur per Propoſitionem 17. Si enim ex ea additione reſtituatur numerus maior

maior, à quo facta est subtractio: certius non potest haberi argumentum probatæ subtractionis; sin secùs factæ perperam.

Secundò si numerus reliquus per subtractionem genitus subducatur à numero eodem maiore: gigni necessario debet numerus, qui prius subductus fuerat. Cuius duplicis examinis ratio allata est suprà Prop. 25. duo enim numeri subtrahendus, & qui per subtractionem relinquitur, sunt simul sumpti æquales maiori numero, à quo facta est subtractio. Si ergo simul addantur: ipsum maiorem numerum, si rectæ instituta est subtractio, restituere debent.

Tertio eiusdem subtractionis examen absolui potest nouenarij reiectione. Si enim reiiciatur nouenarius à numero subtracto & à reliquo simul; tùm à toto, à quo facta est subtractio; eandem notam Aritmeticam vtrimque relinqui necesse est, si vitio caret subtractio. Ratio clara est ex proximè allata in duobus præcedentibus modis, & ex iis quæ suprà Prop. 22. circa huiusmodi nouenarij reiectionem ex numeris denominatis exposui. Ex quibus constat; si ex toto numero denominato nouenarius reiiciatur, & ex omnibus eius partibus simul sumptis iuxta methodum illic traditam; eandem figuram vtrimque superesse, si additio partium rectè haberet. Ita ergo in hoc exemplo hæc probatio (methodum repeto vt paulò obscurior eius ratio clarius percipiatur) instituetur. Repetatur schema præcedens.

	An.	di.	hor.
A	25 —	246 —	16
B	18 —	268 —	12
C	6 —	343 —	4
		1	
		—	
		1	

In quo à numero A, subtractus est B, & relictus est C. Reiecto ergo ab annorum numero 25 nouenario (ab annis enim vt maioris denominationis initium duci debet, vt citato loco traditum est) restat 7. quæ figura ad dies transire debet: multiplicabitur ergo per 5. Quid ita? Quia nouenario reiecto ex numero 365 dierum in anno vno contentorum, reliqua fit figura 5: qua vti oportet in hac reductione annorum ad dies, vt ibi demonstratum est. Multiplicatâ igitur figura 7 per 5: gignitur 37, ex quo numero, & simul ex dierum mumero 246 reiecto nouenario superest 2. Quæ figura ad horas transibit: si multiplicetur per 6 nam cum horarum, quas dies vnus continet, numerus sit 24: ex quo reiecto nouenario reliqua fit figura 6 debet per eam figura ex diebus relicta multiplicari. Fit autem 12 ex multiplicatione 2 per 6 nouenario autem ex figuris duorum simul numerorum 12 & 16 ad horas pertinentium reiecto superest tandem figura 1. Quam eandem relinqui comperies: si eadem operatio instituatur circa duos simul numeros B & C initio facto similiter ab annorum duobus numeris 18 & 6, ex quibus superest figura 6: quæ multiplicata per 5, producit 30 ad dies pertinentem: ex tribus demum dierum numeris 30, 268, 343 reie-

cto

bet ergo A sibi adsciscere numerum D, qui & ipse pars est numeri E (siquidem B subductus est à numeri E, parte N, & factus est reliquus D; ita vt pars D adhuc sit numeri E) Iam numerus ex duobus A & D additis conflatus, qui est F, maior necessario est quàm H. Nam E maior est quàm G; siue quàm B & H simul: demptus est autem B & superfuit H; demptus est etiam idem B ex A & N simul, & remansit F. Ergo F semper maior erit quàm H: atque adeò H semper subtrahi poterit à numero F. Non potest autem numerus F 11077 maior esse quam H 10000 ratione primæ figuræ, id est, prima figura numeri F non potest esse 2 vel 3 &c. quæ sunt maiores primâ figura 1 numeri H. Nam numerus E, cuius F est pars, figurâ 1 primâ constat. Ergo si F constat (vt constare mox declaro) totidem figuris, quot constat E, eius figura prima superare nequit figuram 1: alioqui F pars, toto E maior foret. Nec potest constare idem F pauciotibus figuris quàm E. Nam E totidem figuris constat, quot constat H, vel N. vt enim fieret E, additus est ad N numerus A: cuius figuræ, cum multitudine æquales sint ex constructione figuris O numeri N; per hanc additionem, earum locus occupatur à figuris numeri A: eáque additio A ad N perficitur, & habetur productus E; si figura 1 numeri N præfigatur numero A. Quare cum multitudo figurarum numeros N & E constituentium semper sit æqualis: si multitudo figurarum numeri F minor foret, quàm multitudo figurarum numeri E; minor etiam foret multitudine figurarum numeri N. Minor ergo foret numerus F, quàm N. Quod est absurdum: ostensus enim est F paulo ante maior, quàm N. Cum igitur numerus F maior sit ostensus numero N vel H; sitque eius prima figura minor quàm 2 3 vel alia qualibet his maior; vt etiam ostensum est. Ac denique totidem constet figuris, quot numerus H: hinc sequitur primò primam numeri F figuram esse 1. Quænam enim alia esse queat, si 2, aut alia, quam 2 maior, esse nequeat; & aliquam tamen esse necesse sit? Secundò sequitur numerum H subduci posse à numero F; cum hic illo maior probatus sit. Tertiò sequitur dum H à numero F subducitur; numeri F figuram primam 1 exhauriri à prima numeri H figurâ 1 illi directè respondente, dispositis ad subtractionem numeris iuxta Prop. 24. cum multitudo figurarum maioris F & minoris H, siue subtrahendi sit æqualis. Quare rectè præcipit tradita methodus; vt figura illa prima 1 semper præfixa futura numero F orto ex additione numeri D, & A, expungatur; vel certè reponatur in figuram primi gradûs numeri D, quandoquidem ei figura 1 deest; vt habeatur verus numerus C reliquus per subtractionem dati numeri B 1469, à dato numero A 2547. Numerum ergo minorem à maiori noua ratione subduximus. Quod faciendum erat.

A	2547
N	10000
E	12547
—	—
B	1469
H	10000
G	11469
—	—
D	8530
F	11077
H	10000
—	—
K	−1077
C	−1078.

Scholium

Scholium.

A 1547
B 1469
———
D 8531
———
C 1078

Explanato huius ſubtractionis modo, operationem ipſam appoſitè ad praxim paucis repeto, repetito eodem Paradigmate Numerus maior eſt A, cuius figuræ omnes cenſentur eſſe 9: ſubtrahendus eſt B. demitur ergo numeri B figura vltima 9 à 9: reſtaret o. ſed quia addi debet vnitas: addatur 1 ad figuram O, vt fiat 1 vltima figura numeri D. Tum reliquæ deinceps figuræ numeri B demantur à figuris 9: vt habeatur numerus D. hic addi debet ad numerum A. peractâ autem Additione habetur numerus 11078. Expunge primam illam figuram 1. relictus ex ſubtractione numeri B ex A, erit numerus C. Atque ita hæc ſubtrahendi ratio non minus quàm prior, expedita videatur.

PROP. XXVII. *Problema.*

Numerum minorem denominatum à denominato maiore numero ſubducere.

Expoſitio.

Vt numeros denominatos ad aliquod ſcilicet quantitatis materiæ immerſæ genus pertinentes ſuperiùs Propoſit. 21. addere docuimus; ob quandam peculiarem à denominatione profectam difficultatem: ita hic ob eandem, numerorum denominatorum ſubtractionem tradere neceſſe eſt. Quam exponam allatis numeris à tempore denominatis. Supponamus itàque annos omnes diebus conſtare 365 (exemplum enim veritatem minimè deſiderat) menſes autem diebus 30. Dies denique horis 24. (quot menſibus annus quilibet conſtet: non definio: neque enim ſupponi conſequenter poteſt annus continere dies 365, & menſes 12; ſi quilibet menſis ſtatuatur dierum 30: ſic enim annus dies 360 tantùm ſibi vendicaret.) Hac ergo factâ ſuppoſitione Paradigma proponitur huiuſmodi. Quæritur quis ſit reliquus numerus. Si ab annis 25. & diebus 246 & horis 16. demantur anni 18. Dies 268. & horæ 12.

Conſtructio.

Præceptum primum. Diſponantur, vt in additione traditum eſt, dati numeri. Ita ſcilicet vt numeri quò minoris denominationis fuerint, eò

ad dextram magis accedant: Ita præterea, vt eiusdem denominationis numeri ambo copulentur posito O vbi non haberetur membrum simile. Ita deníque scribantur numeri, vt graduum siue classium summa habeatur ratio. Ita ergo ad subtractionem parabuntur numeri, vt proximè habetur ad Præceptum secundum.

Præceptum secundum. Initio facto à numeris minimæ denominationis, qui ad horas pertinent. Deme 12 horas à 16 horis: fient reliquæ 4 horæ: quæ in eodem horarum ordine subscribentur. Tum accede ad dies: & obserua difficultatem, quæ occurrit non rarò. Nimirum numerum dierum 246 superiorem minorem esse dierum numero 268 inferiore, siue subtrahendo. Quid

Anni	Dies	Horæ
25	246	16
18	268	12
6	343	4

ergo tunc opus facto? Idem ferè præstandum, quod in simili casu subtractionis communis factitatum est. Mutuò scilicet sumendus est annus vnus ab annorum numero 25, qui propterea vnitate minor censebitur. Annus autem ille mutuò sumptus in dies 365 conuertetur, plures omninò quàm sint subtrahendi dies 268, numquam enim dierum numerus vel subtrahendorum, vel eorum à quibus fit subtractio æquare debet numerum 365. alioquin ad annorum denominationem pertineret addità ad eorum numerum vnitate; quoties numerus 365 dierum haberetur. Ab hoc ergo numero 365 maiore subducatur minor 268: reliquus fiet dierum numerus 97; qui addi debet ad numerum 246, à quo fit subtractio: gignetur autem numerus 343 ad dies pertinens, in eorum proinde ordine subscribendus. Qui etiam haberetur: si dies illi 365 mutuò accepti statim adderentur ad numerum 246 iusto minorem: fierent enim dies 611 à quibus si subduxeris 268, reliquus fiet, vt ante, dierum numerus 343. Hoc ita expedito dierum membro: ad anterius annorum, pergendum est: atque ab annorum numero 24. (Hunc enim loco numeri 25 propter annum ex eo mutuatum substitui meminisse oportet) numerus 18 subtrahi debet; & reliquus 6 subscribi. Quibus absolutis habetur reliquus per subtractionem numerus, qui lineæ rectæ subscriptus est. Atque in hunc modum duobus seruatis Præceptis alij quilibet numeri denominati, ab aliis eiusdem generis subducentur.

Examen.

Subtractionis huius numeri denominati à numero denominato absolutæ examen instituetur tribus modis. Primò quidem per additionem numeri reliqui per subtractionem geniti ad numerum subtractum: quæ absoluetur per Propositionem 17. Si enim ex ea additione restituatur numerus maior

maior, à quo facta eſt ſubtractio: certius non poteſt haberi argumentum probatæ ſubtractionis; ſin ſecùs factæ perperam.
Secundò ſi numerus reliquus per ſubtractionem genitus ſubducatur à numero eodem maiore: gigni neceſſario debet numerus, qui prius ſubductus fuerat. Cuius duplicis examinis ratio allata eſt ſuprà Prop. 25. duo enim numeri ſubtrahendus, & qui per ſubtractionem relinquitur, ſunt ſimul ſumpti æquales maiori numero, à quo facta eſt ſubtractio. Si ergo ſimul addantur: ipſum maiorem numerum, ſi rectæ inſtituta eſt ſubtractio, reſtituere debent.

Tertio eiuſdem ſubtractionis examen abſolui poteſt nouenarij reiectione. Si enim reiiciatur nouenarius à numero ſubtracto & à reliquo ſimul; tùm à toto, à quo facta eſt ſubtractio; eandem notam Aritmeticam vtrimque relinqui neceſſe eſt, ſi vitio caret ſubtractio. Ratio clara eſt ex proximè allata in duobus præcedentibus modis, & ex iis quæ ſuprà Prop. 22. circa huiuſmodi nouenarij reiectionem ex numeris denominatis expoſui. Ex quibus conſtat; ſi ex toto numero denominato nouenarius reiiciatur, & ex omnibus eius partibus ſimul ſumptis iuxta methodum illic traditam; eandem figuram vtrimque ſupereſſe, ſi additio partium rectè haberet. Ita ergo in hoc exemplo hæc probatio (methodum repeto vt paulò obſcurior eius ratio clarius percipiatur) inſtituetur. Repetatur ſchema præcedens.

	An.	di.	hor.
A	25	246	16
B	18	268	12
C	6	343	4
		1	
		1	

In quo à numero A, ſubtractus eſt B, & relictus eſt C. Reiecto ergo ab annorum numero 25 nouenario (ab annis enim vt maioris denominationis initium duci debet, vt citato loco traditum eſt) reſtat 7. quæ figura ad dies tranſire debet: multiplicabitur ergo per 5. Quid ita? Quia nouenario reiecto ex numero 365 dierum in anno vno contento tum, reliqua fit figura 5: qua vti oportet in hac reductione annorum ad dies, vt ibi demonſtratum eſt. Multiplicatâ igitur figura 7 per 5: gignitur 37, ex quo numero, & ſimul ex dierum mumero 246 reiecto nouenario ſupereſt 2. Quæ figura ad horas tranſibit: ſi multiplicetur per 6 nam cum horarum, quas dies vnus continet, numerus ſit 24: ex quo reiecto nouenario reliqua fit figura 6 debet per eam figura ex diebus relicta multiplicari. Fit autem 12 ex multiplicatione 2 per 6 nouenario autem ex figuris duorum ſimul numerorum 12 & 16 ad horas pertinentium reiecto ſupereſt tandem figura 1. Quam eandem relinqui comperies: ſi eadem operatio inſtituatur circa duos ſimul numeros B & C initio facto ſimiliter ab annorum duobus numeris 18 & 6, ex quibus ſupereſt figura 6: quæ multiplicata per 5, producit 30 ad dies pertinentem: ex tribus demum dierum numeris 30, 268, 343 reiecto

cto nouenario superest figura 2. Quæ, vt ad horas transeat, duci debet in 6; & productus 12 duobus horarum numeris 12 & 4 apponi, vt ex iis simul nouenarius abiiciatur: quo peracto, superest figura 1, eadem: quæ ex numero A reiecto nouenario reliqua fuerat. Vnde certò colligas rectè institutam esse subtractionem numeri B à numero A.

PROP. XXVIII. *Defin.*

Multiplicatio numeri per numerum est Inuestigatio numeri: qui toties componitur ex numero multiplicato: quot sunt in numero multiplicante vnitates.

Expositio.

Hæc multiplicationis definitio deducitur ex Euclidis definitione 15. lib. 7. Vbi asserit numerum illum duci multiplicare numerum alterum; cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur: quot sunt in ipso multiplicante vnitates; & procreatus fuerit aliquis. Duo ergo, & non plures, ad quamlibet multiplicationem numeri necessarij sunt: quorum vnus multiplicatus, alter multiplicans dicitur. Ille, est numerus; qui componitur ex seipso repetito; hic verò est alter numerus; qui quoties prior repeti debeat, suis vnitatibus indicat, & definit. Vt si duo numeri A & B proponantur: quorum A toties ex seipso repetito componatur quot sunt in B vnitates; & eà repetitione gignatur C. numerus A dicetur multiplicatus, B multiplicans, denique C, ex multiplicatione procreatus.

A 25	B 4
C 100	

Vter autem multiplicans vter multiplicatus dici potiori iure quàm alter debeat. ex ratione, quam multiplicatio fit, definiri debet. Si enim numerus A componatur ex seipso toties repetito: quot sunt vnitates in B; hisque verbis, aut similibus enuncietur multiplicationis modus, *Quater viginti quinque vnitates, quot sunt?* Numerus A est multiplicatus, B est multiplicans. At contrà si dicatur *Vigesies quinquies quatuor vnitates, quot vnitates sunt*? Tunc A est multiplicans; at B est multiplicatus. Siue autem A, siue B multiplicati, vel multiplicantis officio fungatur: ex quo denominationem hauriat; numerus C procreatus dicitur ex mutuà duorum numerorum A & B multiplicatione, nullâ habita ratione denominationis, quâ vterque numerus A & B modò multiplicans, modò multiplicatus dici potest. Vteruis enim multiplicantis, vteruis multiplicati officio fungatur; siue dicatur, Quater viginti quinque vnitates, quem numerum generant? siue, quem vigesies quinquies quatuor vnitates? semper numerus C ex multiplicatione mutua

numero

numerorum A & B procreatus dicitur. Nec immeritò : idem enim numerus C producitur, siue A siue B multiplicatus, aut multiplicans: siue dicatur, quater viginti quinque vnitates siue vigesies quinquies vnitates quatuor, quot sunt? vt lib. 7. Prop. 16. demonstrat Eucl. & infrà idem planissimè ostendetur Prop. 31.

Corollarium.

Ex eâ multiplicationis definitione aliæ quædam consequuntur abs re non alienæ. Cuiusmodi est hæc multiplicatio numeri per numerum, est inuestigatio numeri: qui ad numerum multiplicatum eandem habeat rationem; quam miltiplicans habet ad vnitatem. Si enim numerus C ex multiplicatione numeri B multiplicantis, in numerum A multiplicatum ducti procreatus: toties continet numerum A; quoties B continet vnitatem: æque erit multiplex numerus C numeri A, & numerus B vnitatis. Vel etiam (vt fractos numeros eadem definitione complectamur) quæ pars, vel: quæ partes erit numerus C numeri A; eadem pars, vel eædem partes erit vnitatis numerus B. Vnde fit iuxta definitionem 20 lib. 7. Eucl. vt eadem sit ratio numeri C producti ad A multiplicatum: quæ est B multiplicantis ad vnitatem, vt fert hæc secunda definito multiplicationis: atque ita quatuor numeri C productus, A multiplicatus; B multiplicans, vnitas; sint quatuor termini proportionales.

A 25 B 4
C 100

PROP. XXIX. *Definit.*

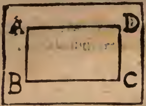
Numerus Planus est, qui à Duobus numeris sese multiplicantibus producitur: numeri verò duo sese multiplicantes, eius latera dicuntur.

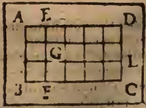
Expositio.

Quemadmodum sunt tres continuæ quantitatis species, linea nimirum, superficies, & corpus: ita discretæ, tres possunt per analogiam attendi species similes. Ita vt numerorum alij sint lineates, alij superficiales alij corporei, siue solidi. Continuæ tamen & discretæ specierum ratio longè est diuersa. Quæ enim species, linea dicitur continuæ quantitatis ita ad hanc speciem alligata est; vt nulla ratione ad alias pertinere queat: contrà quàm in discretâ contingat. Qui enim numerus quadam ratione consideratus, linearis dici debet: Idem Planus; idem solidus sub aliis rationibus rectè vocabitur, vt ex dicendis manifestum fiet. Idem inter con-

tinuam & discretam superficiem discrimen obseruare licet: quod etiam inter vtriusque generis solida reperitur. Aliud præterea inter superficies continuas, & discretas discrimen intercedit. Continuarum enim, ratione terminorum, quibus comprehenduntur; ratione etiam extensionis modi, infinita sunt genera, Sphæricarum, Conicarum, Cylindricarum, Planarum *&c.* Planarum autem aliæ sunt circulares, triangulares, quadrangulares, *&c.* At verò numeri superficiales vnius tantùm generis agnoscuntur: Planíque omnes dicuntur; Et quidem inter Planos vnius tantùm speciei mentionem fecit Euclides tum citata definitione, tum alibi semper; eorum scilicet, qui sub duobus numeris comprehenduntur, & rectangulares & concipi debent, & nominari, non secus ac Plana illa superficies quadrangula, quæ sub duabus lineis sibi inuicem perpendicularibus continetur; rectangulum dici consueuit. Licet enim numeri reperiantur triangulares, Pentagoni, Hexagoni, *&c.* quorum proprietates dantur ipsis singulares. Quia tamen tanti nec vsus sunt, nec momenti: ideo soli rectangulares numeri ob eximias facultates in pretio habentur; & quidem tanto, vt plani numeri nomine is solus absolutè intelligatur ab Euclide, ceterísque Geometris: qui ab vno numero in alterum ducto generatur; formámque rectanguli quantitatis continuæ imitetur, nomenque assequatur. Quod, cùm maximam lucem toti huic numerorum negotio allaturum sit, vt patebit: rem paulò adhuc apertiùs oculis subiicio horum schematum operâ.

Itaque si duæ lineæ rectæ B A, B C in angulum B orthogonum commissæ statuantur: earúmque alterutra, vt B A, per alterius B C longitudinem seruato semper orthogono situ fluere concipiatur: fluxu illo suo planam figuram quadrangularem A B C D descripserit: quam Geometræ Parallelogrammum rectangulum, aut absolutè rectangulum dicere; illudque ex ductu lineæ B A in lineam B C procreatum asserere consueuerunt. Non secùs in discretâ quantitate: si duo quidam numeri B A, B C, quos duabus lineis in partes æquales sectis; quarum multitudo tanta sit, quanta est vnitatum in singulis numeris contentarum, exhiberi volo (illatum enim lineolarum partialium multitudines duæ plures sunt vnitates: quibus ratio numeri, dum mens vnionem ad numerum necessariam, vt Prop. 2. explicatum est, illis affingit, aptissimè conuenit) ita, vt ante, lineæ B A, B C insectæ, connectantur ad B: Tum numerorum alter, putà B A, super alterum B C



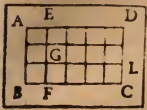


vnâ cum ſuis diuiſionum punctis fluere concipiatur: generabitur numerus planus A B C D. Siue rectangulum Arithmeticum: dicetúrque huiuſmodi numerus generari ex ductu, ſiue multiplicatione numeri B A in numerum B C.

Quemadmodum autem (rem nota obſeruatione digniſſimam, grauiſſimíſque difficultatibus occurrentem) per fluxum lineæ B A ſuper linea B C generatur rectangulum Geometricum A B C D: quod ad quantitatis genus à linearum à quibus procreatum eſt, genere diuerſum pertinet, nempe ad ſuperficiem: Ita etiam numerus ille rectangulus A B C D per ductum numeri A B in numerum B C genitus, diuerſi cenſeri debet generis, à genere numerorum B A, B C; qui in ſe ducti, ſiue multiplicati fuerunt. Quamuis enim numerus, quatenus eſt præciſè vnitatum compoſita multitudo, tria illa quantitatis continuæ genera lineam, ſuperficiem, &c. corpus non agnoſcat: Tamen ſi varia numerorum generatio attendatur; qua vnus, vel per multiplicationem alterius, vel per diuiſionem producitur: numeris proprietates accidunt: quæ ipſos in varias ſpecies diſtinguere ſuadent: nec tantùm in tres illas vulgares quantitati continuæ proprias, lineam, ſuperficiem & corpus; in quâ nec plures concipi, nedum eſſe poſſunt: Sed etiam alias ipsâ etiam ſoliditate ſolidiores. Dantur enim numeri ſuperſolidi infiniti, vt ex variis multiplicationibus producuntur; qui ſuis non carent facultatibus, vt optimè norunt, qui Algebraicâ Analyſi delectantur verùm de ſuperſolidis huiuſmodi numeris alius recurret fuſiùs differendi locus libro 3. Cum de extractione radicis cuiuſlibet à quolibet numero agetur: nunc interim plani numeri expoſitionem ex propoſitâ ratione proſequor. Dum ergo numerus, qui ex duobus ſeſe multiplicantibus producitur, planus, atque adeò rectangulus vocatur: hanc denominationem, non ratione formæ (ea enim, vt ex definitione multiplicationis Prop. 28. allatâ conſtat, in eo ſita eſt, vt multiplicatus toties componatur; quot ſunt in multiplicante vnitates) ſed ratione materiæ ſibi comparat: quatenùs duo numeri ſeſe multiplicantes, non vt abſtracti; ſed vt concreti, & lineis duabus in particulas ſectis addicti cenſentur. Quomodo ſi concipiantur duo ſeſe multiplicantes numeri B A, B C; rectangulum A B C D generare cenſentur; meritóque ab Euclide citato, eius dicuntur latera.

Vt autem Arithmeticum huiuſmodi rectangulum: quod reuerà ex duobus numeris in ſe ductis procreatur; multiplicationis definitio complectatur: alteruter, vt A B, iam planus cenſeri debet (quomodo enim planus niſi ex plano componi queat?) cenſebitur ergo A B planus eſſe numerus rectangulus: qui ſcilicet generetur ex vnitate in ſe ductâ, ſiue qua-

dratâ, multiplicatâ per numerum A B. In hoc schemate sume particulam



B F vnam ex particulis totius numeri B C; super quâ statuatur quadratum B G, ductâ nimirum vnitate B F concretâ, & lineæ B F addictâ, in se. Iam si hoc quadratum B G multiplicetur per numerum B A; id est, toties componatur quot sunt in numero B A vnitates, siue lineolæ partiales: procreabitur numerus planus B E, tot numeros planos vnitatis plano B G æquales continens: quot sunt in B A vnitates; siue particulæ totius lineæ A B Atque ita productus numerus B E planus toties componetur ex plano vnitatis B G (qui est multiplicatus) quot sunt in multiplicante A B vnitates: eique proinde numero B E apprimè conueniet multiplicationis definitio. Non secùs iam planus totus B D (sic duobus characteribus è diametro oppositis designari rectangula consueuere) rectè componi dicetur toties ex numero plano B E multiplicato; quot sunt in multiplicante B C vnitates, siue lineolæ partiales; quibus constat tota linea, siue numerus B C. Ac proinde multiplicationis definitum: quod cum definitione conuerti debet; huic numero plano B D rectè conueniet.

Illud vnum obseruandum restat. Nimirum planum numerum B E, ex numero lineari A B in planum B G vnitatis ducto genitum, eundem esse cum ipsomet lineari A B: æqualis enim est lineolarum partialium, quibus constat linea A B, multitudo, multitudini partialium planorum plano B G æqualium, ex quibus conficitur planus B E. Ita vt eodem numero exprimatur, & linea A B; & planus numerus B G. eodem, inquam, ratione formæ, non ratione materiæ. Vnitas enim nec multiplicans nec diuidens vel se vel alios numeros immutandi nata est.

PROP. XXX. *Definit.*

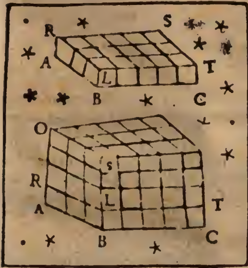
Numerus solidus est; qui à tribus numeris sese mutuò multiplicantibus procreatur. Tres autem sese multiplicantes numeri; illius latera dicuntur.

Expositio.

Quò fusior extitit præcedentis definitionis expositio: eò breuior huius futura est. Vtrique enim illa congruit, exceptâ solùm plani & solidi ratione. Quæcumque enim illic, siue de homine, siue de generatione, obseruata sunt; huc apprimè faciunt. Solidi enim nomine, illi soli numeri absolutè

absolutè dicendi veniunt: qui ex trium numerorum multiplicatione mutua generantur: quamuis infiniti alij reperiantur; qui ex suo genere solidi vocari debeant: vt Pyramidales, Cylindrici, Octaëdri, Dodecaëdri, Icosaëdri, & alij minus regulares innumeri. Quorum rarus & exiguus est vsus in Arithmeticis. Continentur autem hi de quibus agimus, solidi ex tribus numeris in se ductis geniti, tribus rectangulis: tribus, inquam, iuxta vsurpatum à Geometris loquendi modum; qui vt quadrangulare prisma, siue Parallelepipedum, sex licet rectangulis clausum & circumscriptum, tamen tribus solùm contineri aiunt, nec abs re: cum tria reliqua his tribus opposita, eisdem sint & æqualia, & similia.

Quomodo autem absoluatur horum solidorum generatio aperiendum est: quando ex eâ non parùm lucis suo loco tractandis accessurum est. Concipe igitur ex trium numerorum duos B A, B C, in se duci; qui, vt Prop. antecedente exposui, planum numerum A C generant: qui basis sit solidi futuri. Sumatur autem lineola B L æqualis lineolis reliquis laterum B A, B C, quæ & ipsa vnitatem repræsentet; ducatur verò ad basim A C perpendicularis, eique & æquales & ad eandem basim perpendiculares statuantur A R, C T. Ductisque lineis reliquis construatur solidum R C: quod iuxta particulas, in quas diuisæ sunt lineæ B A, B C, distinctum concipiatur in plura solida minora (quæ cubica sunt) & quidem tot numero: quot in base A C quadratula continentur: hæc enim singula, singulæ sunt bases minorum illorum solidorum, totum solidum R C constituentium. Fit ergo numerus solidus R C ex numero plano, quem basis A C exprimit; si hic per vnitatem B L multiplicetur: ita vt planus A C, & solidus R, ratione quidem materiæ, cui applicantur differant; non differant ratione formæ numeri. Iam verò huic solido R C plura æqualia pariter in minora solida, distributa superponi concipe: tot scilicet, quot vnitates continet tertius numerus; qui cum duobus B A, B C iam in se ductis, & planum A C producentibus, multiplicari debet: habebis numerum solidum O C pluribus solidis minoribus constantem; quem tres numeri B A, B C, & ter-

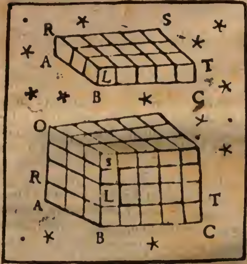


eorum vnus ducatur in alterum: tùm productus hic ducatur in tertium. Dico eundem numerum generandum quouis ordine ad multiplicationem absoluendam assumantur. Vt si primo loco A & B in se ducantur; genitumque tertius C multiplicet. Vel, si B & C multiplicentur; tum A, in productum ducatur. Vel denique B multiplicet ortum ex multiplicatione numerorum A & C

Demonstratio

A 3 B 5 C 4
D 60

Tres numeri A, B, C sese multiplicantes, quisquis tandem inter multiplicandum ordo seruetur, solidum numerum, siue Parallelepipedum generant, per Prop. 30. sit ille solidus O C. Cuius tria latera B A, B S, B C, sint tres ex hypothesi numeri A B C: latus quidem B A, sit numerus A; B S sit numerus B; ac denique A C sit C. Si igitur B A (siue A 3) multiplicet B S (hoc est B 5) generabit planum B O 15. Planus hic multiplicetur tanquam basis per tertium numerum B C (siue C 4) tanquam per altitudinem: generabitur solidus numerus O C. (60) Quem eundem assero generari: si duo latera B 5, C 4, in se ducantur, & productus 20 ducatur in A 3. Nam B, S & B C; hoc est, numeri, B 5, & C 4; in se ducti, planum S C producunt: in quem tanquam basim si ducatur A B, siue A 3 fiet rursùs idem solidus numerus O C 60. Quod si denique ducatur B A in B C (hoc est, A 3 primus in C 4 tertium) fiet Planus numerus A C 12. Hic igitur multiplicetur per B S (siue B 5) altitudinem: nunquid non idem solidus O C 60, qui prius ex aliis multiplicationibus productus fuerat, generabitur? Quouis ergo ordine tres numeri A, B C multiplicentur; semper idem solidus O C producetur. Ex duobus scilicet quibuslibet eorum in se ductis aliqua trium basium vel B O, vel A C, vel S C producetur: in quam ductus tertius numerus vel B C, vel B S,



vel

vel B A tanquam altitudo Idem solidus O C enascatur. Quouis enim ordine incatur multiplicatio, semper habebuntur tres plani B O, A C, S C eundem solidum O C comprehendentes: atque adeo semper æquales.

A 3	B 5	C 4	D 2	
E 15				

Iam verò si plures numeri, vt quatuor A, B, C, D in se ducantur: ostendo eundem semper numerum solidum ex multiplicatione generari quocumque ordine initâ multiplicatione. Nam si planus E 15 ex multiplicatione A B, genitus, vt linearis vsurpetur (ita enim vsurpari posse ostensum est superius) tres habebuntur numeri E 15, C 4, D 2: qui in se duci debent. Tres autem quouis ordine in se ducti, eundem semper solidum generant. Ergo & quatuor, quouis ordine ducti eundem generabunt. Ergo & quinque, & sex, & quotcumque, eundem propter eandem rationem numerum producent. Quinque enim numeri, ad quatuor: quatuor demum ad tres reuocabuntur; tres autem eundem semper solidum, vt ostensum est, producent. Quare si tres, aut plures numeri &c. Quod probandum erat.

PROP. XXXIII. *Defin.*

Si duo numeri æquales in se ducantur, qui gignitur planus numerus, quadratus dicitur: si verò tres æquales multiplicentur: solidus productus, dicitur Cubus.

Expositio.

Ex duobus quibuscumque numeris siue æqualibus, siue inæqualibus, in se ductis generatur numerus: qui planus genericè vocatur ex Prop. 29. At si duo numeri in se ducti, æquales sint; plani speciem producunt, quæ quadratus dicitur, & ab Eucl. lib. 7. Defin. 18. definitur planus numerus æqualiter æqualis, siue qui sub æqualibus numeris continetur.

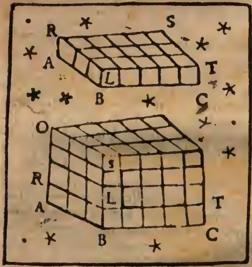
Quod si tres numeri in se ducantur solidus generatur: sed solidorum omnium illi soli dici debent cubi: qui ex tribus numeris æqualibus in se ductis producuntur: quos propterea Euclides lib. 7. defin. 19. vocat æqualiter æquales æqualiter, vel, sub tribus numeris æqualibus contentos. Talis erit Solidus O C in schemate Propositionis antecedentis: si tres numeri B A, B S, B C. qui suâ multiplicatione illum generant, fuerint æquales, vt 4. si enim sumantur quater quatuor, quater; fiet cubus 64. siue solidus æqualiter æqualis æqualiter, aut sub tribus numeris 4, 4, 4 æqualibus contentus.

eorum vnus ducatur in alterum: cùm productus hic ducatur in tertium. Dico eundem numerum generandum quouis ordine ad multiplicationem absoluendam assumantur. Vt si primo loco A & B in se ducantur; genitumque tertius C multiplicet. Vel, si B & C multiplicentur; tum A, in productum ducatur. Vel denique B multiplicet ortum ex multiplicatione numerorum A & C

Demonstratio

A 3 B 5 C 4
D 60

Tres numeri A, B, C sese multiplicantes, quisquis tandem inter multiplicandum ordo seruetur, solidum numerum, siue Parallelepipedum generant, per Prop. 30. sit ille solidus O C. Cuius tria latera B A, B S, B C, sint tres ex hypothesi numeri A B C: latus quidem B A, sit numerus A; B S sit numerus B; ac denique A C sit C. Si igitur B A (siue A 3) multiplicet B S (hoc est B 5) generabit planum B O 15. Planus hic multiplicetur tanquam basis per tertium numerum B C (siue C 4) tanquam per altitudinem: generabitur solidus numerus O C. (60) Quem eundem assero generari: si duo latera B 5, C 4, in se ducantur, & productus 20 ducatur in A 3. Nam B, S & B C; hoc est, numeri, B 5, & C 4; in se ducti, planum S C producunt: in quem tanquam basim si ducatur A B, siue A 3 fiet rursùs idem solidus numerus O C 60. Quod si denique ducatur B A in B C (hoc est, A 3 primus in C 4 tertium) fiet Planus numerus A C 12. Hic igitur multiplicetur per B S (siue B 5) altitudinem: nunquid non idem solidus O C 60, qui prius ex aliis multiplicationibus productus fuerat, generabitur? Quouis ergo ordine tres numeri A, B C multiplicentur; semper idem solidus O C producetur. Ex duobus scilicet quibuslibet eorum in se ductis aliqua trium basium vel B O, vel A C, vel S C producetur: in quam ductus tertius numerus vel B C, vel B S,



vel

vel B A tanquam altitudo Idem ſolidus O C enaſcetur. Quouis enim ordine incatur multiplicatio, ſemper habebuntur tres plani B O, A C, S C eundem ſolidum O C comprehendentes: atque adeo ſemper æquales.

A 3 B 5 C 4 D 2
E 15

Iam verò ſi plures numeri, vt quatuor A, B, C, D in ſe ducantur: oſtendo eundem ſemper numerum ſolidum ex multiplicatione generari quocumque ordine initâ multiplicatione. Nam ſi planus E 15 ex multiplicatione A B, genitus, vt linearis vſurpetur (ita enim vſurpari poſſe oſtenſum eſt ſuperius) tres habebuntur numeri E 15, C 4, D 2: qui in ſe duci debent. Tres autem quouis ordine in ſe ducti, eundem ſemper ſolidum generant. Ergo & quatuor, quouis ordine ducti eundem generabunt. Ergo & quinque, & ſex, & quotcumque, eundem propter eandem rationem numerum producent. Quinque enim numeri, ad quatuor: quatuor demum ad tres reuocabuntur; tres autem eundem ſemper ſolidum, vt oſtenſum eſt, producent. Quare ſi tres, aut plures numeri *&c.* Quod probandum erat.

PROP. XXXIII. *Defin.*

Si duo numeri æquales in ſe ducantur, qui gignitur planus numerus, quadratus dicitur: ſi verò tres æquales multiplicentur: ſolidus productus, dicitur Cubus.

Expoſitio.

Ex duobus quibuſcumque numeris ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, in ſe ductis generatur numerus: qui planus genericè vocatur ex Prop. 29. At ſi duo numeri in ſe ducti, æquales ſint; plani ſpeciem producunt, quæ quadratus dicitur, & ab Eucl. lib. 7. Defin. 18. definitur planus numerus æqualiter æqualis, ſiue qui ſub æqualibus numeris continetur.

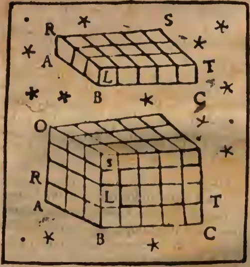
Quod ſi tres numeri in ſe ducantur ſolidus generatur: ſed ſolidorum omnium illi ſoli dici debent cubi: qui ex tribus numeris æqualibus in ſe ductis producuntur: quos propterea Euclides lib. 7. defin. 19. vocat æqualiter æquales æqualiter, vel, ſub tribus numeris æqualibus contentos. Talis erit Solidus O C in ſchemate Propoſitionis antecedentis: ſi tres numeri B A, B S, B C. qui ſuâ multiplicatione illum generant, fuerint æquales, vt 4. ſi enim ſumantur quater quatuor, quater; fiet cubus 64, ſiue ſolidus æqualiter æqualis æqualiter, aut ſub tribus numeris 4, 4, 4 æqualibus contentus.

eorum vnus ducatur in alterum: tùm productus hic ducatur in tertium. Dico eundem numerum generandum quouis ordine ad multiplicationem abſoluendam aſſumantur. Vt ſi primo loco A & B in ſe ducantur; genitumque tertius C multiplicet. Vel, ſi B & C multiplicentur; tum A, in productum ducatur. Vel denique B multiplicet ortum ex multiplicatione numerorum A & C

Demonſtratio

A 3 B 5 C 4
D 60

Tres numeri A, B, C ſeſe multiplicantes, quiſquis tandem inter multiplicandum ordo ſeruetur, ſolidum numerum, ſiue Parallelepipedum generant, per Prop. 30. ſit ille ſolidus O C. Cuius tria latera B A, B S, B C, ſint tres ex hypotheſi numeri A B C: latus quidem B A, ſit numerus A; B S ſit numerus B; ac denique A C ſit C. Si igitur B A (ſiue A 3) multiplicet B S (hoc eſt B 5) generabit planum B O 15. Planus hic multiplicetur tanquam baſis per tertium numerum B C (ſiue C 4) tanquam per altitudinem: generabitur ſolidus numerus O C. (60) Quem eundem aſſero generari: ſi duo latera B 5, C 4, in ſe ducantur, & productus 20 ducatur in A 3. Nam B, S & B C; hoc eſt, numeri, B 5, & C 4; in ſe ducti, planum S C producunt: in quem tanquam baſim ſi ducatur A B, ſiue A 3 fiet rurſùs idem ſolidus numerus O C 60. Quod ſi denique ducatur B A in B C (hoc eſt, A 3 primus in C 4 tertium) fiet Planus numerus A C 12. Hic igitur multiplicetur per B S (ſiue B 5) altitudinem: nunquid non idem ſolidus O C 60, qui prius ex aliis multiplicationibus productus fuerat, generabitur? Quouis ergo ordine tres numeri A, B C multiplicentur; ſemper idem ſolidus O C producetur. Ex duobus ſcilicet quibuſlibet eorum in ſe ductis aliqua trium baſium vel B O, vel A C, vel S C producetur: in quam ductus tertius numerus vel B C, vel B S,



vel

vel B A tanquam altitudo Idem solidus O C enascatur. Quouis enim ordine incatur multiplicatio, semper habebuntur tres plani B O, A C, S C eundem solidum O C comprehendentes: atque adeo semper æquales.

A 3 B 5 C 4 D 2	
E 15	

Iam verò si plures numeri, vt quatuor A, B, C, D in se ducantur: ostendo eundem semper numerum solidum ex multiplicatione generari quocumque ordine initâ multiplicatione. Nam si planus E 15 ex multiplicatione A B, genitus, vt linearis vsurpetur (ita enim vsurpari posse ostensum est superius) tres habebuntur numeri E 15, C 4, D 2: qui in se duci debent. Tres autem quouis ordine in se ducti, eundem semper solidum generant. Ergo & quatuor, quouis ordine ducti eundem generabunt. Ergo & quinque, & sex, & quotcumque, eundem propter eandem rationem numerum producent. Quinque enim numeri, ad quatuor: quatuor demum ad tres reuocabuntur; tres autem eundem semper solidum, vt ostensum est, producent. Quare si tres, aut plures numeri &c. Quod probandum erat.

PROP. XXXIII. *Defin.*

Si duo numeri æquales in se ducantur, qui gignitur planus numerus, quadratus dicitur: si verò tres æquales multiplicentur: solidus productus, dicitur Cubus.

Expositio.

Ex duobus quibuscumque numeris siue æqualibus, siue inæqualibus, in se ductis generatur numerus: qui planus genericè vocatur ex Prop. 29. At si duo numeri in se ducti, æquales sint; plani speciem producunt, quæ quadratus dicitur, & ab Eucl. lib. 7. Defin. 18. definitur planus numerus æqualiter æqualis, siue qui sub æqualibus numeris continetur.

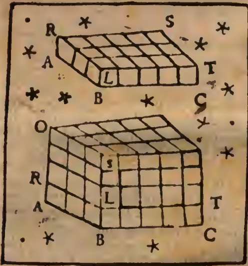
Quod si tres numeri in se ducantur solidus generatur: sed solidorum omnium illi soli dici debent cubi: qui ex tribus numeris æqualibus in se ductis producuntur: quos propterea Euclides lib. 7. defin. 19. vocat æqualiter æquales æqualiter, vel, sub tribus numeris æqualibus contentos. Talis erit Solidus O C in schemate Propositionis antecedentis: si tres numeri B A, B S, B C. qui suâ multiplicatione illum generant, fuerint æquales, vt 4. si enim sumantur quater quatuor, quater; fiet cubus 64, siue solidus æqualiter æqualis æqualiter, aut sub tribus numeris 4, 4, 4 æqualibus contentus.

eorum vnus ducatur in alterum: tùm productus hic ducatur in tertium. Dico eundem numerum generandum quouis ordine ad multiplicationem abſoluendam aſſumantur. Vt ſi primo loco A & B in ſe ducantur; genitumque tertius C multiplicet. Vel, ſi B & C multiplicentur; tum A, in productum ducatur. Vel denique B multiplicet ortum ex multiplicatione numerorum A & C

Demonſtratio

A 3 B 5 C 4
D 60

Tres numeri A, B, C ſeſe multiplicantes, quiſquis tandem inter multiplicandum ordo ſeruetur, ſolidum numerum, ſiue Parallelepipedum generant, per Prop. 30. ſit ille ſolidus O C. Cuius tria latera B A, BS, B C, ſint tres ex hypotheſi numeri A B C: latus quidem B A, ſit numerus A; BS ſit numerus B; ac denique A C ſit C. Si igitur B A(ſiue A 3) multiplicet B S(hoc eſt B 5) generabit planum B O 15. Planus hic multiplicetur tanquam baſis per tertium numerum B C (ſiue C 4) tanquam per altitudinem: generabitur ſolidus numerus O C. (60) Quem eundem aſſero generari: ſi duo latera B 5, C 4, in ſe ducantur, & productus 20 ducatur in A 3. Nam B, S & B C; hoc eſt, numeri, B 5, & C 4; in ſe ducti, planum S C producunt: in quem tanquam baſim ſi ducatur A B, ſiue A 3 fiet rurſùs idem ſolidus numerus O C 60. Quod ſi denique ducatur B A in B C (hoc eſt, A 3 primus in C 4 tertium) fiet Planus numerus A C 12. Hic igitur multiplicetur per B S (ſiue B 5) altitudinem: nunquid non idem ſolidus O C 60, qui prius ex aliis multiplicationibus productus fuerat, generabitur? Quouis ergo ordine tres numeri A, B C multiplicentur; ſemper idem ſolidus O C producetur. Ex duobus ſcilicet quibuſlibet eorum in ſe ductis aliqua trium baſium vel B O, vel A C, vel S C producetur; in quam ductus tertius numerus vel B C, vel B S,



vel

vel B A tanquam altitudo Idem solidus O C enascetur. Quouis enim ordine incatur multiplicatio, semper habebuntur tres plani B O, A C, S C eundem solidum O C comprehendentes: atque adeo semper æquales.

A 3	B 5	C 4	D 2
E 15			

Iam verò si plures numeri, vt quatuor A, B, C, D in se ducantur: ostendo eundem semper numerum solidum ex multiplicatione generari quocumque ordine initâ multiplicatione. Nam si planus E 15 ex multiplicatione A B, genitus, vt linearis vsurpetur (ita enim vsurpari posse ostensum est superius) tres habebuntur numeri E 15, C 4, D 2: qui in se duci debent. Tres autem quouis ordine in se ducti, eundem semper solidum generant. Ergo & quatuor, quouis ordine ducti eundem generabunt. Ergo & quinque, & sex, & quotcumque, eundem propter eandem rationem numerum producent. Quinque enim numeri, ad quatuor: quatuor demum ad tres reuocabuntur; tres autem eundem semper solidum, vt ostensum est, producent. Quare si tres, aut plures numeri &c. Quod probandum erat.

PROP. XXXIII. *Defin.*

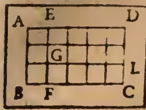
Si duo numeri æquales in se ducantur, qui gignitur planus numerus, quadratus dicitur: si verò tres æquales multiplicentur: solidus productus, dicitur Cubus.

Expositio.

Ex duobus quibuscumque numeris siue æqualibus, siue inæqualibus, in se ductis generatur numerus: qui planus genericè vocatur ex Prop. 29. At si duo numeri in se ducti, æquales sint; plani speciem producunt, quæ quadratus dicitur, & ab Eucl. lib. 7. Defin. 18. definitur planus numerus æqualiter æqualis, siue qui sub æqualibus numeris continetur.

Quod si tres numeri in se ducantur solidus generatur: sed solidorum omnium illi soli dici debent cubi: qui ex tribus numeris æqualibus in se ductis producuntur: quos propterea Euclides lib. 7. defin. 19. vocat æqualiter æquales æqualiter, vel, sub tribus numeris æqualibus contentos. Talis erit Solidus O C in schemate Propositionis antecedentis: si tres numeri B A, B S, B C. qui suâ multiplicatione illum generant, fuerint æquales, vt 4. si enim sumantur quater quatuor, quater; fiet cubus 64, siue solidus æqualiter æqualis æqualiter, aut sub tribus numeris 4, 4, 4 æqualibus contentus.

dratâ, multiplicatâ per numerum A B. In hoc ſchemate ſume particulam



B F vnam ex particulis totius numeri B C ; ſuper quâ ſtatuatur quadratum B G, ductâ nimirum vnitate B F concretâ, & lineæ B F addictâ, in ſe. Iam ſi hoc quadratum B G multiplicetur per numerum B A ; id eſt, toties componatur quot ſunt in numero B A vnitates, ſiue lineolæ partiales : procreabitur numerus planus B E, tot numeros planos vnitatis plano B G æquales continens : quot ſunt in B A vnitates ; ſiue particulæ totius lineæ A B Atque ita productus numerus B E planus toties componetur ex plano vnitatis B G (qui eſt multiplicatus) quot ſunt in multiplicante A B vnitates : eíque proinde numero B E apprimè conueniet multiplicationis definitio. Non ſecùs iam planus totus B D (ſic duobus characteribus è diametro oppoſitis deſignari rectangula conſueuere) rectè componi dicetur toties ex numero plano B E multiplicato ; quot ſunt in multiplicante B C vnitates, ſiue lineolæ partiales ; quibus conſtat tota linea, ſiue numerus B C. Ac proinde multiplicationis definitum : quod cum definitione conuerti debet ; huic numero plano B D rectè conueniet.

Illud vnum obſeruandum reſtat. Nimirum planum numerum B E, ex numero lineari A B in planum B G vnitatis ducto genitum, eundem eſſe cum ipſomet lineari A B : æqualis enim eſt lineolarum partialium, quibus conſtat linea A B, multitudo, multitudini partialium planorum plano B G æqualium, ex quibus conficitur planus B E. Ita vt eodem numero exprimatur, & linea A B ; & planus numerus B G. eodem, inquam, ratione formæ, non ratione materiæ. Vnitas enim nec multiplicans nec diuidens vel ſe vel alios numeros immutandi nata eſt.

PROP. XXX. *Definit.*

Numerus ſolidus eſt ; qui à tribus numeris ſeſe mutuò multiplicantibus procreatur. Tres autem ſeſe multiplicantes numeri ; illius latera dicuntur.

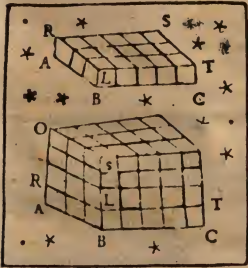
Expoſitio.

Quò fuſior extitit præcedentis definitionis expoſitio : eò breuior huius futura eſt. Vtrique enim illa congruit, exceptâ ſolùm plani & ſolidi ratione. Quæcumque enim illic, ſiue de homine, ſiue de generatione, obſeruata ſunt ; huc apprimè faciunt. Solidi enim nomine, illi ſoli numeri

abſolutè

abſolutè dicendi veniunt: qui ex trium numerorum multiplicatione mutua generantur: quamuis infiniti alij reperiantur; qui ex ſuo genere ſolidi vocari debeant: vt Pyramidales, Cylindrici, Octaëdri, Dodecaëdri, Icoſaëdri, & alij minus regulares innumeri. Quorum rarus & exiguus eſt vſus in Arithmeticis. Continentur autem hi de quibus agimus, ſolidi ex tribus numeris in ſe ductis geniti, tribus rectangulis: tribus, inquam, iuxta vſurpatum à Geometris loquendi modum; qui vt quadrangulare priſma, ſiue Parallelepipedum, ſex licet rectangulis clauſum & circumſcriptum, tamen tribus ſolùm contineri aiunt, nec abs re: cum tria reliqua his tribus oppoſita, eiſdem ſint & æqualia, & ſimilia.

Quomodo autem abſoluatur horum ſolidorum generatio aperiendum eſt: quando ex eâ non parùm lucis ſuo loco tractandis acceſſurum eſt. Concipe igitur ex trium numerorum duos B A, B C, in ſe duci; qui, vt Prop. antecedente expoſui, planum numerum A C generant: qui baſis ſit



ſolidi futuri. Sumatur autem lineola B L æqualis lineolis reliquis laterum B A, B C, quæ & ipſa vnitatem repræſentet; ducatur verò ad baſim A C perpendicularis, eique & æquales & ad eandem baſim perpendiculares ſtatuantur A R, C T. Ductíſque lineis reliquis conſtruatur ſolidum R C: quod iuxta particulas, in quas diuiſæ ſunt lineæ B A, B C, diſtinctum concipiatur in plura ſolida minora (quæ cubica ſunt) & quidem tot numero: quot in baſe A C quadratula continentur: hæc enim ſingula, ſingulæ ſunt baſes minorum illorum ſolidorum, totum ſolidum R C conſtituentium. Fit ergo numerus ſolidus R C ex numero plano, quem baſis A C exprimit; ſi hic per vnitatem B L multiplicetur: ita vt planus A C, & ſolidus R, ratione quidem materiæ, cui applicantur differant; non differant ratione formæ numeri. Iam verò huic ſolido R C plura æqualia pariter in minora ſolida, diſtributa ſuperponi concipe: tot ſcilicet, quot vnitates continet tertius numerus; qui cum duobus B A, B C iam in ſe ductis, & planum A C producentibus, multiplicari debet: habebis numerum ſolidum O C pluribus ſolidis minoribus conſtantem; quem tres numeri B A, B C, & ter-

tius ille, quem linea, B S in particulas particulæ B L æquales diuisa exprimit; in se mutuò ducti producunt. Qui quidem solidus idem semper futurus est quocumque ordine ineatur illa trium numerorum multiplicatio, vt Prop. 32. dicetur.

Corollarium.

Ex huius & præcedentis Propositionis Expositione colligitur quomodo vnitas, vel se, vel alium quemlibet numerum multiplicans, etsi nullam quoad multitudinem, mutationem inuehat: euehat tamen per huiusmodi multiplicationem, & seipsam, & cæteros numeros ad aliud numeri genus, non tantùm plani & solidi; sed etiam quorumcumque supersolidorum, eísque nouam denominationem tribuat: adeò vt quilibet numerus, generis cuiusuis dici possit.

Scholium.

Hic demùm obserues quàm aptiùs exprimantur numeri assumptis lineolis æqualibus, vel lineis in partes æquales diuisis; quàm, vt fieri consueuit, punctulorum multitudine. Hæc enim haudquaquam summam illam affinitatem demonstrent: quæ continuam inter & discretam quantitatem intercedit: quam lineæ ita proponunt, vt non pauca tum Theoremata tum Problemata vtrique æque conueniant; ac de alterà, concepta, alteri suapte naturà applicari possint. Tales sunt ipsius libri secundi elementorum propositiones omnes. Tales libri sexti quàm plurimæ. Tales decimi, tales denique quæcumque de rectangulis & Parallelepipedis adduci possunt, si præsertim à numerorum rationibus ipsi surdi numeri, vt excludi non debent, non excludantur. Adeò tutò assumi possint numerorum loco, tum lineæ, tum rectangula, tum Parallelepipeda, etiam absque vlla sectionis in particulas facta mentione, vt sæpiùs in posterum vsurpati continget.

PROP. XXXI. *Theorema.*

Si duo numeri sese mutuò multiplicent vterque multiplicati, vterque multiplicantis numeri munere fungi potest, ac nomen obtinere: vnúsque ac idem ex multiplicatione orietur numerus planus.

Expositio

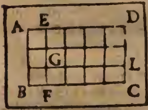
Expositio.

Propositio hæc cum propositione 16. lib. 7. Elementorum coincidit. Vbi sic fatur Geometra. *Si duo numeri mutuò sese multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis æquales inter se erunt.* Afferit scilicet si duo numeri proponantur A & B : quorum A, vt multiplicans ducatur in B vt multiplicatum, & producat C hoc est, iuxta Propositionem 28. toties componatur B : quot sunt in A vnitates. Deinde *mutuò* hoc est, reciprocè (sic illam vocem interpretor) B fiat multiplicans, & A multiplicatus; toties scilicet componatur A; quot vnitates continet B; vnde procreetur D: afferit inquam, duos numeros C, & D esse æquales: ita vt æqualis producatur numerus, siue dicatur numerus, siue dicatur ter quinque; siue quinquies tria. Hoc est, vt enunciaui, siue A sit multiplicans, & B multiplicatus; siue contrà.

A 3. B 5 : C 15	
B 5. A 3. D 15	

Demonstratio.

Exprimantur duo numeri A & B duabus lineis B A, B C ad perpendiculariter connexis; & absoluatur A C rectangulum rectis lineis per singulas vtriusque lineæ sectiones ductis craticulatim distinctum exhibet igitur rectangulum hoc, planum numerum ex duobus numeris A & B in se ductis genitum iuxta Propositionem 29. nec vlla in eo obseruabitur mutatio, siue B A multiplicet B C, siue à B C multiplicetur, vel quod idem est, siue rectangulum B L toties componatur iuxta Expositionem Propositionis 28. Quot sunt vnitates in numero B A : siue componatur rectangulum B E, toties; quot vnitates continet B C vtroque enim modo planus nnmerus A C generabitur. Quod erat ostendendum.



PROP. XXXII. *Theor.*

Si tres aut plures numeri sese multiplicent quocumque ordine ineatur multiplicatio: idem semper numerus generabitur.

Expositio.

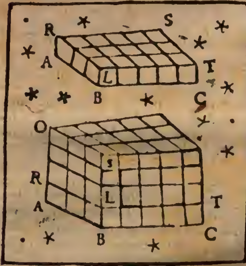
Sint primum tres numeri A, B, C. qui in se duci debent; id est ita, vt eorum

eorum vnus ducatur in alterum: tùm productus hic ducatur in tertium. Dico eundem numerum generandum quouis ordine ad multiplicationem abſoluendam aſſumantur. Vt ſi primo loco A & B in ſe ducantur; genitumque tertius C multiplicet. Vel, ſi B & C multiplicentur; tum A, in productum ducatur. Vel denique B multiplicet ortum ex multiplicatione numerorum A & C

Demonſtratio

A 3 B 5 C 4
D 60

Tres numeri A, B, C ſeſe multiplicantes, quiſquis tandem inter multiplicandum ordo ſeruetur, ſolidum numerum, ſiue Parallelepipedum generant, per Prop. 30. ſit ille ſolidus O C. Cuius tria latera B A, B S, B C, ſint tres ex hypotheſi numeri A B C: latus quidem B A, ſit numerus A; B S ſit numerus B; ac denique A C ſit C. Si igitur B A (ſiue A 3) multiplicet B S (hoc eſt B 5) generabit planum B O 15. Planus hic multiplicetur tanquam baſis per tertium numerum B C (ſiue C 4) tanquam per altitudinem: generabitur ſolidus numerus O C. (60) Quem eundem aſſero generari: ſi duo latera B 5, C 4, in ſe ducantur, & productus 20 ducatur in A 3. Nam B, S & B C; hoc eſt, numeri, B 5, & C 4; in ſe ducti, planum S C producunt: in quem tanquam baſim ſi ducatur A B, ſiue A 3 fiet rurſus idem ſolidus numerus O C 60. Quod ſi denique ducatur B A in B C (hoc eſt, A 3 primus in C 4 tertium) fiet Planus numerus A C 12. Hic igitur multiplicetur per B S (ſiue B 5) altitudinem: nunquid non idem ſolidus O C 60, qui prius ex aliis multiplicationibus productus fuerat, generabitur? Quouis ergo ordine tres numeri A, B C multiplicentur; ſemper idem ſolidus O C producetur. Ex duobus ſcilicet quibuſlibet eorum in ſe ductis aliqua trium baſium vel B O, vel A C, vel S C producetur; in quam ductus tertius numerus vel B C, vel B S,



vel

vel B A tanquam altitudo Idem solidus O C enascetur. Quouis enim ordine incatur multiplicatio, semper habebuntur tres plani B O, A C, S C eundem solidum O C comprehendentes: atque adeo semper æquales.

A 3 B 5 C 4 D 2	
E 15	

Iam verò si plures numeri, vt quatuor A, B, C, D in se ducantur: ostendo eundem semper numerum solidum ex multiplicatione generari quocumque ordine initâ multiplicatione. Nam si planus E 15 ex multiplicatione A B, genitus, vt linearis vsurpetur (ita enim vsurpari posse ostensum est superius) tres habebuntur numeri E 15, C 4, D 2: qui in se duci debent. Tres autem quouis ordine in se ducti, eundem semper solidum generant. Ergo & quatuor, quouis ordine ducti eundem generabunt. Ergo & quinque, & sex, & quotcumque, eundem propter eandem rationem numerum producent. Quinque enim numeri, ad quatuor: quatuor demum ad tres reuocabuntur; tres autem eundem semper solidum, vt ostensum est, producent. Quare si tres, aut plures numeri *&c.* Quod probandum erat.

PROP. XXXIII. *Defin.*

Si duo numeri æquales in se ducantur, qui gignitur planus numerus, quadratus dicitur: si verò tres æquales multiplicentur: solidus productus, dicitur Cubus.

Expositio.

Ex duobus quibuscumque numeris siue æqualibus, siue inæqualibus, in se ductis generatur numerus: qui planus genericè vocatur ex Prop. 29. At si duo numeri in se ducti, æquales sint; plani speciem producunt, quæ quadratus dicitur, & ab Eucl. lib. 7. Defin. 18. definitur planus numerus æqualiter æqualis, siue qui sub æqualibus numeris continetur.

Quod si tres numeri in se ducantur solidus generatur: sed solidorum omnium illi soli dici debent cubi: qui ex tribus numeris æqualibus in se ductis producuntur: quos propterea Euclides lib. 7. defin. 19. vocat æqualiter æquales æqualiter, vel, sub tribus numeris æqualibus contentos. Talis erit Solidus O C in schemate Propositionis antecedentis: si tres numeri B A, B S, B C. qui suâ multiplicatione illum generant, fuerint æquales, vt 4. si enim sumantur quater quatuor, quater; fiet cubus 64, siue solidus æqualiter æqualis æqualiter, aut sub tribus numeris 4, 4, 4 æqualibus contentus.

PROP. XXXIV. *Probl.*

Simplicem quamlibet figuram Arithmeticam per simplicem alteram figuram multiplicare.

Expositio.

Quemadmodum, vt numerorum pluribus figuris constantium Additio, & subtractio absoluatur: non totus ipse numerus simul & semel in operationem adhibetur: sed eum in varias partes figuris singulis distinctas; quò versentur à Logista facilius, secari necesse est: ita, vt totius alicuius numeri per alium multiplicatio ineatur, eadem industriâ vti conuenit. Singulæ scilicet numeri multiplicantis figuræ in figuras singulas multiplicati duci debent; vt deinde ex singulorum per huiusmodi multiplicationem genitorum numerorum collectione, totus ipse productus numerus innotescat. Pendet ergo in primis ars tota multiplicationis ex cognitione multiplicationis digiti numeri in digitum: quam propterea; claram, certam & ad opus maximè expeditam sibi prius comparasse necesse est, vt non immeritò plures nec inelegantes multiplicationis huiusmodi tradantur methodi quarum præcipuas à me non patiar hìc desiderari.

Constructio prima.

Celebris est hoc in negotio tum propter Authorem; tum propter vsum facilem, & iucundum tabella illa, quam à Pythagora iuuentore pythagoricam vocant. Eius constructionem, vsúmque ita paucis complector.

Quilibet ordo datur: deinceps se augente figurâ.
Alterutram summa in serie, in pendente secundam
Sume notam: dabit hinc genitum commune quadratum.

Constructio ergo ita habet, compone nouem illas vulgares significatiuas, siue digitos in duos ordines, vtrumque à prima figura 1 inchoatos: quorum vnus à læua ad dextram alter à summo deorsum pergat; ille est A B, hic verò A C

Tum

A — B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

C — D

Tum à ſingulis figuris alios ordines tam tranſuerſos, quam perpendiculares ordire ſingulis figuris ſibi ſemper additis iuxta illa verba *Quilibet ordo datur*, &c. (præſtat antè omnes huiuſmodi numeros Parallelogrammo Rectangulo craticulatim diſtributo A B D C complecti ad vſum faciliorem) ſi igitur ordo ſecundus vterque componendus eſt, qui à figura 2 inchoatur: adde ad 2 ipſammet figuram 2; vt fiat ſecundam vtriuſque ordinis ſedem occupaturus numerus 4. Ad 4 adde rurſum 2 vt fiat 6: ad 6 adde tertiò 2, fiet 8: adde 2 ad 8; fiet 10, *&c.* eóſque interim numeros ſingulis ſuis ſedibus in directum in vtroque ordine conſtitutis aſſigna; donec ad vltimam perueneris; hic enim eſt verborum illorum *deinceps ſe augente figura*, ſenſus. Ita in hunc modum reliquos ordines concinnabis, vt ſi figuram 8 addas ad ipſammet 8 fiet 16. Adde ad numerum 16, iterum 8; fiet 24 & ſic deinceps. Habebis duplicem ordinem, tranſuerſum, & perpendicularem à figura 8 inchoatum. Hæc eſt tota conſtructio Tabellæ: quâ ad figuræ cuiuſvis ſingularis multiplicationem per quamuis aliam ſingularem figuram ſic vteris.

Noſſe vis quis numerus producatur per multiplicationem figuræ 7 per figuram 8. Obſerua traditū hoc Præceptum *Alterutram ſumma in ſerie*, &c. Quære ſcilicet in Tabellæ tranſuerſo ordine A B, alterutram duarum notarum 7, 8, exempli gratiâ, 7: alteram autem 8 in ordine *pendente* hoc eſt, perpendiculari A C. Tum duorum ordinum, ſiue columnarum ab

K 2

his figuris inchoatharum *commune quadratum* in quo ſcilicet ſeſe interſecant ordines, attende: in eo enim habetur numerus, qui ex duabus illis figuris 7 & 8 in ſe mutuò ductis generatur, qualis eſt hic 56. Nec aliter reperietur productus numerus ex quarumcunque duarum figurarum multiplicatione.

Demonſtratio.

Petitur huius figuram per figuram multiplicationis ratio ex ipſius Tabellæ tradita conſtructione. Nam in exemplo allato duarum figurarum 7 & 8, ordo ille perpendicularis à figura 7 ſupremâ inchoatus generatur per continuam ſui additionem: ergo ſinguli numeri in eo ordine digeſti toties continent figuram 7; quot additiones ad illos vſque peractæ ſunt; vel, quoti ipſi ſunt à prima figura 7; vnde ſunt orti. Quoti autem ipſi ſint, demonſtrat altera columna prima A C, numeros ſimplices continens: ita vt commune quadratum in quo ſe interſecant, productum numerum exhibeat. Toties enim productus numerus 56 continet numerum 7; quoties alter 8 multiplicans continet vnitatem. Ergo per propoſitionem 28. numerus 56 is eſt, qui quæritur. Nec alia eſt ratio, ſi figura 8 in ordine A B ſumeretur; altera verò in ordine A C perpendiculari. Quare & Tabellam Pythagoricam conſtruximus, & ex ea productum numerum per multiplicationem figuræ ſimplicis in ſimplicem figuram hauſimus quod faciendum erat.

PROP. XXXV. *Probl.*

Figuram ſimplicem per aliam ſimplicem figuram alio modo multiplicare.

Conſtructio.

Perelegans ſanè eſt & maximè expedita per digitum digiti multiplicandi ratio proximè declarata: quæ tamen non caret incommodo: continget non rarò Tabellam illam Pythagoricam præ oculis non haberi. Alia igitur quædam ratio eiuſdem multiplicationis viſa eſt ineunda; quæ ſemper præſtò eſſe poſſit. Licet verò tanti non videatur eſſe negotij, nec tanti momenti multiplicatio huiuſmodi figuræ per figuram: vt aliquod operæ pretium videatur huic tradendæ pluribus immorari: tamen quia ſubtilitate non caret, multiplici præſertim eam abſoluendi initâ viâ; quam aperiam; nullâque hactenus, quod mirum in mirâ numerorum facultate, demonſtratione

ſtratione illuſtrata eſt: ideo & methodum multiplicem, & oſtenſiuam Probationem afferre ſtatui, tanquam inſtitutionibus, quas expono, maximè neceſſariam.

Conſtructio.

Ad læuam nota: & à denis diſcrimen earum
Ponitur ad dextram: quod ducitur. Inde figura
Signatur data: ſi duplex datur; vltima tantùm
Altera ſeruetur numero iungenda relicto
Poſt alternatim à numeris diſcrimen ademptum.

Quæratur numerus; qui à duabus figuris ſimplicibus 6 & 8 in ſe ductis generatur: eum aſſequeris hiſce Præceptis obſeruatis.

Præceptum 1. *Ad læuam nota: & à denis diſcrimen earum ponitur ad dextram.* Iubetur ſcilicet, vt duæ figuræ 6 & 8 multiplicandæ ad læuam ita ſcribantur; vt vna alteri ſubiiciatur, vt refert ſchema. Ad dextram verò è regione ſingularum ſtatuitur figura, quâ à denario diſtant ſingulæ. Sic vides ad dextram figuræ 6, poſitam eſſe 4: quæ eſt diſcrimen, quo figura 6 deficit à numero 10. Ita etiam figura 2, quâ 8 diſtat ab eodem numero 10, ad dextram reſpondet è regione ipſi figuræ 8.

6	X	4
8		2
4		8

Præceptum 2. *Quod ducitur: inde figura ſignatur data. Si duplex datur, vltima tantùm.* Duplex ſcilicet diſcrimen illud à denario, 4 & 2 mutuò ducitur: & figura 8 ex ea multiplicatione genita *ſignatur*, id eſt ſubſcribitur directè ipſis diſcriminibus 4 & 2, ex quibus orta eſt. Quod ſi ex multiplicatione duplicis huius differentiæ ad dextram poſitæ naſci contingat, vt continget non rarò; numerum duabus figuris ſcribendum; poſterior tantum figura illius, ſubſcribenda eſt, prior verò mente ſeruanda; quâ quid fieri debeat, dicetur ſtatim allato exemplo. Interim in poſito Paradigmate; in quo vnica figura 8 ex multiplicatione diſcriminum 4 & 2 gignitur: ſequens Præceptum obſeruari debet.

Præceptum 3. *Poſt alternatim à numeris diſcrimen ademptum.* Siue duplex, ſiue vnica figura naſcatur ex multiplicatione diſcriminum ſepoſitorum ad dextram: debet diſcrimen alterutrum, vel etiam vtrumque, ſi lubeat; à figura multiplicata, *alternatim*, ſiue decuſſatim, aut per diametrum oppoſita ſubtrahi. Vt hîc ſubtrahi debet diſcrimem 4, à figura 8, vel diſcrimen 2, à figura è diametro oppoſitâ, 6. Vtroque enim modo reliqua fiet figura 4, directè ſubſcribenda ipſis numeris multiplicandis 6

& 8. Quibus abſolutis habentur ſubſcriptæ duæ figuræ 4 & 8, numerum exprimentes, quem duæ figuræ 6 & 8 in ſe ductæ producunt: vt demonſtraturus ſum inferius.

Quando autem ex multiplicatione diſcriminum à denario producitur numerus duabus figuris conſtans. Vt ſi duæ figuræ 5 & 7 multiplicandæ ſint: quarum diſcrimina à denario, 5 & 3 ſeſe multiplicantia producunt 15 duabus figuris conſtantem: dixi iam quidem huius numeri 15, figuram poſteriorem 5 ſubſcribendam directè ipſis diſcriminibus 5 & 3; & priorem 1 memoriæ commendandam: iuxta illa verba. *Si duplex, vltima tantùm: altera ſeruetur* &c. Addenda ſcilicet eſt ſeruata illa figura 1 ad figuram 2, quæ relinquitur *poſt alternatim diſcrimen 5 ademptum* à figura oppoſita 7; vel diſcrimen 3 *ademptum* à figura 5.

5	X	5
7		3
3		5

Additâ autem figurâ 1 ad 2; fiet 3 figura ſubſcribenda numeris 5 & 7 multiplicandis: atque ita ſubſcriptus habebitur numerus 35; ille ipſe, quem duæ figuræ 5 & 7 in ſe mutuò ductæ producunt.

Atque hæc eſt praxis multiplicandi digiti in digitum, paſſim quidem vſurpari ſolita: ſed quæ propterea non minorem mereatur admirationem ob illam numerorum intertextam complicationem, vnde tamen numerus quæſitus obtineatur. Quam ante quàm demonſtro, alias affero huic quidem affines methodos; ſed quæ ob illam etiam varietatem maiorem moueant admirationem.

Proponantur ergo ſecundo duo digiti 7 & 6, Exempli gratiâ, multiplicandi: hi iuxta proximè traditam methodum in ſe ducti producunt numerum 42, vt habet ſchema oppoſitum. Vis eundem numerum 42 aſſequi aliâ methodo à præcedenti diuersâ, exceptâ præparatione numerorum (debent enim multiplicandæ figuræ 7 & 6, & earum diſcrimen à denario 3 & 4, ita vt priùs componi.) Sed his ita comparatis, in hunc modum operationem inſtitue. *M*ultiplica differentias 3 & 4 à denario orietur ex ea multiplicatione numerus 12: cuius poſteriorem figuram 2 ſubſcribes, ſeruatâ priore 1.

7	X	3
6		4
4		2

Tùm adde ſimul duos digitos 7 & 6 multiplicandos, producetur 13. huic demùm adde ſeruatam figuram 1; fiet 14. Abiice tanquam inutilem priorem huius numeri 14, figuram 1, poſteriore 4 ſubſcriptâ ipſis numeris. Ecce iam, quod vix tibi perſuadeas, numerum 42 ſubſcriptum: quem duo digiti 7 & 6 in ſe ducti producunt. Vis idem aliter obtinere? ita operare.

Tertio itaque diſpoſitis vt priùs numeris, & à denario diſcriminibus 3 & 4 multiplicatis, productíque 12 figura 2 ſubſcriptâ, memoriæque commendatâ priore 1: adde ipſas differentias à denario 3 & 4: & productum 7 deme à numero 10: ſi enim reliquo per hanc ſubtractionem numero 3 addas

das ſeruatam figuram 1 ; fiet 4, prior figura numeri 42 : qui producitur ex digitis 6 & 7 in ſe ductis.

Quartò iiſdem adhuc poſitis: conſtitutis ſcilicet tam digitis 6 & 7 multiplicandis; quàm eorum à denario differentiis 3 & 4. Multiplica alterutram differentiarum, verbi gratia 4 in digitum 7 decuſſatim, ſiue diametraliter oppoſitum: & productum 28 ſubtrahe ab eodem digito 7, in articulum 70 per appoſitionem figuræ 0 conuerſo : remanebit hac ſubtractione peractâ numerus 42 : qui producitur ex digito 7 in digitum 6 multiplicato. Qui idem numerus 42 produceretur: ſi altera differentia 3 duceretur in ſibi oppoſitum digitum 6 : & productus numerus 18 ſubtraheretur à 60, nimirum à digito 6 itidem in articulum 60 per appoſitionem 0 commutato.

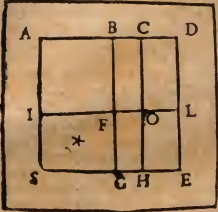
Mirum ſanè eſt, vt ante narrabam, tot variis modis haberi numerum; qui producitur ex multiplicatione digiti per digitum abſque illorum digitorum vllâ multiplicatione directè & explicitè inſtitutâ. Super quâ operatione, etſi non adeo multiplici, vt hic à me allata eſt, hic fuit Animi ſenſus Nobilis Mathematici Marij Bettini è Societate noſtrâ : cuius hæc eſt oratio Apiario 11 Progymn. 3. cap. 2. *Labor*, inquit, *& ingenium fœcundi Parentes ſunt inuentionum & nouarum & mirarum. Ac tibi nunc ſat eſto operationes prædictas ex effectu, & producto ipſo eſſe certiſſimas. Nam qui horum modorum Geometricas demonſtrationes moliti ſunt Doctorum iudicio rem obſcurarunt non illuſtrarunt. Interim ſatis erit admirari hanc proprietatem in multiplicatione Monadici numeri per Monadicum è differentiis eorum à 10 ortam: atque in hac admiratione eleuari ad laudem Dei; qui hanc, & infinitas alias proprietates miras indidit numeris: quarum cauſa nondum humano ingenio patuerunt.* Hæc ille & grauiter & piè. Quia tamen ſi in ſolâ effectuum admiratione mens humana conquieſceret, omni poſtpoſitâ cauſarum, vnde emanant, inueſtigatione; necdum parta foret admirationis proles Philoſophia : nec Creatoris ipſius laus, quo par eſt ſtudio, celebraretur : cum eius ſapientia in cauſarum diſpoſitione clariùs, quam in aperta effectuum productione eluceſcat : mecum ſuper hac difficultate cenſui tentandum genium : ne eximium alioqui Problema, & quas verſo, Arithmeticis Inſtitutionibus maximè dignum, demonſtratione careret impoſterum. Quam ſubiungo hoc præmiſſo ad eam colligendam lemmate neceſſario è Geometria petito iuxta modum numeros per lineas exprimendi à me vſurpari ſolitum.

Lemma.

Si recta linea A D in tres quaſcumque partes A B, B C, C D diuidatur: quadratum totius A D, vnà cum rectangulo ſub B D, D C, æquale eſt rectangulo

rectangulo sub tota A D, & parte D C, item sub tota A D, & parte D & denique sub partibus A C & A B.

Præparatio.



Vt clarius proponatur tota huius Lemmatis Demonstratio figura tam quadrati totius, quam rectangulorum, quorum hic habetur mentio, construenda est. Erigatur itaque super A D quadratum A E: cuius diameter A E secetur in F à linea B G ductâ perpendiculariter ad A D per punctum B. Deinde per F ducatur I L ad ipsam B G perpendicularis: quam lineam I L secet in O recta C H, ducta per alterum sectionis punctum C parallela lineæ B G, siue ad A D perpendicularis hac constitutâ haud admodum operosâ delineatione. Constat primò Rectangulum A D C æquale esse Rectangulo C E; est enim D E posita æqualis lineæ D A. Secundò constat Rectangulum I E æquale esse Rectangulo A D B. Nam I E æqualis est rectæ A D, & L E æqualis est lineæ D B, hæc enim in Parallelogrammo B E æqualis est lateri opposito G E: cui æqualis est ipsa L E, est siquidem L G quadratum. Tertiò denique constat Rectangulum O E æquale esse Rectangulo B D C. Nam, vt proximè dictum est, B D & L E sunt æquales: æquales autem sunt C D, & O L in Parallelogrammo C L. Quibus positis allata Propositio demonstrari desiderat quadratum A E vnâ cum rectangulo O E, siue B D C, æquale esse rectangulis C E, I E, & C I, siue rectangulis A D C, A D B, C A B.

Demonstratio

Quadratum A E æquale est rectangulis C I, C E, I H simul. Hæc enim rectangula tria, vt patet, ipsum totum quadratum A E tanquã partes adæquant & exhauriunt. Quadrato ergo A E, & tribus rectangulis illis C I, C E, I H addatur commune rectangulum O E fiet quadratum A E vnâ cum rectangulo O E, æquale rectangulis quatuor C I, C E, I H, O E, siue (rectangulo O E apposito ad rectangulum I H, vt ex duobus IH, OE vnicum fiat I E) tribus C I, C E, I E. Hoc est, tribus CAB, A D C, A D B. Sed rectangulum O E ostensum est æquale rectangulo sub B D & D C. Ergo quadratu m

tum ſub tota A D, vnà cum rectangulo B D C ſub partibus B D, D C comprehenſo æquale eſt rectangulis A D B, A D C, C A B. Quare ſi recta linea A D in tres partes, &c. Quod erat demonſtrandum. Eodem modo oſtenderetur idem quadratum A D vnà cum rectangulo C I, hoc eſt, rectangulo C A B (ſumptis loco partium B D, C D; partibus C A, B A) æquale eſſe tribus rectangulis D A C, D A B, B D C. Hoc eſt, tribus in Diagrammate expreſſis rectangulis A H, D I, O E. Eadem enim demonſtratio partibus C A, B A æque conuenit; ac partibus B D, C D, quæ fruſtrà repetatur.

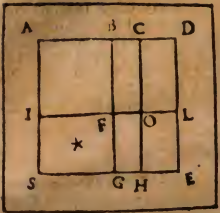
Obſeruatio.

Hic caſus quidam obſeruandus eſt. Nimirum, ſi recta A D non in tres partes, ſed in duas tantùm vt A B, B C diuidatur; verum etiam eſt Lemma allatum, eadémque demonſtratione oſtendi poteſt oſtendetur ſcilicet Rectangulum ſub totà D A, & parte A B bis ſumptum, ſiue Rectangula duo A L, A G (hæc enim comprehenduntur ſub tota A D, & parte A B) vnâ cum Rectangulo ſub reliqua parte B D & B D (hæc enim inſtar duarum B D, C D ſe habet ſeruatâ ſuppoſitione) hoc eſt, cum quadrato F E æqualia eſſe quadrato A E totius A D, vnâ cum quadrato B I alterius partis B A. Aút etiam, permutatis partibus A B B D, oſtendentur Rectangula duo B E, I E, (contenta ſub lineis, quæ æquales ſint toti A D, & parte B D) vna cum quadrato A F alterius partis A B; æqualia eſſe quadrato A E totius A D vnâ cum quadrato F E, alterius partis B D. Quod ipſum planè eſt; quod Prop. 7. lib. 2. Elementorum aſſeritur & probatur. Hoc ita conſtituto Lemmate apertiſſimi euadent omnes illi modi varij numerum aſſequendi, qui ex figura ſimplici in ſimplicem pariter figuram ductâ generatur: vt exigit Problema allatum eius itaque ſit

Demonſtratio.

Applicato præcedenti Lemmate ad numeros; ita colligemus probationem primæ ſolutionis: quæ ita habebat repetito ſchemate eiuſque conſtructione: Cum vtrique huic numero 6 & 7, apponatur differentia, 4 & 3; qua à numero 10 deficit: manifeſtum eſt numerum 10 ſecari bis in duas partes hoc in caſu vtrobique inæquales; ſemel quidem in 6 & 4; & iterum in 7 & 3 duas priores partes 6, & 4 exprimunt lineæ A B, B D, duas poſteriores,

	X	
6		4
7		3
4		2



lineæ A C, C D: totúmque numerum 10, tota linea A D designat.

Cum ergo quæratur numerus, qui fit ex digito 6 in digitum 7 quæritur Rectangulum C I comprehensum sub A I, hoc est A B 6, & sub A C 7: Est autem Rectangulum C I, siue C A B, vnà cum duobus Rectangulis I E, C E contentis, vt patet, sub totâ A D 10 & singulis partibus B D 4, & C D 3 æquale Quadrato A E 100, totius A D 10, vnà cum rectangulo O E contento sub B D 4 & C D 3, ex quorum multiplicatione producitur 12 expressus rectangulo O E. Quadratum ergo A E, vnà cum Rectangulo O E, est 112: & est æquale tribus rectangulis C I quæsito; & I E 40 (contento sub I L 10 & L E 4) & denique C E 30, sub C H 10, & C D 3.

Si igitur à quadrato A E, & simul rectangulo O E 112; & à tribus rectangulis C I, C E, I E æqualibus quadrato A E, & rectangulo O E, demantur duo rectangula I E 40, & C E 30, reliqua vtrimque erunt æqualia. Sed relinquitur ex tribus rectangulis C I, C E, I E post ablata duo rectangula C E, I E; rectangulum C I quæsitum. Ergo etiam idem C I reliquum fiet; si à quadrato A E, & rectangulo O E, quæ simul sunt numerus 112, demantur rectangula duo C E 30, & I E 40.

Sed iuxta traditam methodum, dum multiplicatis duobus à 10 differentiis 3 & 4; seruatóque ex ea multiplicatione genito numero 12, demitur decussatim 4 à 7, vel 3 à 6 & reliquo 4 additur seruatus numerus 12; demitur à 112 duplex rectangulum C E 30, & I E 40. Ergo relinquitur rectangulum C I 42 quæsitum ex multiplicatione digiti 6 in digitum 7 generatum.

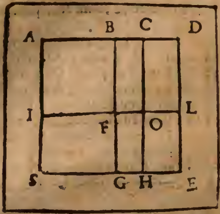
Probatur Assumptum. At quomodo cum à Proposito videatur tam alienum? Ecce quomodo. Censeri debet digitus vterque 6 & 7 multiplicandus in articulum 60 & 70 mutari, & quidem meritò: eò quod reliquus factus per subtractionem numerus 3 censeatur articulus 30, vt patet, cum præponatur figuræ 2 subscriptæ, vnà cum figura 1 seruatâ ex numero 12; quæ & ipsa reuerà est articulus 10, non autem digitus 1: vt fiat 40 ex 30: est enim figura illa 3 relicta per subtractionem 4 à 7, vel 3 à 6, assumens seruatum articulum 10, Gradûs secundi, siue ad decades pertinens habitâ ratione sequentis illius figuræ 2 subscriptæ. Quod confirmatur ex

co

eo quod in Planis numeris verſemur: demitur ſcilicet rectangulum C E 30 à numero 60, vel rectangulum I E 40 à numero 70; dum demi præcipitur figura 3 decuſſatim à figura 6, vel figura 4 à 7. nullâ factâ mentione figuræ O: quæ figuris illis omnibus adhæret: quæ per ſubtractionem ſupereſt immutata: demptâ enim figurâ O à figura O reſpondente, non alia quam eadem figura O reliqua fieri poteſt. Cum itaque ſimpliciter figura 3 decuſſatim demitur ab oppoſita figura 6, demi cenſetur numerus 30 à numero 60. Quod ſi ad numerum 60 addatur numerus 40; cui æquiualet figura illa 4, vt oſtenſum eſt, ipſi è regione poſita, quæque eſt differentia, qua figura 6 deficit à numero 10, vt fert constructio, fiet numerus 100: à quo demitur 30: ſed numerus 100 eſt quadratus A E. Ergo numerus 30, ſiue rectangulum C E, demi cenſetur à quadrato A E 100, dum rectangulum C E 30 demitur à numero 60. factâ autem ſubtractione rectanguli C E 30 à quadrato A E 100: remanet 70. cui ſi addatur rectangulum O E 12 natum ex multiplicatione C D 3 in D B 4: fiet numerus 82: qui ſupereſſet reliquus dempto C E 30 à numero 112, compoſito ex quadrato A E 100, & rectangulo O E 12. Probandum ergo reſtat dempto altero rectangulo I E 40 ex numero 82 relinqui rectangulum C I quæſitum: quandoquidem (vt memoriam ſuperiorum hîc neceſſariam refricem) demi debet duplex Rectangulum C E 30 & I E 40, ex numero 112 conflato ex aditione quadrati A E 100, & rectanguli O E 12, hoc autem ita probatur.

Dum duo rectangula C E 30, & I E 40 demi debeant à quadrato A E, & rectangulo O E, quæ ſimul ſunt 112; vt remaneat rectangulum C I quæſitum: ſubtractio illa perfici poteſt ſubtractis partibus ſubtrahendis, rectangulis ſcilicet C E 30 & I E 40, à partibus quibuſdam numeri illius maioris à quo fit ſubtractio; & reliquis in vnum additis per Prop. 26. in demonſtratione. Numeri ſcilicet C E 30 & I E 40 ſubtrahi poſſunt à numeris 60, & 40 (qui ſimul efficiunt 100, vt oſtenſum eſt) & reliquis vnà cum parte 12, quæ efficit cum 60 & 40 numerum 112, ſimul additis. Sed à 60 demitur 30, demptâ figurâ 3 decuſſatim à figurâ 6, vt declaratum eſt; remanet autem 30. Si ergo à reliqua parte 40, numeri 100, dematur I E 40; nihil ſupereſt. Si ergo ſolus ille reliquus 30 & numerus 12 addantur; vt fiat numerus 42: erit hic numerus 42 reliquus demptis C E 30, I E 40 à numero 112 ex tribus numeris 60, 40, & 12 ſimul additis conflato; hoc eſt ex quadrato A E 100 & rectangulo O E 12. Ergo numerus 42 eſt rectangulus numerus, ſiue numerus planus C I, qui querebatur. Rectè igitur hac arte inuenitur numerus, qui producitur ex duobus digitis 6 & 7 mutuò in ſe ductis. Eadem enim ratione probabitur, ſi figura 4 decuſſatim dematur à figura 7 oppoſita relinqui numerum planum C I, & quidem planè eundem, qui relictus eſt; dum figura 3 ab oppoſita 6 ſubducere-

tur. Nam eædem partes 40 & 30 (siue IE & CE rectangula) ab eodem numero 112 quadrato A E, & rectangulo O E, licet in partes 70, & 30, & 12 à prioribus 60, 40 & 12 diuersas distincto subducuntur. Ergo & reliquum 42 eundem esse necesse est. Quod etiam ex eo probari posset. Quod cum tam numeri duo 6 & 4, quam duo 7 & 3 eundem numerum 10 simul additi efficiant; sint numeri quatuor Arithmeticè proportionales. Atque adeò eadem sit differentia primi 6 & secundi 7; quæ est tertij 3, & quarti 4. Dempta ergo differentia illa, quæ hîc est vnitas) à duobus 7 & 4 maioribus, æquales fierent duobus 6 & 3 minoribus. Sed sublato 4 à numero 7, demitur ex eo numerus 3, & differentia inter 4 & 3, siue inter 7 & 6. Ergo idem numerus relinquetur numero 4 dempto ex 7, qui relinquitur numero 3 dempto ex 6. Quare tandem rectè inuentus est numerus, qui producitur ex multiplicatione digiti in digitum iuxta primum inueniendi modum. Quod præstari exigebat hæc 35. Propositio. Nunc reliquos idem absoluendi modos, qui omnes ex allata demonstratione hauriunt euidentiam; paucis, quoad licebit, prosequor.



Demonstratio methodi secundæ.

Methodus hæc iubet duas à denario differentias 3 & 4 duorum digitorum 7 & 6 multiplicandorum in se duci, vt fiat 12: cuius numeri figurâ 2 subscriptâ, prior 1 seruatur. Tum adduntur duo Digiti 7 & 6; gignitur 13: cui additur vnitas seruata; vt fiat 14; à quo reiicitur tanquam inutilis figura 1, posteriore 4 subscriptâ. Atque ita habetur subscriptus quæsitus numerus 42. quod ostendo.

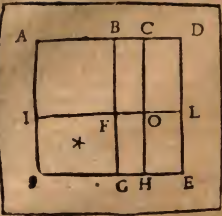
Ostensum est lemmate superiori Quadratum A E 100, vnà cum rectangulo sub A C, A B Partibus 7 & 6 comprehenso hoc est, rectangulo A O quæsito, æquale esse rectangulis tribus D A C, D A B, B D C: quæ in diagrammate sunt A H 7; A G, siue A L 60: & O E 12 vt ex allata superius declaratione constat: quam hîc non repeto. Si ergo, vt hîc præcipitur, duo rectangula A H, 70; & A L 60 iungantur, fiet numerus 130. Cui si addatur rectangulum O E 12, nascetur numerus 142. qui æqualis est Quadrato A E 100, & simul quæsito rectangulo A O sub A C,

A

A B 70 & 60, contento dematur ergo à numero 142. Quadratus A E 100: reliquus fiet planus numerus A O 42 quæsitus rectè igitur præcipit hæc secunda methodus duos datos digitos 7 & 6 simul addi, & ex numero 13 ex additione genito reiici figuram 1 tanquam inutilem: reuerà enim reiicitur 100, vt reuerà additi sunt numeri 70 & 60, licet in speciem additio præcipiatur fieri digitorum tantum 7 & 6: figura enim illa 2 iam subscripta locum occupat figuræ O numeri 130 ex additione Articulorum 70 & 60 geniti. Additur verò figura 1, siue 10, ad numerum 130: quia reuerà ad gradum secundum decadum pertinet, vtpote ex numero 12 per multiplicationem digitorum 3 & 4 genito seruata. Ecce igitur multiplicationis secundo loco allatæ abstrusam illam rationem: quâ quid euidentiùs afferri queat? Nec minùs manifesti euadent modi reliqui.

Demonstratio methodi tertiæ.

Operatio iuxta hanc methodum tertiam eadem facta suppositione sic instituitur. Duæ differentiæ à denario 3 & 4 in se ducuntur; posterior producti numeri 12 figura 2, subscribitur; seruatur prior 1. Tum eædem differentiæ 3 & 4 simul adduntur, vnde nascitur numerus 7. Qui numerus demitur à numero 10, & reliquæ figuræ 3 additur figura illa 1 seruata, vt fiat 4: quæ subscribitur: atque ita habetur numerus 42 qui ex multiplicatione digitorum 7 & 6 producitur. Praxis huius hæc est ratio ostensum est Lemmate superiori quadratum A E 100 vnà cum rectangulo O E 12; cuius latera æqualia sunt lineis B D, C D quæ sunt differentiæ 4 & 3, numerorum 7 & 6 à numero 10; æquale esse rectangulis tribus C E 30, I E 40, & C I, quo quæsitus numerus exprimitur; Planus scilicet, cuius latera sunt dati digiti 7 & 6 lineis C A, B A vel A I designati. Si igitur duo rectangula C E 30 & I E 40 simul addita id est 70 demantur à quadrato A E 100: reliquus numerus 30 vnà cum rectangulo O E 12, æqualis erit rectangulo C I: si quidem æqualibus ab æqualibus, detractis æqualia remanere necesse est. Fit autem additio Plani numeri O E 12 ad reliquum illum 30: cum subscribitur numeri 12 figura posterior 2, & prior 1 seruatur addenda ad numeri 30 figuram 3; sic enim censetur figura illa 1 articulus 10, ad articulum 30 addita. Nulla autem fit mentio figuræ illius O reuera adhærentis figuris 3 & 4 (sunt enim plani numeri C E 30 & I E 40) eò quod expungatur à figura 2 numeri 12, quæ eius locum, dum subscribitur, occupat. Sicut etiam non fit mentio quadrati A E 100: à quo reuera fit subtractio numeri 70 ex additione numerorum 30 & 40 conflato: sed tantum numeri 10, abiecta scilicet vltimâ eius figurâ O, vt abiicitur ex numero 70 vel potius suppletur à digito 2 subscripto. Habes ergo tertiæ huius methodi rationem euidentissimam.



Quartus denique & vltimus modus; quo non minor quam cæteris hactenus expositis cicatur admiratio; sic elucescet. Paucis hypothesim recolo. Præcipitur vt alterutra differentiarum 4 & 3, à numero 10 verbi gratia, 4 ducatur decussatim in oppositum digitum 7 & vt productus 28 dematur ab articulo 70, qui fit ex ipso digito 7 multiplicato, dum ei apponitur O. Vt tandem habeatur ope huius subtractionis numerus 42 ex digitorum 6 & 3 multiplicatione genitus, qui queritur; Ecce nunc huius methodi rationem ex eodem diagrammate petitam. Dum differentia 4 ducitur in digitum oppositum 7: fit planus numerus I H 28. Nam rectangulum hoc continetur sub latere I O, quod æquale est lineæ A C 7; & sub latere O H, quod æquale est lineæ B D 4 (est enim F E quadratum, cuius latera F L, F G, atque adeo linea O H ipsis æqualis, æqualia sunt lineæ B D Si igitur rectangulum I H 28 dematur à rectangulo A H 70 (continetur enim à linea A C 7 & tota linea C H 10) hoc est, à digito 7 mutato in articulum 70, remanebit rectangulum A O 42 quæsitum: continetur enim sub datis digitis A C 7, & A B 6. Nam cum A F quadratum sit: erit A I latus rectanguli A O æquale lineæ A B 6.

Hoc idem rectangulum A O 42 haberetur etiam, vt fert praxis, si altera differentia 3 ducatur in decussatim oppositum 6: vt fiat 18 qui dematur ex Articulo 60, hoc est, ex digito 6 multiplicato per 10. Nam in diagrammate rectangulum C L continetur sub C D 3, & C O, siue ei æquali A I, aut A B 6. Exprimit ergo Planum numerum 18 ex 3 in 6 ducto genitum. Si itaque rectangulum hoc C L 18 dematur ex rectangulo A L 60: remanebit idem quod prius rectangulum A O 42, contentum lineis A C 7, & A B 6 (est enim A B æqualis lineæ A I in Quadrato A F) atque hactenùs declarata est ratio quadruplicis illius diuersæ methodi digitum multiplicandi per digitum alterum: quæ primâ fronte abstrusissima videri poterat: quæ non minùs maioribus numeris multiplicandis conueniret: vt ipsæ per se demonstrationes, quæ iis aptè possunt applicari, testantur. Illud interim velim obseruari. Quanto scilicet cum compendio & euidentia Geometricæ delineationes Arithmeticis operationibus accommodentur.

Porrò cum duo digiti in se ducendi, æquales inter se sunt; ac proinde

æquales etiam ſunt eorum à numero 10 differentiæ; ita vt in eo caſu tota Diagrammatis linea A D in duas partes tantùm diuidatur, vt in Superiori obſeruatione annotatum eſt; eædem omnes methodi vſurpari poſſunt, eodémque modo demonſtrari. Vt ſi ducendus ſit digitus 8 in digitum 8, hoc eſt, in ſeipſum: licebit, cui lubebit, experiri. Tunc enim, etſi tota linea A D in duas tantum partes, vt in B, diuidatur: ſingulæ tamen tam A B, quàm B D duplicis partis rationem habere debent. Quo poſito omnia, quæ hîc expoſita ſunt, eodem modo ſe habebunt; quo ſe habent inæquales partes A C, A B, & C D, C B vt pluribus hæc exponi non egeant.

8	2
X	
8	2
6	4

Vnum denique (ne quid hîc omittam) monebo. Nimirum traditas digiti in digitum multiplicationes, etſi digitis quibuſcúnque conueniant, digitis tamen paulò maioribus, quorúmque à denario diſcrimen paruum eſt, adhiberi debere: facilior alióque foret ipſorum digitorum multiplicatio, quàm diſcriminum à denario, nec iuuaretur, ſed impediretur operatio.

PROP. XXXVI. *Probl.*

Numerum quemcúnque per quemcúnque alium numerum multiplicare.

Conſtructio.

Multiplicatio numeri per numerum quid ſic: habes fusè declaratum Prop. 28. hîc modus eius abſoluendæ tradendus ſupereſt: quem ſequentes verſiculi exponunt.

Claſſes componas omnis nota agatur in omnes
Inferior ſuprapoſitas. Producta notetur
Vnica ſi fuerit: ſi duplex, vltima tantùm
Altera ſeruetur claſſi iungenda ſequenti
Multiplicans digitus, claſſis ſit prima creati.
Denique producti ſummam cogantur in vnam.

Proponantur duo quilibet numeri A 3 5 8 4 multiplicatus, ſiue multiplicandus, & B 6 7 2 multiplicans. Quæritur ſcilicet numerus: qui iuxta multiplicationis definitionem Prop. 28. explicatam, toties contineat numerum A: quot ſunt in B vnitates. Qui idem eſt per Prop. 31. cum illo:

illo: qui toties è conuerso continet B; quot vnitates A continet. Quem vt assequaris, hæc Præcepta obserua in versiculis iam tradita: quæ expono, & ad Paradigma propositum applico.

Præceptum 1. *classes componas.* Pertinet Præceptum hoc ad aptam numerorum inter se collocationem; ne inter operandum vlla oriatur notarum perturbatio: quæ alioqui inter notas tam multiplices facilè incurreretur. Apta autem tunc fuerit: si duorum numerorum A, B figuræ eiusdem gradûs sibi respondeant directè; non secus quàm in additione, & subtractione, & imperatum, & obseruatum est; & schema appositum refert. Vter autem duorum superponatur: vter subscribatur parum admodum intereſt: intereſt tamen aliquid, vt minor B, maiori A subiiciatur. Pauciores enim oriētur productorum numerorum ordines; ac proinde expeditior eorum futura est additio, vt docebit vsus. Quod si par fuerit vtriusque numeri figurarum multitudo: par futurum est ex vtraque collocatione commodum, par incommodum: vtramuis adhibe.

A	3584
B	672

Præceptum 2. *Omnis nota agatur in omnes inferior suprapositas.* Constitutis numeris A & B, vt dictum est, nec omissa subducta linea recta: figuræ singulæ numeri inferioris B *agantur*, id est, ducantur in singulas figuras *suprapositas* in figuras scilicet numeri suprapositi A; quæ multiplicatio, initium ducet à prima classe, & ad reliquas perget deinceps versus læuam. Hoc itaque modo figura 2 numeri B vltima ducetur in vltimam figuram 4, numeri A: tum ad reliquas versus læuam 8, 5, 3 deinceps. Sed quid de numeris per has multiplicationes productis fieri debeat; & quomodo aptè collocandi sint, disces ope Præcepti sequentis.

A	3584
B	672
C	7168
D	25088
E	21504
F	2408448

Præceptum 3. *Producta notetur; vnica si fuerit; si duplex vltima tantum: altera seruetur classi iungenda sequenti.* Initio igitur, vt dixi facto ab vltima figura 2 numeri B: eam ducito in vltimam figuram 4 superioris numeri A hac seruata hîc, & imposterum formula 2 in 4 (id est duo ducta in quatuor) vel bis quatuor, aut figura 2 ducta in figuram 4. generat 8 figuram vnicam: *Producta* ergo figura 8 *vnica notetur*, subscribatur scilicet directè in eadem classe figurarum 4 & 2 ductarum inter se, ad numerum C. Tum duc rursùs eandem figuram 2 numeri B, in figuram præcedentem 8 numeri A: fiet numerus 16; qui cum duplici figura constet: posterior 6 subscribetur directè sub figura 8 ad numerum C; prior verò figura 1 mente interim seruabitur iuxta illa verba. *Si duplex vltima tantum, altera* &c. Duc tertio 2 in figuram 5 præcedentem numeri A: fiet 10 & addita quæ mente seruata fuerat figura 1; fit 11: subscribitur 1, & mente

seruatur

seruatur 1, *classi nimirum iungenda sequenti* Denique ducito 2 in 3 figuram primam numeri A; vt fiat 6; cui adde seruatam figuram 1, gignetur 7 subscribenda ad C. Atque ita absoluta est multiplicatio numeri A per figuram vnicam 2 numeri B: ita vt si multiplicans numerus B figurâ illa 2 vnicâ constaret; absoluta iam foret multiplicatio; genitúsque numerus foret C 7 1 6 8. Sed quia numerus B aliis figuris constat 6, 7. figura 7 eodem modo ducetur in omnes figuras numeri A initio item facto ab eius vltima figura 4. Dicesque 7. in 4 (siue figura 7 ducta in 4) generat 28: Cuius priore figurâ 2 mente seruatâ, posterior 8 subscribitur directè in eadē classe; in qua reperitur figura multiplicans 7. Tum rursùs 7 in 8 generat 56; cui adde mente seruatam figuram 2 vt fiat 58 duabus figuris expressus: ac proinde prior 5 mente seruabitur & subscribetur 8 in classe proximè sequente in numero D. Tertiò, 7 in 5 producit 35: cui si addatur figura 5 seruata: fiet 40: cuius posterior figura O subscribetur, alterâ 4 seruata. Denique 7 in 3 procreat 21: cui si addatur figura 4 seruata; fiet numerus 25. Qui cum nascatur ex multiplicatione figuræ 7 in vltimam figuram 3 numeri A; totus erit subscribendus ad numerum D ordine classium semper obseruato. Ex iis constat quomodo figura reliqua 6 numeri B prima, in omnes figuras numeri A multiplicari debeat, vt fiat numerus E: cuius figura vltima 4, siue primi gradûs subscribitur directè in eadem classe ad quam pertinet figura 6 multiplicans: iuxta illa verba: *multiplicans digitus, classis fit prima datorum.*, hoc est, geniti numeri per quemlibet digitum, siue figuram simplicem numeri B multiplicantis (licet enim figura illa digitus non sit quia ad primam classem minimè pertinet, nec eius valor simplex est; sumitur tamen vt digitus dū multiplicatur) ita subscribuntur, vt eorum figura vltima supponatur semper in ea ipsa classe; in qua reperitur figura numeri B multiplicantis. Vnde fit vt numeri producti C, D, E ad dextram sensim deficiant, & læuam versus vnico deinceps gradu singuli recedant: cuius recessûs ratio inferiùs afferetur.

Præceptum 4. *Denique producti summam coguntur in vnam.* Postquam singulæ figuræ numeri B multiplicantis, in omnes figuras numeri A multiplicati ductæ fuerint: Singulique ex his multiplicationibus producti numeri C, D, E debito ordine & loco fuerint constituti: Debent hi numeri simul addi seruatis classibus, in quibus figuræ numerorum reperiuntur. In exemplo itaque apposito, in prima classe sola figura 8 numeri C reperitur. Subscribatur ergo ad numerum F ipsa sola figura 8 directè in eadem classe prima. In secundâ, duæ repositæ sunt figuræ 6 & 8 numerorum C & D: quibus additis fit 14; cuius posterior figura 4 subscribitur ad F, prior 1 seruatur addenda vtique ad sequentem classem. Quæ tribus figuris 1, 8, 4 constat: ex quarum additione gignitur numerus 13; cui si addatur seruata vnitas illa, fiet 14. Cuius figura 4 subscri-

M.

betur ad F, altera 1 seruabitur. Eo modo addentur classes reliquæ iuxta traditas additionis regulas: Vt tandem habeatur numerus F ex huiusmodi additione genitus. Quem illum ipsum esse assero: qui ex mutua numerorum A & B multiplicatione procreatur: Qui scilicet toties continet numerum A multiplicatum; quot sunt in multiplicante B vnitates: vel è conuerso, toties continet numerum B, quot vnitates continet numerus A. Idem numerus F colligeretur, vt Prop. 31. probatum est, si numerus A subscriberetur tanquam multiplicans, numero B multiplicati locum occupanti demùm demonstrandum illud est.

Demonstratio.

Dubium quidem nemini esse potest; quin allatus hîc multiplicationis modus verum prodat quæsitum numerum; cum alius ab eo non sit: qui & passim vsurpatur, & hactenùs adhibitus sit ab omnibus absque omni erroris ex eo secuti suspicione. Ex hoc tamen non constat huius certitudinis ratio, vel causa; cuius cognitio veram gignat, & perfectam scientiam longè aliam, quàm quæ vel experientià, vel inductione, vel authoritate comparati solet. Hanc igitur, quamquam per se haud ita abstrusam apertiùs exponam, vt institutiones conscribentis munus exigere videtur.

A—	3584
B—	672
C—	7168
D	25088
E	21504
F	2408448

Repetatur ergo Paradigma superius, ita omninò, vt operationem totam exhibeat. Certum ergo est. Quod si numerus A per solam vltimam figuram 2 numeri B, multiplicādus foret: productus numerus C, verus esset numerus, qui ex huiusmodi multiplicatione gigni debet. Is, inquam, esset numerus C: qui toties contineret numerum A multiplicatum: quoties figura 2 multiplicans continet vnitatem. Si enim numerus A toties ponatur, quod sunt in figura 2, vnitates, id est, bis; quasi additio positorum numerorum instituenda foret, vt appositum schema refert; ipsáque adeo additio perficiatur. Haud dubium quin ex ea additione genitus numerus C tot contineat vnitates: quot vnitates continent additi duo numeri, vt Prop. 17. demonstratum est cum de additione ageretur. Sed qui numerus C fit ex additione duorum numerorum A A, eundem fieri necesse est per multiplicationem numeri singularis A per numerum 2. Ergo vtérque numerus C & qui producitur per additionem, & qui per multiplicationem generatur; toties continet numerum A; quot sunt in figura 2, vnitates. Probatur minor. In additione, numerus C producitur ex figuris duabus 4, 4 simplicis valoris

A	3584
A	3584
C	7168

loris siue digitis numerorum A A, & ex duabus figuris 8 8 eorundem ad denarios pertinentibus; & ex duabus 5, 5, centenariis, duabus denique 3 3. Millenariis, sed in multiplicatione numerus C fit ex numeri A digito 4, denario 8, centenario 5; denique millenario 5 multiplicatis per 2, hoc est, bis sumptis siue duplicatis. Ergo idem est numerus C, qui in multiplicatione & additione generatur. Ac proinde, quemadmodum in additione numerus C toties continet numerum A; quot sunt in figura 2, vnitates; ita & in multiplicatione. Ergo numerus C verè generatur ex multiplicatione numeri A per figuram 2.

Eadem ratiocinatione colligetur numerum D toties continere numerum A: quot sunt vnitates in multiplicante articulo 70 numeri B: ita tamen vt numerus D absolutè, & secundum se à formula operationis se positus non consideretur. Cum enim vltima eius figura 8 iubeatur in classe reponi figuræ 7 multiplicantis eáque sit in classe denariorum; erit pariter figura illa 8 numeri D in classe denariorum; eiúsque valor erit 80 sicut numeri B, figuræ 7 valor est 70: ita vt numerus D schematis sit 250880, non tantùm 25088 supplente figuram illam O, situ numeri D 25088 constituto in schemate. Quam quidem figuram O apponi nihil obstaret in prima classe; sed quia, cum additio deinde instituitur; inutilis est; ideo tanquam inutilis omittitur; primam tamen classem occupare censetur, dum vacua relinquitur. Statuto ergo numero D 250880 producto ex multiplicatione numeri A per articulum 70 numeri B: ostendetur numerus D toties continere numerum A; quoties articulus 70 continet vnitatem, & quidem, vt dixi, eadem, qua circa figuram 2 vsus sum ratiocinatione. Si enim numerus A septuagies, iuxta multitudinem vnitatum articuli 70, aptè ad additionem scriberetur, tunc autem additio institueretur: numerus gigneretur, qui toties contineret numerum A; quot sunt in articulo 70 vnitates. At genitus ille numerus diuersus minimè foret à numero D. Ergo numerus D verus est numerus quæsitus per multiplicationem numeri A per articulum 70. Eodémque modo numerus E 21504, vel potius 2150400 per articulum 600 numeri B, ductum in numerum A progenitus, verus esse numerus, qui gigni debet, demonstrabitur.

A	3584
B	672
C	7168
D	250880
E	2150400
F	2408448

Quibus demonstratis. Si numeri C, D, E vt hic habentur, suis scilicet ad singulos appositis figuris O, claritatis gratia, simul addantur; vt tandem fiat totus ex additione numerus F: numerus solus F tot vnitates continebit; quot tres numeri C, D, E. Qui cum sint geniti ex multiplicatione singulorum numerorum 600, 70 & 2 numerum B multiplicantem componentium: clarum euadit numerum F, cum esse, qui per multiplicationem nnmerorum A & B producitur. Quare numerum quencunque per &c. Quod faciendum erat.

PROP. XXXVII. *Probl.*

Absolutæ multiplicationis examen inire.

Constructio.

Etsi certæ sint per se, certísque regulis perficiantur Arithmeticæ operationes: periculum tamen semper est æliquod, in longioribus præsertim calculis; ne vitium subrepat ob figurarum multitudinem concurrentem quibus designandis mens, vel, fatigata, vel rei de qua agitur, contemplatione; siue difficultate, absumpta minus accuratè attendat. Vt itaque omnis hac ex parte scrupulus eximatur, opus probari necessariò debet. Multiplex autem est multiplicationis examen.

Primum est, vt duo numeri vices permutent; fiátque multiplicans, qui priùs multiplicati partes gerebat; & contrà. Si enim ita denuò instituta multiplicatio eundem, quem prior, numerum producat: de multiplicationis certitudine certus esto. Quod si secundò instituta multiplicatio à priore differat; alterutram, aut etiam vtramque errore aliquo laborare certissimum est argumentum. Itaque examen hoc, cum duos numeros ex multiplicationibus duabus profectos æquales exhibet; vtramque rectè institutam prodit: at si iidem numeri æquales non sint: earum saltem alteram falsam esse suadet. Vtra autem? constare non potest. Quo vno ex capite (omitto longiorem esse) minus commoda videtur hæc probatio. Secundum examen institui potest ope diuisionis; de qua paulò post præcepturus sum. Si enim productum per multiplicationem numerum, per alterutrum sese multiplicantium numerorum diuidas: alterum si vitio caret multiplicatio, ex ea produci necessarium est. Verùm hæc licet sit certissima Probatio: quia tamen satis expedita non est: idémque patitur incommodum, quo laborat examen antecedens. Neque enim constat, an

ipsa

ipſa multiplicatio; an certè diuiſio erroris quidpiam admiſerit. Ideo alia aliqua quærenda eſt. Ecce, quâ breuior vix occurrat, quam in Propoſitionis numero & pretio haberi volo.

PROP. XXXVIII. *Probl.*

Examen multiplicationis per nouenarij abiectionem inſtituere.

Conſtructio

Huius examinis rationem totam Præceptis aliquot trado, quæ his verſiculis complector.

A generante nouem dematur vtroque, relictas
Multiplicato notas. De facto tolle nouena:
Tolle etiam de toto: nam nota vtrinque relicta
Æqualis; rectè totum probat eſſe repertum.

Præceptum primum. *A generante nouem dematur vtroque.* A duobus ſcilicet numeris A, & B (Paradigma ſuperius reſumo) generantibus ſui mutuâ multiplicatione numerum F dematur ſigillatim nouenarius: quæ verò reliquæ fiunt figuræ duæ 2 & 6, illa ex A, hæc ex B, ſepone, vt ſchema refert.

A 3584		3
B 672	2 X 6	
F 2408448		3

Præceptum ſecundum. *Relictas multiplicato notas.* Multiplica duas figuras 2 & 6 proximè inuentas, & ſepoſitas: vt fiat numerus 12.

Præceptum tertium. *De facto tolle nouena.* de numero 12, quem duæ figuræ 2 & 6 in ſe ductæ produxerunt, deme rurſus nouem more ſolito: & reliquam figuram 3 ſepoſitam obſerua.

Præceptum quartum. *Tolle etiam de toto.* de toto numero F ex multiplicatione numerorum A & B mutuâ genito tolle nouem, & reliquam figuram item ſepone. *Nota vtrimque relicta æqualis &c.* Si reliqua figura poſt ſubtractionem nouenarij à numero F proxime inuenta æqualis fuerit figuræ 3 ſepoſitæ Præcepto tertio (vt hic reipſa æqualis eſt) argumentum certiſſimum eſt rectè inſtitutam eſſe multiplicationem: certiſſimum etiam vitioſè inſtitutam, ſi inæquales extiterint.

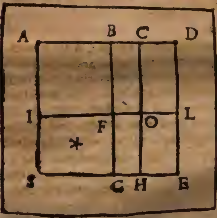
Præparatio ad Demonstrationem.

Nec aperta, nec statim obuia sit examinis huius per reiectionem nouenarij ratio: esto aliquid ei simile hic occurrat; quod suprà Prop. 19. declaratum est. Nimirum, eundem relinqui numerum, si nouenarius reiiciatur à dato quovis numero, cuius figuræ valorem suum quem gradus eis tribuunt, retineant: siue digiti censeantur, & simplicis valoris, vt citata docet Prop. hoc posito

In allato exemplo superiori numerus A multiplicatus designetur lineâ rectâ A D diagrammatis huius: numerus autem B multiplicans, alterâ rectâ lineâ A S. Planus denique numerus F genitus ex numero A in B ducto, exhibeatur rectangulo A E: Rursùs reiecto nouenario, quoad fieri potest, ex numero A, reliqua figura 2, sic lineæ A D particula C D: Sicut etiam reiecto nouenario ex B, reliqua figura 6 repræsentetur per lineæ A S particulam I S. Tum per puncta C & I ducantur lineæ C H, I L rectanguli lateribus parallelæ sese in O intersecantes.

A 3584
B 672
F 2408448

(3, 2, 9, 3 X)



Hac positâ constructione, constat planum numerum A E siue numerum F per multiplicationem numerorum A & B genitum, componi ex tribus rectangulis A H, C L & O E. Quorum primum A H designat Planum numerum, qui fit ex linea A C siue numero A minuto figurâ 2, quam repræsentat lineola C D; & ex tota linea A S, siue toto numero B multiplicante. Secundum rectangulum est C L: quo exhibetur Planus numerus, qui fit ex numero C O siue A I: qui quidem est numerus reliquus si à toto numero B siue A S demàtur figura 6 siue A I reliqua post reiectionem nouenarij ex B numero. Tertium rectangulum est O E; quo Planus numerus designatur productus ex numero O I in numerum O H, hoc est, ex C D in I S (æquales enim sunt O L, C D; & O H, I S per Prop. 34. lib. 1. Elementorum) productus, inquam, ex figura 2 reliqua ex numero A multiplicato post reiectionem nouenarij,

ductâ

ductâ in figuram 6 item reliquam reiecto nouenario ex numero B multiplicante: quæ duæ figuræ 2 & 6, exprimuntur particulis C D, & I S, vt fert constructio statuta.

Demonstratio.

Si ex toto Plano numero A E siue F producto per mutuam multiplicationem numerorum A & B, reiiciatur nouenarius, eadem figura relinqui debet: quæ relinquitur reiecto nouenario ex tribus Planis numeris C S, C L, O E. Patet. Sunt enim tria hæc rectangula æqualia toti rectangulo A E. Sed traditi examinis methodus reiici iubet nouenarium ex toto plano numero A E, siue numero F genito per multiplicationem numerorum A & B; & reliquam figuram 3 seponi. Iubet etiam eundem nouenarium reiici ex tribus Planis numeris C S, C L, O E. Ergo reliqua figura priori æqualis esse debet; alioqui productus totus numerus F, verus non esset quæsitus numerus. Minor probatur, nimirum nouenarium reiici ex tribus rectangulis C S, C L, O E seruatâ methodo tradita. Nam si numerus A C; qui per reiectionem nouenarij exhauritur; vt patet ex constructione; ducatur in quemlibet alium numerum: Productus per hanc multiplicationem Planus numerus per eandem nouenarij reiectionem adæquatè debet exhauriri. Patet nam cum numerus productus per multiplicationem A C, & alterius cuiusvis numeri, puta A S, toties contineat multiplicatum A C: quot sunt in multiplicante A S, vnitates per Prop. 28. componetur productus Planus numerus C S ex multitudine nouenariorum in numero A C contentorum, toties sumptâ; quot sunt in numero A S vnitates. Quare nouenarius sæpiùs repetitus productum illum Planum C S adæquatè metietur, & exhauriet. Eodem iure à nouenario exhaurietur Planus numerus C L. Nam producitur ex numero C O, hoc est, C I; qui per constructionem exhauritur à nouenario, per O L multiplicato.

Cum igitur nouenarius duos illos Planos numeros C S, C L adæquatè metiatur; nec attendatur quoties nouenarius repetatur aut contineatur in hisce numeris Planis iuxta sensum propositione 19. expositum supponi debet nouenarius tanquam reiectus ex duobus illis planis numeris C S, C L, etsi explicitè non reiiciatur, nulla enim figura relinqui debet, quanquam actu reiiceretur. Restat ergo Planus O E, à quo abiiciatur nouenarius, vt à toto plano A E reiectus censeatur.

Quia ergo planus O E producitur ex figura C D 2 in figuram I S, 6: & ex producto plano O E 12 reiectus est nouenarius; hinc fit, vt ex toto plano A E reiectus censeatur, & figura 3, quæ reliqua fit reiecto nouenario ex plano solo numero O E 12; reliqua etiam debeat esse, si

ex

ex toto numero A E, hoc est, numero F per multiplicationem numerorum A & B producto reiiciatur nouenarius Quare rectè præcipit Examen hoc, vt à toto producto numero F, abiiciatur, quoties fieri poterit, nouenarius figurâ reliqua seruata. & vt reiiciatur ex singulis duobus numeris multiplicatis A & B, ac reliquæ duæ figuræ (quas exprimunt C D, & I S) 2 & 6 in se ducantur: ac tandem ex producto 12 abiiciatur nouenarius; & obseruetur an hîc reliqua figura eadem sit, cum priori, quæ ex toto numero F reliqua fuerat: Si enim eandem esse contingat: vix licet de veritate multiplicationis dubitare; si diuersam, de errore, nullo modo licet. Quare multiplicationis examen instituimus. Quod faciendum erat.

Alia problematis eiusdem nona, breuiortutior & elegantior constructio.

Si quando occurrat (Tyroni autem logistæ occurret nôn rarò) duas illas figuras, quas post nouenarij abiectionem reliquas seponi iubet proximè tradita methodus, inæquales esse; atque adeo multiplicationem perperàm factam, errorísque alicuius commissi arguere: vt propterea, vel de integro multiplicatio iniri debeat eodem cum errandi periculo; vel vitium perquiri totius calculi vestigia relegando: Quod vtrumque operæ longioris foret, grauísque & ingrati laboris, præsertim cum non constet an ex ipsa partiali singularum figurarum multiplicatione labes orta sit; an verò etiam ex additione productorum numerorum singulorum, vt totus habeatur per multiplicationem productus numerus huic ergo non leui incommodo occurri posse mihi videtur: si nouenaria illa abiectio, quam proximè ad examen multiplicationis adhibuimus, instituatur eo, qui sequitur, modo resumatur itaque idem superiùs assumptum exemplum: in quo numerus A per numerum B multiplicatur, & producitur numerus F. Quando igitur postmodum ex numero A multiplicato reiici debet nouenarius: is primo loco, cum nihil obstet, reiiciatur, & reliqua figura 2 eidem numero A ad dextram, vt cernis, adscribatur; interiecta tamen lineola, distinctionis gratia. Tum multiplicationem auspicare, vt traditum est, ita tamen vt figura 2 numeri B multiplicantis, ducatur primo loco in appositam figuram illam 2, seiunctam à numero A, & productus 4 subscribatur directè in eadem classe, præfixa etiam lineola. Quod si ex ea multiplicatione produceretur numerus.

A	3584	2
B	672	
C	7168	4
D	25088	5
E	21504	3
F	2408448	3

merus duabus figuris scribendus, hoc est, nouenario maior, tum reiecto nouenario, reliqua figura, dicto loco designaretur hac aptè constituta figura 4. reliqua multiplicatio figuræ 2 vltimæ numeri B, in omnes figuras numeri A absoluatur, fiet numerus C, idem qui priùs. Iam ab hoc numero C, si reiiciatur nouenarius; haud dubium, si erratum non est, quin eadem figura 4 reliqua supersit. Eadem enim est huius examinis ratio: quæ traditi superioris: Duo siquidem numeri A 3 5 8 4 & 2 multiplicantur: & ex ea multiplicatione generatur C. Si igitur singularem hanc multiplicationem factam probare velles. Id iuxta methodum traditam absolueretur abiecto nouenario ex multiplicato A, & seposita reliqua figura 2: abiecto etiam nouenario ex multiplicante figurâ 2. quæ abiectio ipsam nunquam mutare potest, nisi ipsa fuerit 9 mutanda in O: omnes, enim figuræ numerum quemlibet componentes, aut figurarum maximæ 9 æquales; aut ea minores necessariò existunt. Si itaque duæ figuræ sepositæ 2 & 2, vna multiplicati numeri A, altera multiplicantis 2, multiplicentur: vt fiat 4. (à quo, si maior nouenario foret, nouenarius reiiceretur & reliqua figura seruaretur) eadem figura 4 relinqui debet reiecto nouenario à producto numero C. Iam ergo certior factus es de hac partiali multiplicatione numeri A per figuram 2 numeri B vltimam: quam facile, si vitiosam arguat abiectio nouenarij per figurarum relictarum inæqualitatem, emendare licebit. Eamdem certitudinem eodem modo consequeris in reliquis numeris D & E. Vt figura 7 quæ multiplicans A generauit D; si multiplicet sepositam illam figuram 2 ex numero A reliquam post abiectionem nouenarij, vt fiat 14: vnde reiiciatur nouenarius, vt reliqua fiat figura 5. eandem reliquam fieri necesse est reiecto nouenario ex producto numero D, si absque errore productus sit ex multiplicatione numeri A per numerum 7. Idem est esto de reliquis iudicium.

Habes ergo singularum multiplicationum probationem expeditam: Sed ecce aliud eiusdem methodi compendium, vt totius simul multiplicationis Examen absoluas. Singulorum enim numerorum productorum examine absoluto si ex sepositis figuris, quæ relictæ sunt ex singulis numeris, C D E vt sunt 4, 5, 3; abiiciatur nouenarius more solito; abiiciatur etiam ex toto producto numero F: eadem figura (quæ est 3) relinqui debet. Ratio aperta est. Nam sic probatur additio numerorum C, D, E reiecto nouenario tam ex additis numeris C, D, E; quàm ex toto F per additionem generato. Sed tres illæ figuræ 4, 5, 3 adhuc supersunt ex numeris addendis C, D, E post abiectionem nouenarij ex singulis. Ergo ex illis debet adhuc reiici nouenarius, vt figura reliqua respondeat figuræ reliquæ ex toto numero F. quæ si vtrimque fuerit æqualis; certius non potest haberi argumentum totam operationem errore carere:

N cum

cum & multiplicatio singularum figurarum; & numerorum productorum additio, vnâ eadémque operâ probentur, vitiumque, si quod lateat; & detegat; & vbi lateat; statim aperiat. Quod examen nouenarij vulgo vsurpari solitum nequaquam præstet.

Scholium.

In quo industria quadam, siue compendia exponuntur: quæ ad multiplicationem maximè conducunt.

Industria Prima.

Quando numerorum sese multiplicantium alteruter, vel vterque figuris aliquot O ad dextram, siue ad primas classes constant: tunc omissis interim omnibus illis figuris O, reliqui numeri figuris significatiuis constantes, multiplicentur: productóque apponantur omissæ omnes figuræ O, siue pertinerent ad vnum tantùm numerorum, siue ad vtrumque. multiplicandi sunt, exempli gratiâ, duo numeri A & B. Duc B 6 in A 24. suis illis figuris duabus O destitutum: fiet ex huiusmodi multiplicatione numerus 144: cui apponi debet duplex illa figura O ad numerum A pertinens: vt fiat totus productus numerus C 14400. Eodem

A	2400	D	230
B	6	E	500
C	14400	F	115000

modo si multiplicandi veniant duo numeri D & E: quorum vterque figuris O constat: eis ab vtroque amotis duc 5 in 23, productóque 115 restitue tres figuras O; quarum vna ad numerum D, duplex ad numerum E pertinebat: vt fiat totus numerus F ex multiplicatione numerorum D & E genitus. Rationem huius operandi modi te ipsa docebit operatio. Vltimæ enim illæ numerorum figuræ O vel se, vel figuras significatiuas multiplicantes, nihil nisi O producent ad finem numerorum per multiplicationem genitorum hinc habetur cuiusvis numeri expedita multiplicatio per numerum, cuius prima figura sit 1, reliquæ verò sint O. vt si 24 multiplicari debeat per 10, 100 &c. tunc enim absoluta erit multiplicatio: si numero 24 apponas figuras O multiplicantis, vt producatur 240, 2400 &c. Ratio clara est: quia figura 1 dum multiplicat, nullam inuehit mutationem in multiplicatum numerum.

Industria secunda.

Duorum numerorum, qui in se duci debent, alterutrum in duas, vel plures partes secato: quas singulas alter numerus insectus multiplicet. Deinde

inde singuli producti numeri simul addantur. Erit ex additione collectus numerus ille ipse; qui per multiplicationem produci debet. Vt si duo numeri 36 & 24 in se duci debeant, Seca numerum 36 in duas quaslibet partes, quæ faciliorem admissuræ videantur multiplicationem; vt in 30 & 6. Duc igitur 24 tum in 30, tum in 6: genitosque numeros 720 & 144 adde: fiet enim quæsitus numerus 864. Qui idem haberetur, si idem numerus 36 in duas partes æquales 18 & 18 diuisus foret: numerus enim 24 singulas multiplicans, producit 432: qui bis positus, & additus; vel per 2 multiplicatus eundem, quem prius, numerum 864 generat. Eodem modo si numerus 24 secetur in hasce tres partes 10, 10, 4: quarum singulæ ducantur in alterum numerum 36: producentur numeri tres 360, 360, 144. ex quorum additione colligitur numerus 864 ex numeris 36 & 24 in se ductis procreatus.

36	
30	6
24	24
—	—
720	144

Hoc eodem compendio etiam hoc modo vti licebit. Ad alterum duorum numerorum adde numerum quempiam qui multiplicationem præstiturus tibi videatur expeditiorem; qualem præstare solent numeri articuli propter figuras O quibus constant: tum multiplica & hunc numerum nouum, & numerum additum, per alterum numerum. Ac denique ex producto toto deme genitum numerum ex multiplicatione addití numeri reliquus enim erit quæsitus numerus multiplicationis duorum datorum numerorum. Vt ducendus est 45 in 27 Adde ad 27 tres vnitates, vt fiat 30. Tum multiplica 30 per 45, fiet 1350: à quo demi debet numerus 135; qui producitur ex numero 45 in additum numerum 3 ducto; vt habeatur facta subtractione, 1215: qui nascitur ex multiplicatione numerorum 45 & 27.

Vsum præstabit interdum facillimum in monadum, siue digitorum multiplicatione compendium hoc: siue digitorum alter secetur siue augeatur; aut etiã minuatur præsertim cum mente tantũ absoluẽdæ sæpius sint huiusmodi multiplicationes. Vt duci debet 8 in 9. Concipe ad digitum 9 addi 1, vt fiat 10. iam duc 8 in 10: fiet 80: à quo demere debes 8 propter additam illam vnitatem ad 9, vt fieret 10.

Ratio porrò huius industriæ petitur ex Prop. 1. lib. 2. Euclidis numeris applicatã. Ex ea enim constat secto duorum numerorum altero in quotlibet partes, quas insectus multiplicet; productos illos partiales simul sumptos æquales esse toti numero, qui ab insectis duobus numeris in se ductis generatur. E contrario. Si ex toto producto numero dematur productus ex numerorum altero in partem quandam alterius ducto; reliquus fiet numerus, ex reliqua eius parte per numerum illum alterum multiplicata. Vnde patet non minùs tutò ad numerorum alterum

aliquid addi posse, quàm ab eo demi, vt res foret, ad numerum quæsitum obtinendum

Industria Tertia.

Quando duorum numerorum ad multiplicationem propositorum alter in partes aliquot æquales secari potest (quod diuisione paulò post exponenda innotescet) hoc est, iuxta Prop. 10. Compositus est numerus: ducatur insectus alter numerus, in secti partium vnam. Deinde productus ducatur in numerum qui partem multiplicatam denominat: erit inde genitus numerus, is qui quæritur. Vtsi duas debeant in se 56 & 20. Quia 20 diuidi potest in duas partes æquales 10 & 10. Si insectus alter numerus 56 ducatur in partem 10: & productus 560 multiplicetur per numerum 2; qui denominat partem 10 numeri 20 multiplicatam: producetur 1120: qui ex insecto 56 in insectum 20 ducto generaretur. Quod si numerus idem 20 alias in partes diuideretur, vt in quinque; quarum quælibet est 4 & in earum vnam alter insectus numerus 56 duceretur: haberetur numerus 224. Qui deinceps ducatur in 5 denominantem partem illam 4 multiplicatam; nascetur idem, qui priùs numerus 1120.

Ratio huius methodi, etsi diuersa videri possit à ratione, quam ad probandam proximè allatam industriam attuli: eadem tamen est re paulò acutiùs obseruata. Nam numerus 20 in quatuor partes diuisus est; quas omnes multiplicat numerus insectus 56. Quare si omnes producti illi quinque numeri 224 adderentur iuxta methodum compendij secundi citati, numerus quæsitus 1120 generaretur. Verùm quia partes illæ quinque sunt æquales; vt breuior fiat additio, adhibetur vnius solùm producti 224 multiplicatio; quæ additio quædam est breuior, vt aliàs declaratum est, ita vt hæc methodus species quædam sit superioris, à qua solùm differt: quod in partes æquales numerus 20 secetur; iuxta illam verò in quascumque, siue æquales, siue inæquales diuidi possit.

Hic demùm obseruetur numerum alterum duorum sese multiplicantium ita in partes æquales secari interdum posse; vt partes ipsæ in alias æquales rursùs diuidi queant. Exempli gratiâ numerus 24 duci debet in numerum 15. Secabitur numerus 24 in partes quatuor æquales; quarum quælibet erit 6. quæ si numerum 15 multiplicaret, produceretur ex ea multiplicatione numerus 90: qui rursùs ductus in numerum 4 denominantem partem illam 6, hoc est, indicantem eam partem 6, esse quartam totius numeri 24 partem; produceret totum ex 24 in 15 ducto genitum numerum 360. Quia ergo duo numeri 4 & 90 sese mutuò multiplicare debent: quid obstat quin eorum alter, nempe 4 (qui numerus est compositus Propositionis 10.) rursùs secetur in duas partes æquales 2

 &

& 2: quarum vna numerum alterum insectum 90 multiplicet, vt producat 180: qui deinde productus iterum multiplicetur per denominatorem partis 2 numeri 4 (qui denominator est 2, cum sectus sit numerus 4 in duas partes æquales) vt rursùs fiat totus ex numero 24 in 15 ducto genitus numerus 360. Tunc ergo hi tres numeri 2, 2, 90 in seducti, quocunque ordine ducantur per Porp. 32. Semper producent 360, qui produci debet ex numeris insectis & immutatis 24 & 15 in se mutuò ductis. Cuius multiplicationis ratio eadem est cum priùs allata circa multiplicationem duorum numerorum partialium, vt patet. Portò non tres tantùm interdum numeri occurrent; qui multiplicati mutuò quæsitum numerum producant ex duobus insectis numeris in se ductis generandum; sed quatuor, aut etiam plures: nec alia est omnium ratio. Vt si numerus 72 quempiam numerum vt 35 multiplicare deberet. Productus foret 2520 Qui haberi potest, si insecto pemanente numero 35; secetur 72 in tres partes æquales, quarum vna est 24: quæ si multiplicaret 35, & productus 840 multiplicaretur per 3: produceretur totus ex 72 in 35 genitus numerus 2520. Sed rursùs pars illa 24 secetur in duas partes 12 & 12; ita vt denominans partes sit 2. Tunc tres numeri 3, 2. 12, & insectus 35 in se ducti eundem numerum 2520 ex insectis 72 & 35 productum gignent, iam quia numerus 12 compositus est, secetur in partes quatuor; quarum vna est 3, & denominans partem illam est numerus 4. Ergo quatuor numeri 3, 4, 2, 6, & insectus 35 in se mutuò ducti eundem semper numerum 2520 conficient: quem exhibuerunt insecti 72 & 35 in se ducti, quicunque tandem ordo seruetur eorum quinque numerorum, dum inter se multiplicantur iuxta Propositionem 32 citatam. Nec diuersa est à superiùs allata horum demonstratio.

Industria Quarta.

Industria, siue compendium, quod hic expositurus sum, dispendium fortasse est non nemo appellaturus: At ego, saluo meliori iudicio, nullum facilius, nullũ tutius censeo exhiberi posse: præsertim cum numeri multiplicandi magnâ figurarum copiâ constant: quo in casu multiplicationes non sine tædio, nec sine summo errandi periculo absolui possunt: quo vtroque ars hæc adhibita logistam liberatura est. Accedit; quod eadem omni difficultate, (quæ grauissima semper habita est) diuisionem ita liberatura est; vt de facilitate cum additione certare possit, vt docebit experientia. Totum porro artificium ita habet.

	A
A —— 3584	1 — 3584
B —— 672	2 — 7168
——	3 — 10752
C —— 7168	4 — 14336
D 25088	5 — 17920
E, 21504	6 — 21504
——	7 — 25088
F 2408448	8 — 28672
	9 — 32256

Cōponatur tabella singularis numeri multiplicandi in eum plane modū, quo superiùs Tabellam Pythagoricam construximus. Exempli gratiâ. Duo numeri A & B sunt multiplicandi mutuò. Assumatur alteruter A, cuius tabella construatur. Nouem itaque figuræ Arithmeticæ, siue digiti, vt cernis, ad læuam constituantur. Et è regione figuræ 1 statuatur multiplicandus ipse numerus A. Tum sibi ipsi addatur A, siue duplicetur; & productus è regione figuræ 2 collocetur. Ad hunc adde rursùs numerum A; vt fiat numerus figuræ 3 apponendus. Ad hunc adde denuò A. habebis quartū numerum quartæ figuræ 4 debitum. Ita porro perge donec nouem illis figuris debitos numeros continua additione numeri A definitos assignaueris. Habes paratam tabellam; quâ non secùs vteris ad multiplicationem numeri A per datum quemcunque numerum; ac vteris superiori tabella Pythagorica ad digitos in se ducendos. Numerus enim quilibet huius tabellæ toties continet numerum primum A; quoties figura ad læuam posita continet vnitatem: vt ipsa constructio apertè docet. Quo posito

Sit numerus A per B multiplicandus. Numeris A & B vt suprà præscriptum est, inter se compositis: figura 2 vltima numeri B, ducenda est in totum numerum A. Adi tabellam; & ex eâ decerpe numerum figuræ 2 multiplicanti respondentem, cúmque totum subscribe ad C, seruatis, vt superiùs, classibus. Deinde penultima figura 7, eiusdem numeri B duci debet in numerum A. Hanc multiplicationem iam absolutam habes in tabella è regione figuræ 7. Numerum ergo D ex eâ desumptum ita subscribe; vt superiùs traditum est, & schema refert. Idem præsta circa figuram 6 primam numeri B, ex quâ orta est numerus E. Hos denique numeros, vt aliàs, in vnum numerum F collige: is enim ille ipse est, quem duo numeri A & B in se ducti producunt: quem sine hæsitatione, sine vlla animi contentione hac arte consecutus es.

Industria Quinta.

Placet quibusdam alia quædam multiplicandi ratio: quæ, vt nullum operationis compendium præstet; speciem tamen præsefert gratissimam: Quo nomine nostris in institutionibus desiderari non debet. Est autem huiusmodi. Proponatur iam sæpiùs adhibitus numerus A, multiplicandus per numerum B; ille quatuor figuris constet, hic tribus. Paretur diagramma rectangulum

R

R S T X. Cuius latus R S diuidatur in hoc exemplo, in quo numerus A multiplicatus quatuor figuris constat; in sex partes æquales. Duabus scilicet plures quam sint multiplicandi numeri A figuræ. Latus verò alterum R X rectanguli eiusdem diuidatur in quinque partes item æquales, duabus etiam plures, quàm sint figuræ numeri B multiplicantis; qui tres continet. Tum per diuisionum puncta lineæ, & transuersæ, & perpendiculares agantur, vt totum rectangulum in Quadratula in cratis modum distinguatur. Denique omissis ambientis limbi Quadratulis reliqua diametris suis diuidantur à dextra læuam versus in hoc priore schemate obliquè descendentibus quibus paratis. In summo ordine R S repone numerum A; in ordine verò S T ad dextram statue multiplicantem B ita vt prima eius figura 6 locum supremum occupet; reliquæ deinceps sequantur.

Iam ad multiplicationem accede: quam inibis à quacunque multiplicantis B figurâ, à suprema 6, ab infimâ 2, vt libuerit. Nunc à suprema ducatur initium. Duc itaque figuram 6 in figuram 4, vltimam numeri A: genitus autem 24, subscribatur figuræ 4, in ordine à figura eadem 4 descendente: ita vt è duabus figuris numeri producti 24; prior 2 supra Quadratuli diametrum; posterior 4 sub eadem diametro collocetur. Eadem arte, ductâ eadem figurâ 6 in anteriorem figuram 8 multiplicati A. Producti 48 figura prior 4 supra diametrum Quadratuli sequentis, posterior infra eandem, sedem sibi figent. Sic porrò pergetur donec omnia supremi ordinis Quadratula suis numeris insignita fuerint. Sic etiam ordinis secundi; sic tertij Quadratula numeros excipient productos ex secunda 7, & ex tertia figura 2 ductis in singulas figuras numeri A. Vbi aduertas, quando ex multiplicatione figuræ numeri B multiplicantis in figuram aliquam multiplicati numeri A, contigerit numerum produci vnicâ figurâ expressum; vnicam illam figuram sub diametro Quadratuli sibi assignati statui debere. Vacuo remanente triangulo superiore eiusdem Quadratuli: nisi forte malueris locum illum vacuum

figura

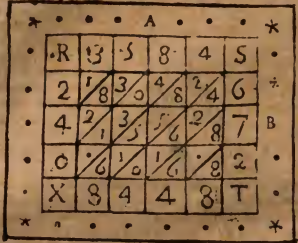


figura o replere. Ita vides in infimo ordine, quem constituit vltima numeri B figura 2 in figuras numeri A ducta; Quadratulum primum & vltimum vnico numero inuri sub diametro constituto, illud, numero 6, quem figura 2 ducta in figuram 3 generauit; istud, numero 8 ex eadem figura 2 in figuram 4 ducta procreato. His ita absolutis. Numerus per multiplicationem generandus per additionem eliciendus est hoc modo. Addendi sunt numeri omnes diametrales cuiusuis diametralis ordinis initio facto ab vltimo ordine vltimæ figuræ 2 numeri B affini: qui quidem ordo vnicam figuram 8 continet, & vlteriori additione caret. Tum ad proximè sequentem ordinem diametralem; qui duabus figuris 8 & 6 constat, fiet progressus. Nati verò ex additione numeri collocandi sunt in Quadratulis vacuis: quæ habentur tum inter X & R, tum inter X & T: ita scilicet vt singula figuram excipiant, quam ipsis assignat ordo diametralis ipsis cohærens. Atque ita tandem numerum 2 4 0 8 4 4 8 in limbis duobus R X, X T contentum, qui ex numero B in A ducto gignitur, assequeris.

Alia

Alia quædam huius Artificij forma à præcedente nonnihil diuerſa poteſt obſeruari. Cuius diuerſitatis ratio tota pendet è ſitu permutato numeri B multiplicantis. Si enim numero A ordinem, vt priùs, ſuperiorem R S occupante numerus B à dextro limbo S T in ſiniſtrũ R X tranſeat. Eiuſque prima figura 6, quæ ſupremum locum in ordine S T occupabat; nunc in infimum ordinis R X reiiciatur; quam reliquæ figuræ numeri B ſurſum verſus R ſequantur. Denique diametri Quadratulorum à læua verſus dextram obliquè deſcendant: numeri omnes ex multiplicatione ſingularum figurarum numeri B in figuras omnes numeri A, prodeuntes in obliquis diametralibus ordinibus reponendi ſunt loco etiam permutato: ita ſcilicet vt, ſi figura quæpiam numeri B in figuram alteram numeri A ducta numerum gignat duabus figuris expreſſum; poſterior ſupra diametrum Quadratuli huic numero genito debiti; prior infra eandem collocetur. Quod ſi vnicâ figurâ numerus ille ex multiplicatione genitus exprimatur: eâ ſupra diametrum ſtatuatur vacuo relicto, aut figurâ O repleto triangulo infra diametrum. Quibus ita compoſitis additio fiet ordinum diametralium initio facto ab ordine vltimæ figuræ 4, numeri A proximo; qui quidem vnica figura 8 conſtat. Hac autem additione abſoluta habitur numerus 2 4 0 8 4 4 8 ex numerorum A & B multiplicatione genitus: qui limbis duobus X T, T S continetur. Quæ omnia in ipſo ſchemate apertè licet intueri.



Ratio autem huius vtriuſque methodi, ſi attentiùs obſeruetur, alia non deprehendetur à communi multiplicationis modo: niſi quod dum ſingulæ figuræ in ſingulas ducuntur, numerúmque generant duabus figuris conſtantem; hac in methodo ambæ deſignantur, nullaque mente ſeruatur; contrà quàm fiat iuxta methodum vulgarem numeris multiplicatis.

PROP. XXXIX. *Defin.*

Diuisio numeri per numerum est numeri inuestigatio: qui toties contineat vnitatem; quoties numerus, qui diuiditur, continet diuidentem.

Expositio.

Arithmetica hæc operatio multiplicationi superiùs expositæ planè contraria est. Quòd enim componit multiplicatio; id totum resoluit diuisio: quædámque species est subtractionis; vt additionis subtractioni opposita species quædam est multiplicatio. Quo fiet, vt ex multiplicationis, eiúsque proprietatum tradità declaratione non parùm lucis ad diuisionis, quam aggredior, expositionem accessurum sit. Ex duobus ergo datis numeris perficitur diuisio quælibet: qua in tertij cuiusdam numeri ignoti cognitionem veniatur. Ex duobus illis, vnus diuisus siue diuidendus; alter diuidens, siue diuisor vocitatur: Tertius autem, qui per diuisionem quæritur, quotiens vulgò solet appellari; ex eo scilicet deductâ nuncupatione: quòd vnitatibus quibus constat, significet quoties diuisor contineatur in diuidendo, quot enim quotientis vnitates extiterint; tot diuidendus numeros continebit æquales diuisori, siue in tot partes diuisori æquales distribuetur per diuisionem. Diuisionis ergo vnum est illud munus; vt quotientem, qui ignotus est, detegat & notum reddat: quo quidem ex munere allata eius definitio petita est.

Obseruanda est hîc prætereà diuisionem inter, & multiplicationem insignis oppositio. Quemadmodum enim ex vnius numeri in alterum multiplicatione planus numerus generatur, vt Prop. 29. explicatum est: qui ratione illius multiplicationis ab vtroque multiplicato; (qui vt sic, linearis censetur) specie differt; & secundam quantitatis speciem, nimirum superficiem imitatur: ita è contrario, numerus quilibet, cuius diuisio instituitur, speciem quidem ratione diuisionis, vel vt diuiditur, mutat: sed ex plano numero quotiens linearis fit, diuersæ à diuiso speciei. Ita vt omnis numerus, qui per alium secatur planus numerus censeri debeat, nec immeritò. Si enim quotiens inuentus per diuisionem alicuius numeri; & numerus diuidens in se mutuò ducantur: fiet ex citata Prop. 29. planus numerus: qui ille ipse est, qui diuisus fuit. At quomodo hæc mutatio speciei sequatur ex diuisione, paulò fusiùs (res enim est contemplatione digna, quæque difficultatibus, nec paucis, nec leuibus occurrit) exponendum est.

Sit

Sit ergo numerus planus rectanguli Parallelogrammi (de hoc enim tantùm hic agitur, vt Prop. 29. monui) formam A C, referens: qui diuidi debeat per diuiſorem B A. Quæritur ergo per diuiſionem hanc, alterum rectanguli A C latus B C; quod quotiens ſit, ſuíſque vnitatibus oſtendat; quoties diuiſor B A in toto diuiſo Plano numero A C contineatur. Verùm qui concipi poſſit numerus A B linearis toties in numero A C, qui planus eſt, contineri: quot ſunt in laterali numero B C vnitates? Clariùs. Quomodo numerus linearis A B pars dici poteſt numeri plani A C; quæ toties repetita, ſibíque addita, quoties exigunt vnitates numeri B C; ipſum adæquet numerum A C planum? Eodem omninò modo poterit concipi: quo citatâ Prop. 29. Declaratum eſt, numerum linearem A B in linearem item numerum B C ductum, Planum A C diuerſæ à multiplicatis B A, B C ſpeciei numerum generare. Sicut enim numerorum duorum B A, B C, alter, nempe B A, rectangularem planam formam B E induere cenſebatur: quæ deinde toties accepta, quot ſunt in altero B C vnitates, planum creabat numerum A C: Ita nunc è conuerſo, ſi planus numerus A C in tot partes æquales diuidatur: quot ſunt in diuiſore A B vnitates: debent vnitates numeri A B, planæ cenſeri hoc eſt in ſe ductæ; ita vt ſingulæ Quadrato B G ſint æquales, totúmque rectangulum A F conſtituant, tot Quadratulis confectum; quot ſunt in lineari numero A B vnitates. Tunc autem intelligi facilè poteſt, quomodo numerus A C, quem planum cenſeri neceſſariò debere ſuperiùs oſtendi, diuidatur in partes diuiſori A F in locum diuiſoris A B ſubſtituto æquales: quarum numerus erit quotiens B C per diuiſionem inuentus.



PROP. XL *Definitio altera Diuiſionis.*

Diuiſio numeri per numerum eſt numeri inueſtigatio: qui eandem habeat rationem ad vnitatem; quam habet diuiſus numerus ad diuidentem.

Expoſitio

Hæc eſt altera diuiſionis definitio, ſiue potiùs deſcriptio ex diuiſionis proprietate petita. Quam facilè ex ipſo ſuperiùs allato diagrammate con-

PROP. XXXIX. *Defin.*

Diuiſio numeri per numerum eſt numeri inueſtigatio: qui toties contineat vnitatem; quoties numerus, qui diuiditur, continet diuidentem.

Expoſitio.

Arithmetica hæc operatio multiplicationi ſuperiùs expoſitæ planè contraria eſt. Quod enim componit multiplicatio; id totum reſoluit diuiſio: quædámque ſpecies eſt ſubtractionis; vt additionis ſubtractioni oppoſitæ ſpecies quædam eſt multiplicatio. Quo fiet, vt ex multiplicationis, eiúſque proprietatum traditâ declaratione non parùm lucis ad diuiſionis, quam aggredior, expoſitionem acceſſurum ſit. Ex duobus ergo datis numeris perficitur diuiſio quælibet: qua in tertij cuiuſdam numeri ignoti cognitionem veniatur. Ex duobus illis, vnus diuiſus ſiue diuidendus; alter diuidens, ſiue diuiſor vocitatur: Tertius autem, qui per diuiſionem quæritur, quotiens vulgò ſolet appellari; ex eo ſcilicet deductâ nuncupatione: quòd vnitatibus quibus conſtat, ſignificet quoties diuiſor contineatur in diuidendo, quot enim quotientis vnitates extiterint; tot diuidendus numeros continebit æquales diuiſori, ſiue in tot partes diuiſori æquales diſtribuetur per diuiſionem. Diuiſionis ergo vnum eſt illud munus; vt quotientem, qui ignotus eſt, detegat & notum reddat: quo quidem ex munere allata eius definitio petita eſt.

Obſeruanda eſt hîc præterea diuiſionem inter, & multiplicationem inſignis oppoſitio. Quemadmodum enim ex vnius numeri in alterum multiplicatione planus numerus generatur, vt Prop. 29. explicatum eſt: qui ratione illius multiplicationis ab vtroque multiplicato; (qui vt ſic, linearis cenſetur) ſpecie differt; & ſecundam quantitatis ſpeciem, nimirum ſuperficiem imitatur: ita è contrario, numerus quilibet, cuius diuiſio inſtituitur, ſpeciem quidem ratione diuiſionis, vel vt diuiditur, mutat: ſed ex plano numero quotiens linearis fit, diuerſæ à diuiſo ſpeciei. Ita vt omnis numerus, qui per alium ſecatur planus numerus cenſeri debeat, nec immeritò. Si enim quotiens inuentus per diuiſionem alicuius numeri; & numerus diuidens in ſe mutuò ducantur: fiet ex citata Prop. 29. planus numerus: qui ille ipſe eſt; qui diuiſus fuit. At quomodo hæc mutatio ſpeciei ſequatur ex diuiſione, paulò fuſiùs (res enim eſt contemplatione digna, quæque difficultatibus, nec paucis, nec leuibus occurrit) exponendum eſt.

Sit

Sit ergo numerus planus rectanguli Parallelogrammi (de hoc enim tantùm hic agitur, vt Prop. 29. monui) formam A C, referens: qui diuidi debeat per diuisorem B A. Quæritur ergo per diuisionem hanc, alterum rectanguli A C latus B C; quod quotiens sit, suísque vnitatibus ostendat; quoties diuisor B A in toto diuiso Plano numero A C contineatur. Verùm qui concipi possit numerus A B linearis toties in numero A C, qui planus est, contineri: quot sunt in laterali numero B C vnitates? Clariùs. Quomodo numerus linearis A B pars dici potest numeri plani A C; quæ toties repetita, sibíque addita, quoties exigunt vnitates numeri B C; ipsum adæquet numerum A C planum? Eodem omninò modo poterit concipi: quo citatâ Prop. 29. Declaratum est, numerum linearem A B in linearem item numerum B C ductum, Planum A C diuersæ à multiplicatis B A, B C speciei numerum generare. Sicut enim numerorum duorum B A, B C, alter, nempe B A, rectangularem planam formam B E induere censebatur: quæ deinde toties accepta, quot sunt in altero B C vnitates, planum creabat numerum A C: Ita nunc è conuerso, si planus numerus A C in tot partes æquales diuidatur: quot sunt in diuisore A B vnitates: debent vnitates numeri A B, planæ censeri hoc est in se ductæ; ita vt singulæ Quadrato B G sint æquales, totúmque rectangulum A F constituant, tot Quadratulis confectum; quot sunt in lineari numero A B vnitates. Tunc autem intelligi facilè potest, quomodo numerus A C, quem planum censeri necessariò debere superiùs ostendi, diuidatur in partes diuisori A F in locum diuisoris A B substituto æquales: quarum numerus erit quotiens B C per diuisionem inuentus.



PROP. XL *Definitio altera Diuisionis.*

Diuisio numeri per numerum est numeri inuestigatio: qui eandem habeat rationem ad vnitatem; quam habet diuisus numerus ad diuidentem.

Expositio

Hæc est altera diuisionis definitio, siue potiùs descriptio ex diuisionis proprietate petita. Quam facilè ex ipso superiùs allato diagrammate con-

PROP. XXXIX. *Defin.*

Diuisio numeri per numerum est numeri inuestigatio: qui toties contineat vnitatem; quoties numerus, qui diuiditur, continet diuidentem.

Expositio.

Arithmetica hæc operatio multiplicationi superiùs expositæ planè contraria est. Quod enim componit multiplicatio; id totum resoluit diuisio: quædámque species est subtractionis; vt additionis subtractioni oppositæ species quædam est multiplicatio. Quo fiet, vt ex multiplicationis, eiúsque proprietatum traditâ declaratione non parùm lucis ad diuisionis, quam aggredior, expositionem accessurum sit. Ex duobus ergo datis numeris perficitur diuisio quælibet: qua in tertij cuiusdam numeri ignoti cognitionem veniatur. Ex duobus illis, vnus diuisus siue diuidendus; alter diuidens, siue diuisor vocitatur: Tertius autem, qui per diuisionem quæritur, quotiens vulgò solet appellari; ex eo scilicet deductâ nuncupatione: quòd vnitatibus quibus constat, significet quoties diuisor contineatur in diuidendo, quot enim quotientis vnitates extiterint; tot diuidendus numeros continebit æquales diuisori, siue in tot partes diuisori æquales distribuetur per diuisionem. Diuisionis ergo vnum est illud munus; vt quotientem, qui ignotus est, detegat & notum reddat: quo quidem ex munere allata eius definitio petita est.

Obseruanda est hîc præterea diuisionem inter, & multiplicationem insignis oppositio. Quemadmodum enim ex vnius numeri in alterum multiplicatione planus numerus generatur, vt Prop. 29. explicatum est: qui ratione illius multiplicationis ab vtroque multiplicato; (qui vt sic, linearis censetur) specie differt; & secundam quantitatis speciem, nimirum superficiem imitatur: ita è contrario, numerus quilibet, cuius diuisio instituitur, speciem quidem ratione diuisionis, vel vt diuiditur, mutat: sed ex plano numero quotiens linearis fit, diuersæ à diuiso speciei. Ita vt omnis numerus, qui per alium secatur planus numerus censeri debeat, nec immeritò. Si enim quotiens inuentus per diuisionem alicuius numeri; & numerus diuidens in se mutuò ducantur: fiet ex citata Prop. 29. planus numerus: qui ille ipse est; qui diuisus fuit. At quomodo hæc mutatio speciei sequatur ex diuisione, paulò fusiùs (res enim est contemplatione digna, quæque difficultatibus, nec paucis, nec leuibus occurrit) exponendum est.

Sit

Sit ergo numerus planus rectanguli Parallelogrammi (de hoc enim tantùm hic agitur, vt Prop. 29. monui) formam A C, referens : qui diuidi debeat per diuisorem B A. Quæritur ergo per diuisionem hanc, alterum rectanguli A C latus B C ; quod quotiens sit, suísque vnitatibus ostendat ; quoties diuisor B A in toto diuiso Plano, numero A C contineatur. Verùm qui concipi possit numerus A B linearis toties in numero A C, qui planus est, contineri : quot sunt in laterali numero B C vnitates? Clariùs. Quomodo numerus linearis A B pars dici potest numeri plani A C ; quæ toties repetita, sibíque addita, quoties exigunt vnitates numeri B C ; ipsum adæquet numerum A C planum ? Eodem omninò modo poterit concipi: quo citatâ Prop. 29. Declaratum est, numerum linearem A B in linearem item numerum B C ductum, Planum A C diuersæ à multiplicatis B A, B C speciei numerum generare. Sicut enim numerorum duorum, B A, B C, alter, nempe B A, rectangularem planam formam B E induere censebatur : quæ deinde toties accepta, quot sunt in altero B C vnitates, planum creabat numerum A C : Ita nunc è conuerso, si planus numerus A C in tot partes æquales diuidatur : quot sunt in diuisore A B vnitates : debent vnitates numeri A B, planæ censeri hoc est in se ductæ ; ita vt singulæ Quadrato B G sint æquales, totúmque rectangulum A F constituant, tot Quadratulis confectum ; quot sunt in lineari numero A B vnitates. Tunc autem intelligi facilè potest, quomodo numerus A C, quem planum censeri necessariò debere superiùs ostendi, diuidatur in partes diuisori A F in locum diuisoris A B substituto æquales : quarum numerus erit quotiens B C per diuisionem inuentus.



PROP. XL *Definitio altera Diuisionis.*

Diuisio numeri per numerum est numeri inuestigatio : qui eandem habeat rationem ad vnitatem ; quam habet diuisus numerus ad diuidentem.

Expositio

Hæc est altera diuisionis definitio, siue potiùs descriptio ex diuisionis proprietate petita. Quam facilè ex ipso superiùs allato diagrammate con-

PROP. XXXIX. *Defin.*

Diuisio numeri per numerum est numeri inuestigatio: qui toties contineat vnitatem; quoties numerus, qui diuiditur, continet diuidentem.

Expositio.

Arithmetica hæc operatio multiplicationi superiùs expositæ planè contraria est. Quod enim componit multiplicatio; id totum resoluit diuisio: quædámque species est subtractionis; vt additionis subtractioni oppositæ species quædam est multiplicatio. Quo fiet, vt ex multiplicationis, eiúsque proprietatum traditâ declaratione non parùm lucis ad diuisionis, quam aggredior, expositionem accessurum sit. Ex duobus ergo datis numeris perficitur diuisio quælibet: qua in tertij cuiusdam numeri ignoti cognitionem veniatur. Ex duobus illis, vnus diuisus siue diuidendus; alter diuidens, siue diuisor vocitatur: Tertius autem, qui per diuisionem quæritur, quotiens vulgò solet appellari; ex eo scilicet deductâ nuncupatione: quòd vnitatibus quibus constat, significet quoties diuisor contineatur in diuidendo, quot enim quotientis vnitates extiterint; tot diuidendus numeros continebit æquales diuisori, siue in tot partes diuisori æquales distribuetur per diuisionem. Diuisionis ergo vnum est illud munus; vt quotientem, qui ignotus est, detegat & notum reddat: quo quidem ex munere allata eius definitio petita est.

Obseruanda est hîc prætereà diuisionem inter, & multiplicationem insignis oppositio. Quemadmodum enim ex vnius numeri in alterum multiplicatione planus numerus generatur, vt Prop. 29. explicatum est: qui ratione illius multiplicationis ab vtroque multiplicato; (qui vt sic, linearis censetur) specie differt; & secundam quantitatis speciem, nimirum superficiem imitatur: ita è contrario, numerus quilibet, cuius diuisio instituitur, speciem quidem ratione diuisionis, vel vt diuiditur, mutat: sed ex plano numero quotiens linearis fit, diuersæ à diuiso speciei. Ita vt omnis numerus, qui per alium secatur planus numerus censeri debeat, nec immeritò. Si enim quotiens inuentus per diuisionem alicuius numeri; & numerus diuidens in se mutuò ducantur: fiet ex citata Prop. 29. planus numerus: qui ille ipse est, qui diuisus fuit. At quomodo hæc mutatio speciei sequatur ex diuisione, paulò fusiùs (res enim est contemplatione digna, quæque difficultatibus, nec paucis, nec leuibus occurrit) exponendum est.

Sit

Sit ergo numerus planus rectanguli Parallelogrammi (de hoc enim tantùm hic agitur, vt Prop. 29. monui) formam A C, referens: qui diuidi debeat per diuisorem B A. Quæritur ergo per diuisionem hanc, alterum rectanguli A C latus B C; quod quotiens sit, suísque vnitatibus ostendat; quoties diuisor B A in toto diuiso Plano numero A C contineatur. Verùm qui concipi possit numerus A B linearis toties in numero A C, qui planus est, contineri: quot sunt in laterali numero B C vnitates? Clariùs. Quomodo numerus linearis A B pars dici potest numeri plani A C; quæ toties repetita, sibíque addita, quoties exigunt vnitates numeri B C; ipsum adæquet numerum A C planum? Eodem omninò modo poterit concipi: quo citatâ Prop. 29. Declaratum est, numerum linearem A B in linearem item numerum B C ductum, Planum A C diuersæ à multiplicatis B A, B C speciei numerum generare. Sicut enim numerorum duorum B A, B C, alter, nempe B A, rectangularem planam formam B E induere censebatur: quæ deinde toties accepta, quot sunt in altero B C vnitates, planum creabat numerum A C: Ita nunc è conuerso, si planus numerus A C in tot partes æquales diuidatur: quot sunt in diuisore A B vnitates: debent vnitates numeri A B, planæ censeri hoc est in se ductæ; ita vt singulæ Quadrato B G sint æquales, totúmque rectangulum A F constituant, tot Quadratulis confectum; quot sunt in lineari numero A B vnitates. Tunc autem intelligi facilè potest, quomodo numerus A C, quem planum censeri necessariò debere superiùs ostendi, diuidatur in partes diuisori A F in locum diuisoris A B substituto æquales: quarum numerus erit quotiens B C per diuisionem inuentus.



PROP. XL *Definitio altera Diuisionis.*

Diuisio numeri per numerum est numeri inuestigatio: qui eandem habeat rationem ad vnitatem; quam habet diuisus numerus ad diuidentem.

Expositio

Hæc est altera diuisionis definitio, siue potiùs descriptio ex diuisionis proprietate petita. Quam facilè ex ipso superiùs allato diagrammate con-

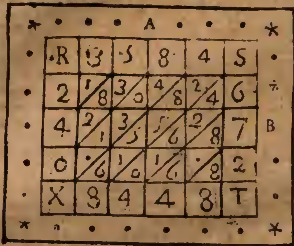


figura o replere. Ita vides in infimo ordine, quem constituit vltima numeri B figura 2 in figuras numeri A ducta; Quadratulum primum & vltimum vnico numero inuri sub diametro constituto, illud, numero 6, quem figura 2 ducta in figuram 3 generauit; istud, numero 8 ex eadem figura 2 in figuram 4 ducta procreato. His ita absolutis. Numerus per multiplicationem generandus per additionem eliciendus est hoc modo. Addendi sunt numeri omnes diametrales cuiusuis diametralis ordinis initio facto ab vltimo ordine vltimæ figuræ 2 numeri B affini: qui quidem ordo vnicam figuram 8 continet, & vlteriori additione caret. Tum ad proximè sequentem ordinem diametralem; qui duabus figuris 8 & 6 constat, fiet progressus. Nati verò ex additione numeri collocandi sunt in Quadratulis vacuis: quæ habentur tum inter X & R, tum inter X & T: ita scilicet vt singula figuram excipiant, quam ipsis assignat ordo diametralis ipsis cohærens. Atque ita tandem numerum 2 4 0 8 4 4 8 in limbis duobus R X, X T contentum, qui ex numero B in A ducto gignitur, assequeris.

Alia

Alia quædam huius Artificij forma à præcedente nonnihil diuersa potest obseruari. Cuius diuersitatis ratio tota pendet è situ permutato numeri B multiplicantis. Si enim numero A ordinem, vt priùs, superiorem R S occupante numerus B à dextro limbo S T in sinistrũ R X transeat. Eiusque prima figura 6, quæ supremum locum in ordine S T occupabat; nunc in infimum ordinis R X reiiciatur; quam reliquæ figuræ numeri B sursum versus R sequantur. Denique diametri Quadratulorum à læua versus dextram obliquè descendant: numeri omnes ex multiplicatione singularum figurarum numeri B in figuras omnes numeri A, prodeuntes in obliquis diametralibus ordinibus reponendi sunt loco etiam permutato: ita scilicet vt, si figura quæpiam numeri B in figuram alteram numeri A ducta numerum gignat duabus figuris expressum; posterior supra diametrum Quadratuli huic numero genito debiti; prior infra eandem collocetur. Quod si vnicâ figurâ numerus ille ex multiplicatione genitus exprimatur: eâ supra diametrum statuatur vacuo relicto, aut figurâ O repleto triangulo infra diametrum. Quibus ita compositis additio fiet ordinum diametralium initio facto ab ordine vltimæ figuræ 4, numeri A proximo; qui quidem vnica figura 8 constat. Hac autem additione absoluta habitur numerus 2 4 0 8 4 4 8 ex numerorum A & B multiplicatione genitus: qui limbis duobus X T, T S continetur. Quæ omnia in ipso schemate apertè licet intueri.



Ratio autem huius vtriusque methodi, si attentiùs obseruetur, alia non deprehendetur à communi multiplicationis modo: nisi quod dum singulæ figuræ in singulas ducuntur, numerúmque generant duabus figuris constantem; hac in methodo ambæ designantur, nullaque mente seruatur, contrà quàm fiat iuxta methodum vulgarem numeris multiplicatis.

PROP. XXXIX. *Defin.*

Diuiſio numeri per numerum eſt numeri inueſtigatio: qui toties contineat vnitatem; quoties numerus, qui diuiditur, continet diuidentem.

Expoſitio.

Arithmetica hæc operatio multiplicationi ſuperiùs expoſitæ planè contraria eſt. Quod enim componit multiplicatio; id totum reſoluit diuiſio: quædámque ſpecies eſt ſubtractionis; vt additionis ſubtractioni oppoſitæ ſpecies quædam eſt multiplicatio. Quo fiet, vt ex multiplicationis, eiúſque proprietatum traditâ declaratione non parùm lucis ad diuiſionis, quam aggredior, expoſitionem acceſſurum ſit. Ex duobus ergo datis numeris perficitur diuiſio quælibet: qua in tertij cuiuſdam numeri ignoti cognitionem veniatur. Ex duobus illis, vnus diuiſus ſiue diuidendus; alter diuidens, ſiue diuiſor vocitatur: Tertius autem, qui per diuiſionem quæritur, quotiens vulgò ſolet appellari; ex eo ſcilicet deductâ nuncupatione: quòd vnitatibus quibus conſtat, ſignificet quoties diuiſor contineatur in diuidendo, quot enim quotientis vnitates extiterint; tot diuidendus numeros continebit æquales diuiſori, ſiue in tot partes diuiſori æquales diſtribuetur per diuiſionem. Diuiſionis ergo vnum eſt illud munus; vt quotientem, qui ignotus eſt, detegat & notum reddat: quo quidem ex munere allata eius definitio petita eſt.

Obſeruanda eſt hîc prætereà diuiſionem inter, & multiplicationem inſignis oppoſitio. Quemadmodum enim ex vnius numeri in alterum multiplicatione planus numerus generatur, vt Prop. 29. explicatum eſt: qui ratione illius multiplicationis ab vtroque multiplicato; (qui vt ſic, linearis cenſetur) ſpecie differt; & ſecundam quantitatis ſpeciem, nimirum ſuperficiem imitatur: ita è contrario, numerus quilibet, cuius diuiſio inſtituitur, ſpeciem quidem ratione diuiſionis, vel vt diuiditur, mutat: ſed ex plano numero quotiens linearis fit, diuerſæ à diuiſo ſpeciei. Ita vt omnis numerus, qui per alium ſecatur planus numerus cenſeri debeat, nec immeritò. Si enim quotiens inuentus per diuiſionem alicuius numeri; & numerus diuidens in ſe mutuò ducantur: fiet ex citata Prop. 29. planus numerus: qui ille ipſe eſt, qui diuiſus fuit. At quomodo hæc mutatio ſpeciei ſequatur ex diuiſione, paulò fuſiùs (res enim eſt contemplatione digna, quæque difficultatibus, nec paucis, nec leuibus occurrit) exponendum eſt.

Sit

Sit ergo numerus planus rectanguli Parallelogrammi (de hoc enim tantùm hic agitur, vt Prop. 29. monui) formam A C, referens: qui diuidi debeat per diuisorem B A. Quæritur ergo per diuisionem hanc, alterum rectanguli A C latus B C; quod quotiens sit, suísque vnitatibus ostendat; quoties diuisor B A in toto diuiso Plano numero A C contineatur. Verùm qui concipi possit numerus A B linearis toties in numero A C, qui planus est, contineri: quot sunt in laterali numero B C vnitates? Clariùs. Quomodo numerus linearis A B pars dici potest numeri plani A C; quæ toties repetita, sibíque addita, quoties exigunt vnitates numeri B C; ipsum adæquet numerum A C planum? Eodem omninò modo poterit concipi: quo citatâ Prop. 29. Declaratum est, numerum linearem A B in linearem item numerum B C ductum, Planum A C diuersæ à multiplicatis B A, B C speciei numerum generare. Sicut enim numerorum duorum B A, B C, alter, nempe B A, rectangularem planam formam B E induere censebatur: quæ deinde toties accepta, quot sunt in altero B C vnitates, planum creabat numerum A C: Ita nunc è conuerso, si planus numerus A C in tot partes æquales diuidatur: quot sunt in diuisore A B vnitates: debent vnitates numeri A B, planæ censeri hoc est in se ductæ; ita vt singulæ Quadrato B G sint æquales, totúmque rectangulum A F constituant, tot Quadratulis confectum; quot sunt in lineari numero A B vnitates. Tunc autem intelligi facilè potest, quomodo numerus A C, quem planum censeri necessariò debere superiùs ostendi, diuidatur in partes diuisori A F in locum diuisoris A B substituto æquales: quarum numerus erit quotiens B C per diuisionem inuentus.

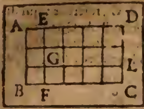


PROP. XL *Definitio altera Diuisionis.*

Diuisio numeri per numerum est numeri inuestigatio: qui eandem habeat rationem ad vnitatem; quam habet diuisus numerus ad diuidentem.

Expositio

Hæc est altera diuisionis definitio, siue potiùs descriptio ex diuisionis proprietate petita. Quam facilè ex ipso superiùs allato diagrammate con-



cipies. In quo supponitur planus numerus A C diuidi per planum item numerum A F, numeri linearis A B loco vt proximè declaratum est) substitutum. Diuiditur ergo A C in tot partes numero plano A F æquales quot vnitates continet linearis numerus B C: singulæ enim particulæ lineæ B C, bases sunt rectangulorum æqualium, & inter se, & rectangulo B E, hoc est, numero B A diuisori. Nunquid igitur non est eadem ratio totius numeri A C diuidendi ad diuisorem B E; & quotientis, siue numeri per diuisionem producti B C, ad vnitatem B F? cum numerus planus A C toties contineat diuisorem B E; quoties numerus quotiens B C continet vnitatem B F?

Cæterùm. Talem hîc assumo planum numerum A C diuidendum per numerum B E diuisorem: vt ille hunc contineat præcisè aliquoties: sitque ille huius multiplex adæquatè, hic autem illius pars propriè dicta iuxta Propositionem 9. vt scilicet numeros fractos hîc interim deuitem: qui ob peculiarem quandam difficultatem, seorsim ab integris tractari debent: de quibus libro secundo instituendus erit sermo accuratior: vbi ostendam non minus fractis, quam integris numeris conuenire hanc definitionem.

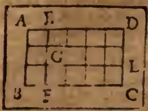
PROP. XXXXI. *Defin. Tertia Diuisionis.*

Diuisio numeri per numerum est applicatio numeri diuisi ad diuidentem: ex qua numerus quispiam oriatur.

Expositio.

Hac applicationis appellatione vtuntur non rarò celebres numerorum tum vulgarium, tum Algebraicorum tractatores; vt propterea huius nuncupationis ratio, & origo in his Institutionibus desiderari non debeat. Si ergo numerus quispiam diuidendus sit: cum Planus, vt supra exposui, censeri debeat; atque adeò omnes eius vnitates quadratulis designentur; ex quibus diuidendus numerus constat: Diuisor numerus tot etiam constabit quadratulis, quot vnitatibus. Neque enim numerus planus nisi per planum diuidi potest; vt partes scilicet sint cum toto homogeneæ. Diuisor ergo numerus rectangulo exprimetur in tot quadratula

distributa



distributa, quot in eo sunt vnitates. Tale rectangulum est in Diagrammate apposito B E; per quod diuidi debet numerus planus A C. Hoc est, sumi debet in numero A C., rectangulum B. E quoties fieri poterit. Quoties autem in numero plano A C sumitur diuisor planus B E: toties eius basis B F repetitur: eâque repetitione habetur tota latitudo B C totius numeri plani A C. Quæ latitudo B C, vt patet, generatur; dum totus numerus A C determinatur, contrahitur, siue *applicatur* ad diuisorem B E. Ita vt non ineptè dici queat diuisio numeri A C per numerum B E, *applicatio numeri A C ad numerum diuisorem B E*; vt per hanc *applicationem* nota habeatur latitudo B C, quæ est quotiens per diuisionem productus, qui alius erit, & alius quoties alius & alius maior, aut minor diuisor B E assumetur ad diuidendum planum numerum A C.

PROP. XXXXII. *Probl.*

Numerum quemcumque datum per digitum siue per numerum vnicâ figurâ expressum diuidere.

Expositio.

Numerus quilibet diuidendus; vt hic quidem, vbi de integrorum tantùm diuisione agitur, fractis in sequentem librum reiectis; maior diuisore supponitur, cum inquiri debeat; quoties hic tanquam pars in illo velut toto, contineatur. Rursùs diuisor, vel est digitus, vna scilicet aliqua ex nouem vulgaribus Arithmeticis figuris; vel est numerus figuris pluribus constans, siue articulus ille fuerit, siue compositus numerus: de quo diuisoris genere, vt magis obscuro, totámque diuisionem operâ paulò maiori absoluendam offert, dicetur postquam de diuisione per digitum; quæ ad illam aditum planiorem paret, tractatum fuerit. Eadem tamen vtriusque sunt præcepta constructionis, quæ expono.

Constructio.

Maiori ad læuam numerum suppone minorem
Quærito : multiplica ; productum deme : Moueto.

Proponatur numerus A diuidendus per digitum B hæc itaque præcepta obserua.

Præceptum 1. *Maiori ad leuam* &c. Pertinet Præceptum hoc ad numerorum aptam inter illos collocationem. Qualis erit; si minor numerus siue diuisor B, ita maiori, siue diuidendo A subscribatur ad læuam (contrà quam in superioribus regulis hactenus factitatum est; in quibus ad dextram, siue ad primos gradus, numeri tractandi conueniunt) vt numerus superpositus, digito diuidente semper maior sit, siue vnicâ, siue duabus figuris constet. Vt in apposito Paradigmate: quia digitus B 7, qui diuidit; maior est quam prima diuidendi A figura 6, non subscribetur digitus 7 directè sub figura 6; sed sub insequente figura 8: ita vt totus numerus 68 superponi censeatur diuisori 7. cuius collocationis ratio statim Præcepto quarto detegetur: quod si loco figuræ 6 diuidendi A haberetur figura, aut æqualis, aut maior, quam digitus 7 diuidens; vt si haberetur aut 7, aut 8 vel 9: tunc digitus 7, primæ illi figuræ aut 7, aut 8, subscriptus directè fuisset. Atque ita habet prima numerorum A & B diuidendi & diuisi collocatio, lineolà etiam inter ipsos interiectâ paratóque quotientis futuri loco D.

A 6832

B 7 | D

Præceptum 2. *Quæritο.* Id est, quære quoties digitus B 7 contineatur in sibi superposito numero 68 (is enim superpositus censetur digito 7 diuidenti: quod & alias semper obseruatur) at quomodo huic quæstioni satisfacturus es? vnde tibi constabit quoties digitus 7 contineatur in numero 68 superposito? non alius Logistæ Tyroni, qui necdum vsu cognitionem hanc assecutus est; facilior modus tradi potest: quam quem tabella Pythagorica superiori Propositione 34. constructa suppeditat: qui est huiusmodi. In alterutro tabellæ illius ordine, siue transuersο A B, siue descendente A C, quære diuisorem 7. tum ab eo in ipso eius ordine perge donec, vel numerus 68; vel alius proximè minor tibi occurrat hic quidem occursurus tibi non est numerus 68; quare proximè minori qui est 63, vteris) deinde ab hoc obseruato numero 63 progredere per alterum ordinem priori coniugatum, qui scilicet conuenit cum priore inchoato à numero 7, in quadratulo 63: donec ad primum ordinem, vel A B; vel A C deueneris: nam in eo figura posita (vt hic 9 ostendet quoties digitus 7 contineatur in numero 63; atque adeo in numero 68 proximè maiore, quàm 63 in tabella reperto. Ratio clara est ex tabellæ constructione, eiusque allatâ demonstratione: qua ostensum est numerum quemlibet in quadrato communi duorum ordinum constitutum, toties continere alteram figurarum ordinem inchoantium: quot in alterâ figura alterum ordinem inchoante sunt vnitates. Inuenta ergo figura illa 9 statuatur ad locum D quotienti excipiendo destinatum,

Præceptum

5
A 6832
B 7 | D 9

Præceptum 3. *Multiplica.* Multiplica scilicet hanc figuram 9 ad quotientem D positam per digitum 7 diuidentem: ex qua multiplicatione producitur ille ipse numerus 63 in tabella assumptus, vt patet: illum enim duæ figuræ 7 & 9 in se mutuò ductæ producunt.

Præceptum 4. *Productum deme.* Deme productum illum 63 per proximam multiplicationem, à numero 68, qui diuisori 7 superponitur: eáque factâ subtractione reliquam figuram 5 (hæc enim reliqua fit subducto numero 63 à 68) superpone suo loco, id est, seruatis classibus super figuram 8, perinde ac si simplicem subtractionem numeri 63 à 68 institueres. Porrò tam numerus diuisus 68, quàm digitus 7 diuidens expungi debent transuersâ lineolâ, tanquam expediti numeri & imposterum inutiles vt refert schema.

Hinc iam constat illud, cuius memini superiùs; cur scilicet, cum digitus diuidens maior est figurâ primâ diuidentis numeri, vt hic, subscribi non debeat digitus huiusmodi directè sub minore illa primâ figurâ. Quæreres enim quoties 7 contineatur in numero superposito 6: ac cum ne semel quidem contineri comperires: statuenda tibi foret figura O ad quotientem D. At figura illa O, nulla præcedente figurâ significatiua, inutilis, nulliusque valoris foret. Quare in eo casu præstat digitum diuisorem secundæ diuisi numeri figuræ subiicere ad diuisionem iucundam Vnde etiam patet: si quando in diuisionis decursu contingat diuisorem numero superposito maiorem esse; tunc ad quotientem rectè statui figuram O: neque enim inutilis eo loci futura est.

Præceptum 5. *Moueto.* Hac absoluta tota operatione iuxta quatuor tradita Præcepta, Promouendus est diuisor 7 versus dextram vnico gradu, & diuidendi figuræ sequenti directè subscribendus: vt scilicet noua operatio instituatur iisdem Præceptis absoluenda. Vt in allato exemplo, digitus 7 diuisor post eius expunctionem factam in præcedenti loco, reponendus est sub figura 3 diuidendi numeri A proximè sequente.

5
A 6832
B 77 | D 97

Atque ita parati erunt rursus numeri ad inuestigandam figuram secundam quotientis. Cum ergo figuræ 7 ita promotæ superponatur numerus 53: neque enim sola figura 3, cui directè subiicitur diuisor 7, censenda est tunc superponi figuræ 7; sed, vt supra monui, quisquis numerus figuræ 3 præfigitur, vt hîc, numerus, siue figura 5. Quærendum est, quoties diuisor 7 contineatur in numero 53 superposito iuxta Præceptum 2. cui Quæstioni satisfiet ope tabellæ Pythagoricæ, vt in præcedenti operatione eidem satisfactum est. Hic autem reperietur contineri septies. Apponatur ergo figura 7 ad quotientis D figuram

guram 9 : vt ſchema refert. *Multiplica* deinde iuxta præceptum 3, hanc figuram 7 quotientis in diuiſorem 7. & productum 49 deme à ſuperpoſito 53 ; reliqua fiet figura 4 ſupra figuram 3 collocanda ; ac tandem totus numerus 53 expungetur vnà cum diuiſore 7, vt hîc repetitum ſchema exhibet. Denique *moueto* id eſt, promoue vno adhuc gradu verſus dextram diuiſorem 7. Tum *querito* ope tabellæ, quoties Diuiſor 7 contineatur in ſuprapoſito numero 42 : inuenietur ſexies contineri. Poſitâ ergo figurâ 6 ad Quotientem ; *multiplica* ipſam per Diuiſorem 7 : & productum 42 ſubtrahe à ſuperpoſito numero 42. nihil ergo, cum hi numeri ſint æquales, reliquum fiet.

	54	
A	6832	
		D 976
B	777	

Quare deletis tam numero ſuperiore 42, quàm diuiſore 7 abſoluta eſt diuiſio : nulla enim ſupereſt figura numeri diuidendi A, ad quam diuiſor B 7 promoueatur, cum ad vltimam 2 peruenerit. Ita vt ex ea diuiſione habeatur quotiens D 9 7 6. Qui iuxta definitionem diuiſionis indicat ſuis vnitatibus : quoties Diuiſor B 7 contineatur in diuidendo A 6832. Quod reſtat demonſtrandum.

Demonſtratio.

Vt ergo demonſtretur quotientem D hac methodo inuentum toties continere vnitatem ; quoties numerus A diuidendus diuiſorem B continet : reſumatur ſchema præcepti ſecundi. In quo quæſitum eſt quoties Diuiſor 7 contineretur in numero 68 ſuperpoſito : repertúmque eſt, nouies contineri : ac proinde figura 9 ad quotientem D poſita eſt.

A	6 8 3 2	
		D 9
B	7	

Si igitur numerus ſolus 68 abraſo ſequenti numero 32, diuidendus foret per digitum B 7, nunquid figura 9 ad quotientem ſtatuta rectè foret ? rectéque diuiſus numerus 68 per numerum 7 ? rectè omninò. Nam quotientis D figura 9 indicat ſuarum vnitatum multitudine ; quoties Diuiſor 7 in diuidendo 68 contineatur : vel, quotiens D 9 tot continet vnitates, quot numeros numero 7 æquales continet diuidendus numerus 68, ſiue, quod idem eſt, quoties numerus 68 continet Diuiſorem 7 : ita vt ſi numerus 7 toties ſumatur ; quot ſunt in figurâ 9 vnitates, id eſt, numerus 7 multiplicetur per 9, vt reuerà iuxta præceptum 3. multiplicatur ; produci debeat, ſin minùs 68, certè numerus, qui proximè minor quàm 68 à numero 7 nouies repetito conſtituitur : cuiuſmodi eſt 63, deficiens quinque vnitatibus à 68 : quæ quinque

A	6 8 3 2	
		D 9
B	7	

quæ vnitates reseruantur ad secundam operationem; dum figuræ 8 superponuntur: vt habet præceptum 4.

Iam ergo si tam numerus 63 continens nouies adæquatè diuisorem 7, quàm Quotiens 9 per numerum 100 multiplicentur, vt fiant numeri 6300, & 900: numerus 6300 toties rursùs continebit 7; quot sunt in numero 900 vnitates. Aperta est ratio. Nam Quoties per hanc multiplicationem repetitur numerus 63: toties etiam repetitur Quotiens 9: siue vnitates; quæ indicant quoties diuisor 7 in diuidendo 63 contineatur. Ac proinde cum diuisor 7 in numero 63 centies repetito hoc est, in numero 6300 centies reperiatur pluries; quàm in numero simplici 63: reperiatur autem nouies in numero simplici; si nouenarius ille (qui est figura 9 Quotientis) centies repetatur: productus 900, tot vnitates continebit, quot numerus 6300 continet numeros diuisori 7 æquales. Ergo per definitionem diuisionis, diuiso numero 6300, Quotiens habet esse 900.

Quibus ita declaratis. Cum pars illa 63 numeri A 6832 (figura enim illa 5, quâ 68 superat 63 resumetur) ad centenariorum gradum pertineat

A 6 8 3 2		
B 7	D 9	

propter duas insequentes figuras 3, 2, eiusdem numeri A duos gradus continentes; atque adeò censeri debeat 6300 Quotiens verò 9 ad eundem centenariorum gradum etiam spectet propter duas etiam figuras, quæ ipsi apponendæ sunt in decursu diuisionis; quæ nascentur ex duplici promotione Diuisoris 7; qui sub figuris 3 & 2 diuidendi A, deinceps collocandus erit: ita vt Quotientis figura 9 debeat etiam 900 censeri: manifestum fit tam numerum 63 quàm Quotientem 9 per 100 multiplicari: ac proinde (vt iam ostensum est) numerum 6300 toties continere diuisorem 7; quoties numerus 900 Quotientis continet vnitatem.

Rursus. Promoto Diuisore 7 sub diuidendi figura 3; vt in Præcepto 5 habetur; ita vt diuisori 7 superponatur numerus 53 resumpta scilicet

5		
A 6̸ 8̸ 3 2		
B 7̸ 7	D 9 7	

illa, quæ in præcedenti operatione reliqua fuerat, figurâ 5, siue 500: repertus est Diuisor 7 in numero 53 septies contineri positaque propterea est ad Quotientem figura 7. Ostendetur igitur eo, quo priùs, modo tam numerus 49, quàm figura 7 Quotientis, multiplicari per 10; ita vt 49 censeri debeat esse valoris 490; & 7, valoris 70 propter figuram vnam vtrobique sequentem. Vnde eo etiam, quo priùs, modo colligetur toties diuidendum numerum 490 continere Diuisorem 7; quoties Quotientis numerus 70 continet vnitatem. Si igitur numerus 6300 toties continet Diuisorem 7; Quoties numerus 900 Quo-

P

tientis continet vnitatem, vt Paragrapho precedenti ostensum est: numerus item 490 eundem diuisorem 7 continet toties; quoties vnitatem continet quotientis numerus 70: Ambo simul numeri 6300, 490, hoc est, numerus 6790 ex eorum additione collectus, toties continebit Diuisorem 7; quoties ambo simul numeri 900, 70; siue numerus ex eorum additione collectus 970 continet vnitatem.

Denique quia promoto diuisore 7 ad vltimam diuisi numeri A figuram 2, vt in eodem præcepto 5 traditur, inuentus est numerus 42 figuræ 7 superpositus (reliqua enim erat figura 4 in antecedenti operatione, figuræ 3 superposita) toties continere diuisorem 7: quoties figura 6 ad quotientem statuta continet vnitatem: Si numerus 42 addatur ad numeros 6300, 490 (siue ad numerum 6790 ex illis duobus iam collectum) fiet totus numerus 6832 diuidendus qui toties continebit Diuisorem 7: Quoties numeri 900, 70, 6, quotientis (qui simul additi efficiunt vnicum Quotientis numerum 972) continent vnitatem. Ergo rectè inuentus est Quotiens D 972 iuxta diuisionis definitionem Prop. 40. allatam. Quod faciendum erat.

	64	
A	6832	
B	777	D 976

Scholium.

Industria quadam ad numeri diuisionem per figuram vnicam, vtiles.

In proximè allatâ numerum diuidendi methodo per vnicam figuram, siue per digitum; præcepta singula fusiùs prosecutus sum; quàm præstetur inter operandum, quando nullâ eorum mentione factâ paucis expeditur tota diuisio Eorum tamen expositio necessaria erat, tum ad demonstrationem; tum ad planiorem totius artis diuidendi declarationem. Eadem enim obseruanda sunt præcepta, etiam in numerorum diuisione per numeros pluribus figuris constantes absoluenda, vt inferiùs manifestum fiet: cum de eâ agendum erit. Ne quid ergo quod ad praxim conducat diuisionis huius, quæ per vnicam figuram instituitur; hic desideretur: quædam compendia obseruanda appono. Sit ergo.

Industria prima.

Proponatur exempli causâ, numerus A, primò in duas partes, hoc est,

est, per digitum 2, diuidendus. Id breuiter præstabitur singulis figuris numeri A, bifariam diuisis; siquidem pares fuerint; aut, si impares extiterint, diuisâ figurâ proximè minore: hæc enim necessario par erit numerus; cum impar à pari numero differat vnitate: sed tunc dempta vnitas illa mente seruari debet; vt præfigatur tanquam decas figuræ sequenti; & conflatus numerus bisecetur. Quod totum hac formula perficitur. Initio facto à prima figura 6 dati numeri, dicito vel cogitato, semissis figuræ 6, est 3: subscribe figuram 3 directè sub 6 ad B. perge ad secundam figuram 8, dicens, semissis figuræ 8 est 4, subscribe 4. Tum quia tertia figura 3 est impar sume figuram 2 proximè minorem eiusque semissem 1, ipsi subscribe: sed interim demptam illam vnitatem ex figura 3 præfigi concipe figuræ quartæ 2 sequenti, vt fiat 12 (reuera enim vnitates singulæ, figuræ 3 penultimæ sunt gradûs secundi, siue decadicæ) tunc autem semissem numeri 12, hoc est, figuram 6 subscribes ipsi figuræ 2. Atque ita habebis quotientem B natum ex diuisione numeri A 6832 per figuram 2.

A 6832
B 3416

Vis eundem numerum A per digitum 3 partiri? ita per conceptum operare. Pars tertia primæ figuræ 6, est figura 2. Hanc subscribe. Tum rursùs Pars tertia figuræ 8 secundæ, est 2 (nam numerus 8 diuidi nequit præcisè in tres partes æquales: sumendus ergo est numerus proximè minor in tres partes æquales diuisibilis; qualis est hîc figura 6) subscribe 2. omissus autem ille binarius numeri 8, præfigi censendùs est figuræ sequenti 3: vt fiat numerus 23. Dic ergo tunc, pars tertia numeri 23, est 7 (nam numerus proximè minor numero 23 in tres partes æquales diuisibilis est 21: cuius tertia pars est 7) subscribe itaque 7 ipsi figuræ 3: & figuram 2 ex numero 23 omissam præfigi concipe figuræ sequenti 2, vt fiat numerus 22 cuius tertia pars est figura 7, vtique subscribenda: sed restat vnitas. Nam 22 vnitate superat 21 proximè minorem per 3 diuisibilem: quæ cum absoluta sit omnium figurarum diuisio, supererit. Quid porrò ea vnitate fieri debeat suo loco declarabitur: interim seponenda est iuxta quotientem eique diuisor 3 interiectâ lineolâ subscribendus, vt refert schema.

A 6832
B 2277 $\frac{1}{3}$

Si iuxta hanc methodum diuisionem numeri A per digitum 7 velles instituere: quã diuisionẽ fusiùs iuxta Præcepta de industria superius prosecutus sum: eam sic absolues. Pars septima primæ figuræ 6 est O (quæ inutilis est ad initium quotientis) restat 6. Pars septima numeri 68 (hic enim numerus sumendus est, vt patet ex superioribus) est 9: restat 5; nam septies nouem sunt tantum 63. Pars ergo septima numeri sequentis 53, est 7; re-

A 6832
B — 976

ftat 4. Itáque demum pars feptima numeri 42, eft 6; nihilque fupereft. fubfcriptis ergo fingulis partibus illis feptimis habetur quotiens totus B, idem qui prius: ita vt numerus B fit pars feptima totius diuifi numeri A; eaque ratione diuidatur in partes feptem æquales: quarum vna eft numerus B: cuiuflibet enim numeri diuifi quotiens, eft illius pars à Diuifore denominata.

Obferua quando Diuifor eft digitus paulò maior, vt fi excedat 3 vel 4 tutiùs fore, fi diuifio inftituatur iuxta Præcepta tradita: oriuntur enim non rarò figuræ reliquæ maiores, maiores numeros efficientes: quorum pars petita à Diuifore denominata, difficilè cognofcatur.

Induftria fecunda.

Hîc iure quæras. Num ars quædam poffit dari? quâ dato numero paulò maiore cognofci queat, quoties digitus quifpiam in eo contineatur, vel quod in idem recidit, quota fit illius pars, non adhibita tabella Pythagorica. Sicut enim fuperius ars innotuit; quâ facilè obtineatur numerus qui producitur per multiplicationem digitorum duorum licet paulò maiorum: ita è conuerfo ars dari poffe videtur; quâ dato numero paulò maiore per digitum paulò etiam maiorem diuidendo, figura quotientis certò definiatur: inuertenda fcilicet tantum videtur ad multiplicationem tradita methodus. Id an poffit, & quomodo poffit præftari; ex fequentibus innotefcet.

A 6832
———
B—7

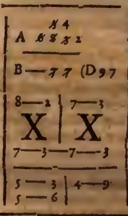
9 — 1
X
7 — 3
———
6 — 8
6 — 3

In allato fuperiori Paradigmate quæritur quoties diuifor 7 contineatur in numero 68 fibi fuperpofito; fiue quæritur vt paulò ante explicatum eft, quota pars fit numeri 68, diuifor 7; quod figura quotientis, quæ inquiritur, apertura eft. Statuatur diuifor 7, eiufque à denario difcrimen 3 è regione: cui fubiiciatur, interpofitâ lineâ, numerus 68, feiunctis eius figuris, vt hîc cernitur. Tum fic ratiocinare figura 6 prior numeri 68; qui cenfetur genitus per multiplicationem digiti 7 in alium quempiam digitum, qui nunc inquiritur (hic enim eft neceffario quotiens ignotus gignendus per diuifionem numeri 68 per digitum 7; vt fcilicet multiplicatus per 7, producatur 68) figura, inquam, 6 numeri 68 habetur iuxta ea, quæ fuperiùs Prop. 35. demonftrata funt; fi à digito 7 dematur differentia, quâ digitus ille ignotus deficit à numero 10. Cum igitur habeatur figura 6, fi à numero 7 dematur vnitas: differentia illa digiti ignoti à numero 10 erit 1. Ergo digitus ille eft 9. Qui etiam obtinetur, vt ex citato loco patet: fi figura 3, quâ digitus 7 à numero 10 deficit, dematur à digito ignoto; ita vt figura

3

3 addita ad figuram 6 digitum illum exhibeat. Ita enim fiet, vt ex eo detractâ figurâ 3, reliqua fiat figura 6: quare ſi ad hanc addatur 3; fiet rursùs digitus ille ignotus 9; atque ita notus euadet. Debet autem iam notus ille digitus 9 tanquam verus quotiens multiplicare digitum 7 diuiſorem vt productus dematur à numero diuidendo 68 iuxta diuiſionis præceptum 4. Quæ multiplicatio abſoluitur: ſi differentiæ 1, & 3, in ſe ducantur, vt fiat producti figura poſterior 3, prior autem naſcetur 6 demptâ ex digito oppoſito per diametrum alterutrâ differentiâ; vel alio aliquo ex traditis modis loco citato, inuentus demùm numerus 63 ſubducetur ex numero 68, & reliquus numerus 5 præfigetur ſequenti allati Paradigmatis figuræ 3: vt fiat 53; qui per digitum 7 rursùs diuidatur: vt ſecunda quotientis figura 7 obtineatur. Qua in diuiſione caſus occurrit à præcedenti nonnihil diuerſus, proindéque exponendus, vt numeros expeditè quacunque verſandi modus à Tyrone logiſta diſcatur.

Quæritur itaque quoties digitus 7 diuiſor contineatur in numero 53 ſuperpoſito. Diſponantur numeri, vt in caſu præcedenti factum eſt, & in hoc ſchemate obſeruatur. Statuatur ſcilicet digitus 7 eiúſque à 10 defectus 3 ſupra lineolam rectam; ſub eadem verò numerus diuidendus 53 ſeiunctis eius figuris. Tum ſic Argumentator. figura 5, prior numeri diuidendi oritur demptâ differentia à 10 digiti, qui quæritur, ex digito 7 ergo illa differentia eſt 2. Ergo digitus quæſitus eſt 8: quod etiam patet ex eo, quod ſi à digito 8 dematur oppoſita differentia 3, idem numerus 5 relinquatur. Iam duæ differentiæ 2 & 3 multiplicandæ ſunt per ſe mutuò: Ex qua multiplicatione gignitur figura 6. Ergo numerus 56 oritur ex multiplicatione digiti 7 per digitum 8. qui cum maior ſit numero diuidendo 53; nec poſſit ex eo ſubduci: haud dubiè maior aſſumpta eſt figura 8, quàm par ſit. Quare minuenda eſt, ex eâ demendo vnitatem, vt fiat 7. Iuxta quam figuram 7 abſolutâ operatione producitur 49 minor quàm 53; factáque ſubtractione illius ab iſto, ſupererit figura 4, figuræ vltimæ 2 numeri diuidendi A præfigenda; ita vt rursùs paratus ſit numerus 42 diuidendus per digitum 7. In qua diuiſione rursùs eundem Caſum experieris; qui contigit proximè; maiorem ſcilicet figuram, quàm par ſit, primò quidem eadem ſeruatâ methodo generari; veram tamen ex maiore illa facilè colligi.



Obſeruandum porrò eſt hîc, illud idem quod ſupra Prop. 35. obſeruatum eſt circa multiplicationem digiti per digitum: tales ſcilicet eſſe de-

bere digitos, vt eorum differentia à denario minor sit ipsis digitis, futura alioquin esset difficilior ipsarum differentiarum quam digitorum multiplicatio. Sic etiam hîc & digitus, qui diuidit, & numerus, qui diuiditur, debent esse paulò maiores: in minoribus enim numeris facilè perspicitur; quænam ad quotientem statuenda sit figura. Quod si animi gratiâ in minoribus numeris eandem methodum adhibere lubeat: in illis etiam veram comperies: sed maior illa figura per ratiocinationem collecta minui debebit, non vnâ tantùm, sed non rarò pluribus vnitatibus.

PROP. XXXXIII. *Probl.*

Diuisionem numeri per digitum, siue vnicam figuram iam absolutam examini subiicere; ope præsertim nouenariæ subtractionis.

Expositio & Constructio.

Quamuis Diuisio numeri alicuius etiam copiosioris per quemuis digitum, vix sit erroris alicuius periculo obnoxia, vt examine aliquo non egere videatur: tamen quia idem, iisdémque præceptis tradi potest, ad diuisionem, siue per vnicam, siue per plures figuras instituatur probandam: hîc commodiùs tradi visum est ob numeros, qui versantur, simpliciores; simpliciorem, eóque clariorem tractationem exhibentes. Multiplex autem est Examen huiusmodi.

Primum Examen diuisionis per multiplicationem.

Diuisisti numerum A per B: ortúsque est Quotiens D ex ea diuisione.

A 6832
B 7 (D 976

Si igitur ducatur Diuisor B in Quotientem D: debet per hanc multiplicationem restitui præcisè numerus diuisus A, si erratum non est ratio clara est. Nam planus cum sit numerus A, vt suprà est annotatum: qui dum diuiditur per B, ad ipsum diuisorem B applicatur, & latitudinem sibi vendicat Quotientem D. ita vt plani A, latera duo illum continentia sint diuisor B, & Quotiens D: si in se ducantur mutuò B & D; producere necessariò debent planum ipsum A. Quod idem ita etiam manifestum euadet. Numerus A diuisus toties continet diuisorem B: quoties numerus D continet vnitatem. Quare si D ducatur in B, id est iuxta Prop. 28. Si toties

sibi

sibi ipsi addatur B, siue toties repetatur: quot sunt in D vnitates: adæquabitur præcisè numerus A: si reuerà & absque errore numerus A diuisus est per numerum B.

Quod si contingat, vt contingere non raro solet; aliquid post diuisionem superesse; vt, diuiso hoc numero A per B, repertóque quotiente D, superest figura C 5. Tunc numeris D & B in se mutuò ductis; addi producto debet reliquus numerus C: vt totus restituatur numerus A. Si erratum non est. Atque ita patet, quomodo diuisio per multiplicationem probetur: sicut multiplicatio; vt supra monui, per diuisionem probari potest. Si enim duo numeri B & D in se ducti genuerint numerum A genitus autem hic numerus diuidatur per B; alter numerus D debet necessario esse diuisionis quotiens: sicut quotiens esse debet numerus B; si per D numerus A diuidatur.

Secundum examen diuisionis per diuisionem.

Habes hîc quàm nouum tam iucundum diuisionis examen non aliunde quam ab ipsa diuisione petitum: vt non minus diuisio diuisione; quàm multiplicatione multiplicatio probetur, velut Prop. 37. ostensum est.

A 6837	C 5
B 7	D 976

Itaque, diuisus est numerus A per B; genitúsque est quotiens D, facto numero C reliquo. Hunc ergo reliquum numerum C deme in primis à numero A: tum reliquum 6832 diuide per quotientem D 976 quotiens enim (si absque errore vtraque diuisio instituta est) debet esse diuisor B 7. Aperta est huius examinis ratio ex diagrammate præcedentis Propositionis. Nam numerus A post subtractionem numeri C reliqui, præcisé diuiditur per B; & per hanc diuisionem numeri A plani, producitur alterum eius latus D. Ergo si idem planus numerus A diuidatur per latus D; non potest non produci latus alterum B.

Obserua hoc examen ita etiam, & quidem breuiùs, institui posse. Omissa illa, cuius memini, subtractione reliqui numeri, à numero diuidendo. Diuisionem per inuentum quotientem ea conditione institue, vt prioris diuisoris figuræ omnes ad quotientem statuantur; qua methodo expeditior futura est diuisio, cum figuram quamlibet ad quotientem reponendam iam noscas. Peracta enim diuisione, si quis in priori diuisione factus erat reliquus numerus: eundem in hac posteriore reliquum fieri necesse est. Vnde coniicias recténe an perperam tum primò tum secundò diuiseris. Nec alia est huius methodi, quam prioris ratio, vt patet. Diuisor enim & quotiens reciproca sunt numeri diuidendi tanquam plani latera: à quo excluditur quisquis fuerit reliquus numerus in priori diuisione

ne. Ergo etiam in posteriore idem superesse debet si prior diuisor immutatus, quotiens fiat.

Tertium examen diuisionis per reiectionem nouenarij.

Duæ præcedentes diuisionis probationes præter quàm quod prolixiores videntur; illud patiuntur incommodi: quod si quando occurrat earum ope aliquod diuisionis vitium argui: ambiguus tamen logista sit; an ipsa in diuisione, quæ excutitur, lateat; an reuera in ipsa diuisionis probatione; quæ minori plerumque operatione, quam ipsa diuisio non absoluitur. Quare, vt in cæteris, ita hîc vsurpanda videtur probatio illa: quæ nouenarij reiectione perfici solet. Cuius constructionem accipe his versiculis præscriptam.

Constructio.

Tolle nouem è toto: & reliquam sepone figuram.
A sectore; Quotóque nouem tolle, inde figuras
Multiplicato datas. A facto tolle nouena
Et simul à reliquo. Si restat vtrimque figura
Æqualis: Quotiens est absque errore creatus.

Præceptum 1. *Tolle nouem è toto.* Reiice à toto, hoc est, à numero diuidendo, verbi gratiâ à numero A, nouem quoties fieri potest: & reliqua figura 6 seponatur ad caput decussis, siue characteris X, vt factum cernis.

A 6 8 3 7——6
B 7.D976—7 X 4
C 5   6

Præceptum 2. *A sectore; Quotóque nouem tolle.* Reiice à diuisore B, nouem (hîc vbi diuisor supponitur esse digitus, siue vnica figura ab ea tolli non potest nouenarius: sed ipsa censetur reliqua post reiectionem nouenarij) reliqua igitur est figura 7. ea seponatur ad læuam decussis. Reiice item à quoto, siue quotiente D, nouem quoad poterit: & reliquam figuram 4. ad eiusdem decussatæ crucis dextram sepone. Tum.

Præceptum 3. *Inde figuras multiplicato datas.* Duás illas figuras 7 & 4 sepositas in se mutuò ducito, vt fiat 28.

Præceptum 4. *A facto tolle &c.* ab hoc numero 28, & simul à numero C 5, qui peractâ diuisione reliquus factus est, reiice nouem. Si enim hac facta reiectione à duobus illis numeris 28 & 5, tanquam vnicus forent numerus; restat figura 6, æqualis scilicet figuræ; quæ relicta fuerat detracto

tracto nouenario à diuiso numero A. *Quotiens D est absque errore creatus.* Signum est certissimum quotientem D verum esse numerum; qui ex diuisione numeri A per B produci debet.

Demonstratio.

Ratio huius probationis à reiectione nouenarij petita, clara est ex dictis de multiplicationis examine. Si enim duo numeri B 7 diuisor, & D 976 quotiens, in se ducantur, & producto 6832 addatur reliquus post diuisionem numerus C 5: totus debet gigni numerus diuisus A; vt paulò ante in examine diuisionis primò declaratum est. Eadem ergo figura tunc reliqua foret reiecto nouenario ex duobus illis æqualibus numeris. Sed seruatâ methodo reiectionis tradita, demitur nouenarius ex numero producto per multiplicationem diuisoris B, & quotientis D, vna cum reliquo numero C. Ergo eadem debet figura relinqui: quæ ex toto A relinquitur. Probatur minor ex simili allata probatione examinis multiplicationis. quam Geometrico diagrammate illustraui: locum consule pariáque obseruabis omnia: si modo reliquus post diuisionem numerus (quando aliquem relinqui continget, vt hic, numerum C 5) interim sileatur. Nam duo numeri B & D in se ducuntur, & ex ea multiplicatione numerus quidam gignitur: quem si an absque errore genitus sit, examinare volueris: Demes nouenarium ex producto, sepositâ reliquâ figurâ; tum demes etiam nouenarium, & ex B, & ex D sigillatim singulis figuris 7 & 4 sepositis: quæ statim in se ducuntur; & ex producto 28 reiicitur nouenarius: quâ factâ reiectione figura eadem relinqui debet, nempe 1: quæ reliqua fuerat reiecto nouenario ex numero 6832 per multiplicationem numerorũ B & D genito. Ita vt in casu, in quo totus numerus diuisus A per diuidentẽ B exhauritur, & præcisè diuiditur: Examẽ diuisionis, eiusque demonstratio, eadem planè sint. Atsi quidpiam relinquatur, vt in exemplo nostro relinquitur figura C 5: attendendum est reliquum illum numerum iuxta methodũ traditã addi ad figuram reliquã æqualem iam repertã, nempe ad 1. Nam id apertè, & explicitè fieri iubetur Præcepto 4. quoad numeros B & D. Ad totum vero numerum A, addi non iubetur, sed additus per se, & ex quantitate numeri A reperitur. Numerus enim A excedit numerum, qui producitur ex multiplicatione numerorum B, & D; illo ipso numero, qui relinquitur diuiso A per B. Nam si genitus quotiens D multiplicet diuisorem B: restituet numerum diuisum præcisè, & adæquatè per B: qui minor erit; quàm propositus totus numerus A 6837, numero illo C 5 facta diuisione per B, relicto. Quare si ad figuras iam æquales vtrimque statutas, addatur vtrimque idem numerus C: fient figuræ vtrimque æquales; si diuisio absque errore instituta est. Quare diuisionem

numeri cuiuſuis per digitum examini, & quidem triplici ſubiecimus. Quod præſtandum erat.

PROP. XLIV. *Probl.*

Numerum quemlibet, per digitum aliâ ratione diuidere.

Conſtructio.

Diuerſa potiùs eſt hæc diuiſionis formula; quam modus à priori tradito diuerſus. Elegans omninò, & eo nomine præſtantiſſima: quod nulli delentur numeri; vt eos, ſi quod dubium erroris alicuius admiſſi ſuboriatur, expendere denuò facilè poſſis: & abſoluta demùm diuiſio examine nouo, certiſſimo iuxta ac expeditiſſimo probari queat. Eam porrò hic, vbi diuiſor digitus, ſiue figura vnica ſupponitur, expono (quamuis diuiſioni per maiores numeros inſtituendæ apprimè inſeruiat) vt faciliùs hîc percepta, planiorem gradum ad magis compoſitam partitionem comparet. Sic autem habet.

Proponatur idem, qui ſupra, numerus A diuidendus per eundem etiam diuiſorem B. Diſponantur ambo, vt hîc habetur.

A 6 8 3 7	B 7
C 6 3	D 9 7 6
——	——
E — 5 3	C 6 3 .
F — 4 9	F — 4 9
——	
G — 4 7	L — 4 2
L — 4 2	P — 5
—	——
P — 5	A 6 8 3 7

Tum concipiatur diuiſor B locum occupare debitum ſub diuidēdo A ita ſcilicet vt ſubſcribi cenſeatur ſub eius figura 8 propter rationem ſuperiùs allatam; eáque proinde figura 8 punctulo inuratur. Deinde eadem Præcepta, quæ ſuperiùs tradita ſunt, obſeruentur. Ac primò. *Quærito* quoties diuiſor B 7 contineatur in numero 68 Comperies traditis ſupra rationibus, contineri nouies. Ergo ad quotientem D figuram 9 directè ſubſcribe diuiſori B. Tum *multiplica* hanc figuram 9 in diuiſorem 7: & productum C 63 ſubſcribe ſeruatis gradibus, tam ſub quotiente D; quàm ſub numero 68 numeri diuidendi A. Deinde, *Productum deme*. Hunc ſcilicet productum C ad ſubtractionem proximè comparatum deme à numero 68 ſuperpoſito & reliquum 5 ſubſcribe ad E de more, ſuo nimirum in gradu.

Denique *Moueto*. Promotio hæc diuiſoris B ad ſecundam operationem ineundam neceſſaria, fit appoſitâ ſequenti figurâ 3 diuidendi numeri A ad relictam figuram illam E 5 ex præcedenti operatione: vt iam habeatur numerus E 53 diuidendus ſecundò per B 7, qui ei, vt prius, ſubſcribi concipitur

cipitur. *Quæsito* ergo quoties B 7 in E 53 contineatur; reperies contineri septies; ergo ad quotientem D appones figuram 7. Hanc *multiplica* per diuisorem, B & productum F 49 subscribe, tum Quotienti seruatâ classe, vt posterior figura 9 directè respondeat figuræ 7 multiplicatæ; tum numero E 53. Denique *productum hunc F deme* à numero E, relicto G 4 subscripto.

Moueto. Appone numeri A sequentem, & vltimam figuram 7, ad proximè relictam G 4: vt scilicet fiat numerus 47 diuidendus per B 7. Qui sexies in illo continetur: propterea ad quotientem D ponitur 6. hæc autem figura 6 multiplicans diuisorem 7 generat L 42, qui subscribitur seruata classe multiplicantis figuræ 6, Quotienti ipsi 6; & numero G 47, à quo subduci debet: factâ autem subtractione hac, reliqua fit figura P 5. atque ita absoluta est Proposita diuisio numeri A per diuisorem B; quotiénsque repertus D, relicto numero P nullâ deletâ figurâ, numerísque omnibus; qui per singulas multiplicationes, subtractionésque generantur, seruatis integris vt relegi, si res ferat, commodè possint.

Demonstratio huius formulæ.

Huius formulæ ratio manifesta est: si tota eius series perpendatur: tota enim ad priorem refertur. Nam in priore illa methodo, quæ mente fiebat multiplicatio positæ ad quotientem figuræ in diuisorem, hîc exprimitur tota, expressis ex ea nascentibus numeris C, F, L. Quæ item fiebat mentalis subtractio, à numeris superioribus; hîc etiam obseruatur explicitis numeris, reliquo in modum communis subtractionis subscripto: qui idem priùs superponebatur, percursis figuris tam diuidendi quàm diuisoris expunctis. Denique promotio diuisoris hîc exercetur eadem: cum ad reliquum numerum post subtractionem, apponitur figura proximè sequens diuidendi, & præparatur numerus ad sequentem operationem. Nihil denique eorum prætermittitur, quæ in methodo diuisionis vulgari obseruari solent: nihilque, nisi solus numerorum situs, & expressio, diuersum reperitur. Quare nouâ hac ratione numerum quemlibet per digitum rectè diuisimus. Quod præstandum erat.

Examen nouum diuisionis.

Vt proximè tradita diuisionis ratio, noua dici potest propter nouam numerorum ad eam concurrentium collocationem ita Examen hoc nouum potest appellari, & à superioribus diuersum propter diuersam numerorum, qui ad illud concurrunt, habitudinem: idem alioqui futurum, si rectè perpendatur, cum eo; quod primo loco per multiplicationem ab-

solui posse docui, vt ex dicendis mox patebit. Ita ergo habet. Reliquus peracta diuisione numerus P 5 apponatur seruato eius gradu primo, ad numeros C, F, L genitos per multiplicationem singularum figurarum Quotientis D, in diuisorem B. Tum, addantur hi omnes numeri C, F, L P. Si igitur ex ea additione restituatur diuisus numerus A: de diuisionis veritate dubitare non licet. At si per hanc additionem numerus colligatur à diuiso numero A, diuersus: nec tum licet de diuisionis falsitate dubitare. Ratio hîc eadem est cum superiùs allatâ: vt probaretur diuisionem rectè posse per multiplicationem mutuam numerorum, B 7, diuisoris, & Quotientis D 9 7 6 examinari. Ita vt hîc, illud vnum demonstrari debeat; nimirum, tradita methodo duos numeros, 7 diuisorem, & 976 Quotientem multiplicari. Quod ita manifestum fiet. Singulæ figuræ 9, 7, & 6 quotientis D ductæ sunt in diuisorem B 7. Singulique producti suas classes occupant: etsi, qui infimum locum occupat productus L ex vltima quotientis figura 6 in diuisorem B 7 ducta; supremum occupare deberet: si iuxta modum vulgarem iniretur multiplicatio: iuxta quam etiam numerus C primus, infimus foret. Cæterùm seruatis, vt hîc seruantur seruatâ præscriptâ methodo, classibus: Idem ex additione eorum numerorum colligi debet numerus. Quocumque enim ordine numeri, qui adduntur, constituantur; modò graduum, siue classium ratio habeatur; semper idem numerus ex additione colligitur, vt Prop. 17. declaraui. Debet ergo, si erratum nullibi est, numerus A diuidendus ex ea additione restitui. Quod si minimè restituatur; vitiúmque propterea aliquod in opus irrepserit: ecce quàm expeditè illud deprehendere, ac emendare queas. Præstò sunt omnes numeri C, F, L, ex multiplicatione diuisoris B per singulas figuras quotientis D geniti: illos sigillatim excute, vel repetitâ multiplicatione: vel etiam multiplicatione per reiectionem nouenarij examinata. Quod si multiplicationes vitio caruerint: illud necessariò latebit in subtractionibus: quarum numeri tàm maiores quàm minores, salui sunt, & integri: Illas ergo excute: vix te fugiet error commissus.

PROP. XLV. *Probl.*

Numerum quemcunque per alterum numerum figuris pluribus expressum, diuidere

Constructio

Tradita superior methodus numerum quemlibet diuidendi per numerum vnicâ figurâ expressum, difficultatem non mediocriter leuabit:

quæ in diuisione nunc exponendâ reperiri solet ob illam figuratum diuisoris multitudinem. Eadem enim sunt vtriúsque obseruanda Præcepta; idem totius operationis ordo sequendus: Eadem denique constructio instituenda: nihil vt hic supersit attendendum præter casum vnicum, qui negotium facessere queat: qui, non longè progrediemur, quin occurrat. Proponatur ergo numerus A 7568 diuidendus per diuisorem B 395. Memoriam hîc refrica Præceptorum superiorum, corúmque obseruationis.

Præceptum 1. *Maiori ad læuam numerum suppone minorem.* Numero ergo maiori A siue diuidendo subscribe minorem siue diuisorem B, & quidem ad læuam: sed ita vt ei respondens numerus superpositus maior sit: quod semper futurum est, si prima numeri A, figura maior sit; vt hîc contingit, quàm figura prima numeri B: ita vt tunc vtriusque numeri figuræ primæ sibi directè respondere debeant; reliquis quibusque deinceps sibi respondentibus iuxta gradus hîc accuratè obseruandos.

A 7568	
B 395	C

Quod si prima numeri A figura minor foret quàm figura prima numeri B: tunc prima figura numeri B sub secunda numeri A collocanda foret, vt scilicet numerus superpositus maior euaderet inferiore; aptúsque fieret, vt ab hoc diuidi in partes posset numeris ad ineundam diuisionem ita compositis, lineam rectam inter vtrumque ducito; cui curua adhæreat, vt futuro Quotienti C sedes parata reperiatur.

Præceptum 2. *Quærito.* Hac in quæstione, siue inquisitione, diuisionis difficultas tota versatur. Quæritur ergo in exemplo proposito, quoties figura 3 numeri B contineatur in numeri A, figurâ 7. bis quidem contineri animaduerto. Num ergo quotienti C figuram 2 assignabo? Haud quaquam. Assignarem, si ipsa sola figura 3 diuisor foret; quemadmodum superiùs in diuisione per digitum præstitum est. Sed quia hîc figuram 3 aliæ sequuntur figuræ totum diuisorem B constituentes; earum in hac inquisitione habenda est ratio: ita vt quærendum reuerà sit, non tantùm quoties figura 3 prima diuisoris B, contineatur in primâ diuidendi A figura 7: sed potiùs, quoties totus numerus B 395 contineatur in parte 756 numeri A, quæ diuisori B superponitur. Quia verò difficilè perspicimus (quæ est mentis nostræ tenuitas) quoties numerus B totus, in toto superposito contineri queat: ideo arte iuuandus fuit noster hic defectus; & quæsito ad vnicam figuram primam numeri B, cuius quantitas minor faciliùs percipitur; fuit alliganda: ita tamen vt solutio penes illam tota non foret: sed reliquæ insequentes aliquam etiam determinationem conferrent, hanc scilicet.

Talis debet ad quotientem figura conſtitui, vi primæ figuræ diuiſoris:

A 7568	
A 395	C

vt figura illa quotientis in diuiſorem, ſiue totum ſimul; ſiue in ſingulas eius partes, vt fieri debet iuxta præcepta tradenda, ducta numerum generet eiuſmodi: qui & maior non ſit numero, qui diuiſori ipſi ſuperponitur; ab eóque poſſit ſubduci; & minor tamen tantò non ſit, vt factâ numeri eiuſdem ex ſuperpoſito numero ſubtractione tantus ſuperſit reliquus, vt ipſum diuiſorem excedat. Ratio determinationis huius omninò neceſſariæ clara eſt. Si enim productus numerus ex figurâ quotientis in diuiſorem ductâ maior eſt numero, qui diuiſori ſuperponitur: deuiſor toties non continetur in numero illo ei ſuperpoſito; quot ſunt in figurâ quotientis aſſumptâ vnitates: productus ſiquidem ex ea multiplicatione diuiſoris per figuram quotientis toties continet diuiſorem, quot ſunt in multiplicante figura vnitates. Pluries ergo diuiſorem continet, quàm eundem contineat numerus ei ſuperpoſitus, qui diuiditur. Quod fieri non debet. Si vero numerus reliquus poſt factam ſubtractionem numeri geniti ex figura quotientis in diuiſorem ductâ, maior eſt diuiſore: haud dubium quin diuiſor pluries contineatur in numero ſuperpoſito, quàm figura quotientis ſuis vnitatibus indicet: quandoquidem à reliquo illo maiore, quàm ſit diuiſor, diuiſor ipſe ſubduci poteſt: qui defectus figuræ quotientis non minùs cautè vitandus eſt, quàm exceſſus ille ſuperior: ita vt figura quotientis vera, ea futura ſit; quæ in diuiſorem ducta numerum generet: qui & à ſuperpoſito ſubtrahi poſſit, & qui poſt ſubtractionem numerum relinquat minorem diuiſore. Iam hac determinatione animaduersâ diuiſionem proſequamur reſumptâ intermiſsâ quæſtione. *Quærito* quoties figura 3 diuiſoris B contineatur in ſuperiore figura 7., numeri A? Primâ fronte, vt narrabam, bis contineri videtur; ac proinde figura 2 ad quotientem C ſtatuenda foret: ſed propter allatam proximè determinationem explorandum eſt, an ea vt par eſt, ſatisfactura ſit: explorandum, inquam, eſt mente, ante quàm actu conſtituatur. Sic igitur tecum ratiocinare iuxta tradita præcepta diuiſionis per digitum, quæ hîc obſeruanda veniunt. Poſita figura 2 ad quotientem duci primò debet in figuram 3 diuiſoris, fitque ex ea multiplicatione numerus 6. hoc dempto à figura ſuperpoſita 7, ſupereſt 1: quæ vnitas figuræ 7 ſuperponeretur, & cum ſequenti figura 5 numerum 15 ſtatueret. Iam verò ſi idem quotiens 2 in ſecundam diuiſoris B figuram 9 ducatur, fiet 18. Qui cum ſuperet numerum 15 ſuperpoſitum, ſubtractio debita nequit abſolui. Iuſto igitur maior aſſumpta eſt figura 2 quotientis. At ſi minuatur vnitate, & ex figura 2, fiat figura 1; quaſi figura 3 ſemel tantùm in ſuperiore 7 contineretur: tunc obſeruato præcepto tertio.

Præceptum

Præceptum 3. *Multiplica* figuram quotientis emendatam hoc est 1, in figuram 3 diuiſoris: gignetur 3. Quo numero 3 iuxta.

Præceptum 4. *Productum deme.* Subducto à figura 7 ſuperpoſita: ſupereſt figura 4. ſuperponenda figuræ 7 numeri A; deletis interim figuris tam 7 diuidendi, quam 3 diuiſoris: ita vt tunc numerus figuræ ſecundæ 9 diuiſoris ſuperpoſitus ſit 45; vt refert hoc ſchema.

```
   4
A 7568
 -----
B 395    | C 1
```

Hac abſolutâ multiplicatione, & numeri ex ea producti ſubtractione, iuxta proxima duo Præcepta 3 & 4. & numero, vt hîc cernis, conſtituto: eadem duo præcepta repetenda ſunt, omiſſo ſecundo, quod ad figuram quotientis definiendam pertinet; & in ſola diuiſoris prima figura verſatur. *Multiplica* itaque ſecundò figuram quotientis 1 in ſecundam diuiſoris figuram 9. producetur 9. *Productum 9 deme* à numero 45 ſuperpoſito: reliquus fiet numerus 36: quem in locum numeri 45 repones: ſicque ſtabit ſchema vt hîc cernis

```
    3
   46
A 7568
 ------
B 395    | C 1
```

expunctis figuris percurſis, numero ſcilicet 45 diuidendi, & figura 9 diuiſoris. Quibus peractis eadem duo Præcepta 3. & 4. exercenda ſunt circa vltimam figuram 5 diuiſoris B. *Multiplica* igitur figuram illam 5 diuiſoris per figuram 1 quotientis: & *Productum 5 deme* à numero ſuperpoſito 366. Reliquus fiet numerus 361, vt hic habetur.

```
    3
   461
A 7568
 ------
B 395    | C 1
```

Atque ita abſolutus eſt primus diuiſionis gradus; primáque quotientis figura 1 determinata, vt par eſt. Nam quotiens 1 multiplicauit totum diuiſorem B, licet per partes; & productus, etiam per partes demptus eſt à ſuperpoſito 756. factúſque reliquus 361, minor eſt diuiſore B. Atque hæ ſunt omnes diuiſiones operationis: toties iterandæ: quoties diuiſor promoueri debet ad nouam quotientis figuram inueſtigandam.

Præceptum 5. *Moueto* Præceptum hoc ſemel tantum exerceatur peractâ vnâ aliquâ operatione: quemadmodum Præceptum 2. *Quærito* ad operationis initium circa primam diuiſoris figuram, numerúmque diuidendi ei ſuperpoſitum. Nunc itaque cum multiplicatio, genitique ſubtractio ad vltimam diuiſoris B figuram 4 peruenerit: Promouendus eſt diuiſor verſus dexteram. Ita porrò promoueri debet diuiſor vt vnico ſolum gradu eius omnes

```
  3
 461
A 7568
------
B 3955 | C 19
  39
```

omnes figuræ ad dextram propiores fiant : quo modo hîc promotum cernis. Atque ita paratos habes numeros ad ſecundam operationem non alio abſoluendam modo, quàm quo abſoluta eſt prima. Nam iuxta.

Præceptum 2. *Quærito* mente ſcilicet interim, & quaſi tentando, quoties figura 3 diuiſoris B. promoti contineatur in ſuperpoſito numero 36 (talis enim ei ſuperponitur, vt ſeruati claſſium ordines oſtendunt) contineri deprehendes duodecies. An ergo numerum 12 ad quotientem C repones ? abſit. Scito enim hic obiter (cuius rationem inferius adducam) nunquam ad quotientem niſi figuram, vnam reponi debere : eſto vt hîc contingit, diuiſoris figura, de qua quæritur, in numero ſuperpoſito contineatur pluries ; quam vnica figura exprimi poſſit : ſed ad ſummam maximam omnium figurarum, quæ eſt 9, ad quotientem ſtatui poſſe. An igitur hic reponetur ad C figura ſaltem 9? Id porro tentandum priùs. Si enim 9 poneretur ad quotientem, duceretur 9 in figuram 3, productus ex ea multiplicatione, eſſet 27 ; quo dempto à numero 36, reliquus fieret 9 ; ita vt haberetur 91 : vnde numerus ex multiplicatione figuræ 9 quotientis per figuram 9 ſecundam diuiſoris genitus (qui eſt 81) poteſt ſubduci : multóque magis ex ſuperiore ſubduci poterit numerus producendus ex multiplicatione eiuſdem figuræ 9 quotientis per diuiſoris figuram 5 vltimam. Hac ratiocinatione ſic mente tantùm (niſi etiam calamo in ſepoſita operatione idem lubeat explorare) inſtituta : tutò debes figuram 9 ad figuram 1 quotientis apponere : & ex ea reliquam operationem, quam ferè totam mente iam complexus es, abſoluere. Ergo iuxta.

Præceptum 3. *Multiplica* figuram 9 quotientis per diuiſoris figuram 3 ; & *productum* 27 *deme*, vt iubet Præceptum 4. à ſuperpoſito numero 36 : relinquitur 9. quæ figura ſcribetur directè in eadem claſſe figuræ 3 multiplicatæ deletis ſtatim tum numero 36, à quo facta eſt ſubtractio, tum figurâ 3 diuiſoris tanquam iam percurſis. Rursùs *multiplica* quotientis figuram 9 in diuiſoris figuram ſecundam 9, & *Productum* 81 *deme* à ſuperpoſito numero 91 : relinquetur numerus 10 ſuperponendus numero 91 ſeruato ſemper graduum ordine tum delebitur, & 91, & figura 9 diuiſoris. Denique *multiplica* figuram eandem 9 quotientis per vltimam diuiſoris figuram 5. & *Productum* 45 *deme* à numero 108 (talis enim ſuperponi cenſetur figuræ 5 diuiſoris) facta hac ſubtractione reliquus ſupereſt

```
   16
   329
  4613
A 7568
------          63
B 3955 | C 19 ------
  39            395
```

rit numerus 63 : qui pone quotientem C 19 scribetur ei supposito diuisore interiecta lineola recta : vt significetur superfuisse absoluta diuisione, 63 vnitates diuidendæ per numerum 395 diuisorem. Quæ vnitates 63 in particulas frangendæ sunt, vt earum aucta multitudo, rursùs diuidi possit per eundem diuisorem 395. sed de his libro sequenti fusissimè. Atque ita absoluta est proposita diuisio numeri A maioris per diuisorem B. Vbi enim per promotionem diuisoris vltima figura illius ad vltimam diuidendi figuram peruenerit, & promotionem ad vlteriora, & diuisionem totam cessare necesse est.

Demonstratio.

Alia huc adducenda non est demõstratio huius diuidendi rationis: quã quæ supra allata est in diuisione numeri per digitum. Quæ enim Præcepta illi inseruierant, eadem omnia hîc obseruari contingit. Quod si quid discriminis occurrit; ex figurarum, quibus diuisor constat, multitudine proficiscitur: quarum singulæ multiplicari præcipiuntur per figuram ad quotientem statutam; & singuli producti numeri à superposito numero subduci, singulis etiam subtractionibus institutis. Qua in methodo non satis apertè cuipiam fortasse constat: quomodo totus diuisor B 395 multiplicetur per singulas ad quotientem statutas figuras; dum hæ in singulas diuisoris figuras ducuntur; & singuli producti seorsim à superpositis numeris subtrahuntur; præsertim cum multiplicatio ineatur non ab vltima numeri multiplicandi B 395 figura 5; vt solemnis multiplicandi modus exigit, sed à prima 3: nec subtractio etiam consuetam legem, quæ à figuris vltimis, siue primi gradus numerorum, initium duci iubet, obseruare videtur. Cui difficultati respondeo: etsi operationum formula nonnihil à præscripta & consueta methodo recedat: id ita exigente diuisionis commodiore praxi, nihil tamen mutationis ex ea diuersitate nasci; perindéque esse, ac si quotientis figura in totum simul diuisorem ducatur; genitúsque totus à superiore numero subtrahatur.

A 3618

395 | C 19

2700
810
45

3555

Resumamus enim operationem posteriorem exempli superioris: in qua figura quotientis 9 duci debet in diuisorem B 395, & productus subtrahi à superposito numero A 3618. Ducitur ergo quotientis figura 9, primùm in figuram 3 hoc est, in numerum 300 (ob duas sequentes figuras) fit autem 2700. Ducitur secundò in figuram 9 secundam numeri B, hoc est, in 90: fitque 810, ac denique in figuram 5: & producitur 45. Si igitur hi tres numeri

producti; qui simul additi numerum conficiunt 3555 genitum ex multiplicatione figuræ 9 & totius diuisoris 395; sigillatim demantur ex superposito numero 2618: dematur scilicet ex eo numerus primus 2700; tum ex reliquo 918, secundus 810: ac denique ex reliquo 108, tertius 45. eundem planè numerum 63 reliquum fieri necesse: qui relinqueretur, si totus numerus 3555 ex illorum trium additione conflatus vnicâ subtractione demeretur ex numero 3618. Vtroque enim modo totidem vnitates ex eo subtrahuntur, si quidem totum æquale est partibus suis omnibus simul sumptis. Nec etiam potest incommodum vllum ex eo nasci, quod subtractio à primis figuris superioris numeri 3618 ineatur. Nam figuræ illæ O primo numero 2700 adhærentes, cum tot semper sint, quot sunt figuræ in numero diuidendo 3618 sequentes post eius partem 36, numero 27 respondentem; intactæ perseuerant, & ad subtractionem numeri secundi integræ reseruantur, & ita deinceps contingit quotquot extiterint partiales numeri ex multiplicatione figuræ quotientis in diuisorem producti. Quæ cum ita habeant, cum inquam, iuxta traditam methodum partiales multiplicationes, & productorum partiales subtractiones à numero diuidendo præstent idem, quod vnicâ totali multiplicatione figuræ cuiuslibet quotientis in totum diuisorem; & totali numeri per eam multiplicationem producti à superposito subtractione præstaretur: hac autem totali multiplicatione, totalique subtractione obseruatâ, diuisio rectè absoluatur: vt Prop. 42. ostensum est: manifestum euadit, hanc etiam diuisionem numeri per diuisorem pluribus figuris constantem traditâ methodo rectè absolui. Quare. Numerum quemcunque per numerum plurium figurarum rectè diuisimus. Quod fieri debebat.

A 3618
B 395 C 19
2700
810
45
3555

Examen diuisionis huius, numeri per numerum plurium figurarum.

Varia tradita sunt examina diuisionis numeri cuiusuis per numerum, qui vnicâ figura constet siue per digitum. Quæ omnia huic etiam diuisioni per diuisorem plurium figurarum apprimè conueniunt. Si enim primò conuersâ operatione multiplicaueris diuisorem B per quotientem C. productóque numero, numerum reliquum 63 addideris: totum numerum A diuisum, nisi alicubi offenderis, debes restituere. Secundò, si eundem numerum A per quotientem diuiseris, prior diuisor, quotiens erit:

erit; idémque reliquus numerus fieri debet absoluta diuisione iuxta Prop. 43. Tertio si à toto numero A nouenarium reieceris sepositâ reliqua figura 8. Si item, & à diuisore B, & à Quotiente C eundem reieceris nouenarium, duæque reliquæ figuræ sepositæ 8 & 1 mutuò multiplicentur; & à producto 8, & reliquo numero 63 tanquam vnico numero reiiciatur idem nouenarius: reliqua figura æqualis esse debet figuræ reliquæ 8 à numero A, reiecto nouenario; vt reuerà hic æqualis est. Horum autem examinum omnium ratio, eadem hîc est: quæ superiùs allata fuit Prop. 43. quam consule.

A 7568 — 8

B 395   8 X 1

C 19 -- 63   8

PROP. XXXXVI. *Probl.*

Numerum quemlibet per alterum pluribus figuris constantem aliâ seruatâ formula diuidere.

Constructio.

Quæ diuisionis methodus exposita fuit Prop. 44. in qua modus docetur quemcunque numerum diuidendi per digitum; ita vt nulla inter operandum deleatur figura: eadem hîc locum etiam habet: nec minùs aptè exhibet numeros omnes, qui adhibiti fuerint, si quando repetantur; quàm cum diuisor vnicâ solùm constat figurâ; siue cum digitus est.

Sit ergo idem numerus A, qui suprà, diuidendus per eundem numerum B. Qui si diuidendo A subscriberetur; tres figuras 756 numeri A occuparet: quarum vltima 6 punctulo propterea insignienda est; vt scilicet significetur hanc operationem primam in ea figura terminari. Cum ergo hæc ratio à superiori non nisi figurarum collocatione discrepet, vt ex dictis constat: eius sunt hîc prosequenda singula præcepta. *Quærito* igitur iuxta præceptum 1. Quoties diuisoris B figura 3 contineatur in diuidendi A. figura 7, cui subscriberetur seruata priore methodo. *Quærito* autem mente primùm tentando, antequàm ad quotientem C quidpiam reponas, vt superiùs annotata determinatio necessaria obseruetur. Comperiés ergo hac adhibita exploratione figuram 3, semel tantùm in figura 7 contineri posse. Ergo ad quotientem C statue figuram 1. Præceptum 3

A 7568	B 395
D 395	C 19
E 3618	D 395
F 3555	F 3555
	G 0063
G 0063	
	A 7568

Multiplica hanc figuram 1 quotientis in totum Diuisorem B, vt producatur D: qui ita quotienti subscribetur, vt vltima eius figura 5 directè respondeat quotientis figuræ 1 multiplicanti. Præceptum 4. *Productum D deme* ex numero 756, qui superponeretur diuisori B: Ac propterea eundem productum D 395 subscribe numero A 756, vt ab hoc subtrahendum; quem & reuerà subtrahas: reliquo E 361 in modum vulgaris subtractionis subscripto. Denique præceptum 5. *Moueto*. Hæc promotio diuisoris fit, vt superiùs exposui, adscribendo diuidendi A figuram 8, figuram 6 notatam punctulo proximè sequentem, relicto nuper numero E 361: vt pareret numerus totus E 3618 ad sequentem operationem: cui subscribi censeri debet diuisor B 395 perinde ac si nunc primùm numerus 3618 diuideretur per B 395: atque diuisor B illi supponeretur, ita vt eius prima figura 3 responderet figuræ 6; totúsque numerus 36 superponi huic figuræ 3 conciperetur. Tunc ergo *Quærito* quoties figura 3 in superposito illo numero 36, contineatur? factâ exploratione, vt in superiori methodo, comperies nouies contineri. Ad quotientem ergo C statue figuram 9. deinde per hanc figuram 9 *Multiplica* totum diuisorem B, producti F 3555 figuram vltimam 5 directè sub figura 9 multiplicante collocando: quem eundem numerum F numero E à quo subtractio fieri debet, subscribetur, vt ab eo subducatur iuxta præceptum 4. hac demùm subtractione factâ relinquitur numerus G 63. Atque ita absoluta est tota diuisio: cum nulla supersit numeri diuidendi A figura, huic reliquo 63 addenda. Hanc demùm diuisionem, si probare lubeat; præter probationes superiùs allatas; hæc subministratur ab hac operatione, vt obseruatum iam est superiùs. Duobus numeris D & F: quorum ille ex multiplicatione figuræ 1 quotientis C in diuisorem B nascitur: hic verò ex multiplicatione eiusdem quotientis C figuræ 9, in eundem diuisorem; subscribatur reliquus numerus G 63, seruatis gradibus. Tum numeri D, F, G simul addantur: debet enim, si minimè erratum est, numerus diuidendus A per eam additionem restitui. Cuius ratio declarata est loco citato.

A 7568	B 395
D 395	C 19
E 3618	D 395
F 3555	F 3555
	G 0063
G 0063	
	A 7568

Scholium. I.

Asserui Prop. 45. dum de ápta ad quotientem statuenda figura ageretur figuras nunquam duas ad quotientem statui posse, eiusque assertionis rationem

nem fidem dedi me allaturum; quam nunc præsto. Proponatur rursùs casus ille, qui in secunda superioris exempli operatione occurrit, visúsque prima specie est duas ad quotientem figuras poni desiderare. Quærebatur quoties in numero 36 (diuidendus siquidem erat numerus E per promotum diuisorem D, & figura quærebatur secunda quotientis C 1) contineretur prima diuisoris D figura 3.

E 3618		
D	3950	C 1 10

Certum illud quidem est: si figura hæc 3 sola, nulláque ei annexi numeri sequentis habitâ ratione spectaretur: eam in numero superposito 36 duodecies contineri; atque ita numerus 12 ad quotientem C collocandus foret. Quia vero etiam debent reliquæ diuisoris D figuræ 9 & 5, cum sint perinde ac prima figura illa 3 multiplicandæ per numerum ad quotientem positum; vt productus numerus dematur à superposito numero E: quo maior numquam esse debet productus ille iuxta determinationem superius statutam: Ideo non tantum numerum 12 duobus figuris constantem ad quotientem non statui debere assero; sed ne numerum quidem 10; qui numero 12 minor est; omniúmque, qui duabus figuris exprimuntur, minimus. Ratio est, quia numerus 10 ad quotientem positus duci debet in totum diuisorem D 395 & productus demi debet à numero superposito E 3618, siue multiplicatio, & subtractio per partes instituantur singulis figuris seorsim assumptis; siue toto diuisore multiplicato; totóque producto subtracto, idem enim est, vt ostendi supra. Sed si diuisor D 395 multiplicetur per 10; hoc est ad numerũ D 395 apponatur figura O, vt fiat 3950 (sic enim absoluitur huiusmodi multiplicatio, vt Prop. 38 docui) numerus fit maior numero superposito 3618. Ergo ab hoc subduci non poterit 3950. Maior ergo, quàm ferat determinatio, ad quotientem positus est numerus 10. Quod autem numerus 3950 ex numero 10 quotientis in diuisorem D 395 ducto genitus maior sit numero 3618; patet ex eo: quod numerus 361 reliquus ex præcedenti operatione, minor esse debet diuisore D 395. eáque inęqualitas sita est in vtriusque numeri figuris illis tribus, quæ tolli non potest per appositionem figuræ cuiusvis ad vtrúmque numerum: figuræ enim appositæ primi sunt gradûs: cuius maxima figura, minor est vnitate gradus secundi, quare licet ad numerum minorem 361 apponatur 8, & ad maiorem apponatur figura O: nihilominus conflatus numerus ille 3618; minor isto 3950 semper futurus est. Atque adeo maior, quam par sit, semper futurus est quotiens, si ad illum statuatur numerus 10, quicumque tandem casus occurrat, vt patet ex proxima ratiocinatione. Quare ad quotientem numerus statuendus semper minor, quam 10. At minor quàm 10 non datur, nisi figurâ vnica expressus, cum sit ipse omnium minimus, qui duabus figuris exprimuntur. Patet ergo veritas assertionis.

Scholium. II.

Variæ industriæ ad diuiſionem conducentes.

Tota, vt ex dictis conſtat, inſtituendæ diuiſionis difficultas in eo verſatur; vt apta ad quotientem figura eligatur. Quæ ſcilicet ſit huiuſmodi, vt ducta in diuiſorem, numerum producat minorem quidem numero ſuperpoſito, vt ſubtractio perfici queat; eâ tamen conditione minorem, vt reliquus poſt factam ſubtractionem numerus diuiſore ipſo minor ſemper ſit: cuius determinationis ratio ſuperiùs adducta eſt. Non leuis porro eſt hanc ad quotientem ſtatuendā figuram eligēdi difficultas: cum vnica ſit media inter plures tum maiores, tum minores; quæ propoſito ſatisfaciat. Hinc exploratio illa variarum figurarum adhibenda eſt; vt apta ſumatur ad quotientem ponenda: quæ non niſi moleſta & tædij plena eſſe poteſt; ſi præſertim, vt ſæpius contingit, longiùs proſequenda fuerit: imò & errori obnoxia, cum mente ſolùm exerceatur; cui facillè excidant ob multitudinem & varietatem numeri. Ad hæc continget interdum, in numeris præſertim magna figurarum copia expreſſis, operationem iuxta aſſumptam quotientis figuram perbellè ſub initium procedere: quæ paulò longiùs promota ad exitum perduci nequibit, totáque denuò repeti debebit ad hanc ergo difficultatem; quæ hanc maximi momenti Arithmeticam operationem præ cæteris impeditiorem facit; aut tollendam aut minuendam varij varias rationes excogitarunt; non inanes illas quidem; ſed quæ tamen huic incommodo omninò non occurrant. Hinc, ſpero, non ante abiero, quàm cumulatè ſit occurſum.

Induſtria Prima.

Iuuabitur interdum hac induſtriâ exploratio facienda figuræ ad quotientem ſtatuendæ, ne ſtatuatur iuſto maior; quamquam ne iuſto minor ſtatuatur, profutura non ſit. Sic autem habet. Quando inter explorandum contigerit, vt figura poſt ſubtractionem numeri ex figura quotientis in diuiſorem ducta geniti, aut æqualis figuræ ipſi quotientis, aut eadem maior relinquitur: argumentum eſt certiſſimum figuram illam quotientis non eſſe iuſto maiorem; totámque operationem, quæ multiplicatione & ſubtractione conſtat, ad exitum perduci poſſe quotquot extiterint deinceps figuræ diuiſoris multiplicandæ per figuram illam quotientis. Exemplum affero, tum rationem.

6
A 18974
B 7987 | C 6

Diuidendus eſt numerus A per numerum B. compoſitis ad diuiſionem numeris iuxta Præceptum primum. Quæris quoties figura 2 prima diuiſoris, contineatur in numero 18 ſuperpoſito: & explorando poſt varias figuras aſſumptas inutiles, expendis an figura 6 aptior fortaſſe foret. Ducis ergo figuram 6 in figuram illam 2 diuiſoris productúmque numerum 12 ſubducis à numero 18 ipſi figuræ 2 ſuperpoſito; & reliqua fit figura 6. Hæc ergo cum æqualis reperiatur figuræ 6, quam ad quotientem deſtinas, certum eſt eam iuſto maiorem non eſſe, id eſt, figura 6 quotientis, multiplicans figuras ſingulas diuiſoris B, numeros producet; qui ſubtrahi poterunt à ſuperioribus numeris, vt exigit altera determinationis ſuperiùs expoſitæ conditio: velut, ſi pergas experiere. Occurret interdum non niſi poſt ſecundam multiplicationem, & ſubtractionem reperiri reliquam illam figuram figuræ quotientis aut æqualem, aut eâ maiorem. Diuide enim hunc numerum A per B: ad quotientem C, poſita figura 4 multiplicans figuram 3 diuiſoris, generat 12; quo à numero ſuperpoſito 15 ſubducto, reliqua fit figura 3, minor quàm ſit quotientis figurâ 4. Necdum ergo conſtat, an figura illa 4, apta diuiſioni futura ſit; proſequendáque eſt exploratio, initâ ſecundâ multiplicatione eiuſdem figuræ 4 in ſequentem diuiſoris figuram 8, quâ producitur 32. qui à ſuperpoſito numero 36 ſubductus reliquum facit numerum 4, quotientis figuræ 4 æqualem. Quare eò perductâ exploratione, tutò poteſt figura 4 ad quotientem ſtatui vt huic toti operationi ſatisfacturâ.

34
A 15695
B 3849 | C 4

Huic autem rationi nititur hæc obſeruatio. In proximè allato exemplo relicta fuit figura 4 æqualis figuræ 4 quotientis: quæ multiplicatura eſt ſequentem diuiſoris figuram 4, & productus, ſubtrahendus eſt à numero 49 ſuperpoſito figuræ diuiſoris 4 multiplicatæ. Qui numerus ſuperpoſitus in eo caſu, non poteſt non eſſe maior numero per multiplicationem producto. Cum enim numeri 49 ſuperpoſiti prior figura 4, decadica ſit ratione poſterioris 4: ſi figura quotientis 4, illi figuræ 4, æqualis duceretur in numernm 10, numerum generaret articulum 40 æqualem numero 40; quem præter numerum 9, numerus ille ſuperpoſitus 49 continet enim duos numeros 40 & 9; in quos tanquam in duas partes diuidi poteſt numerus 49. Ergo ſi quotientis figura 4 numerum quemcumque minorem quàm 10 multiplicet, numerum generabit minorem quàm 40, qui propterea à numero 40 ſubtrahi poterit: potiori ergo ratione ſubtrahi poterit à numero: qui maior ſit quàm 40; qualis erit numerus omnis, qui ex articulo 40 & quouis alio digito componetur, vt hîc 49. Sed figura quotientis 4, nunquam multiplicat niſi digitum quempiam, qui mi-

nor

nor semper erit quam 10. Ergo ex ea multiplicatione genitus numerus subtrahi semper poterit à numero superiore. Quod si figura superposita maior foret; quàm quotientis figura 4, multò magis subtrahi posset productus numerus ex figura quotientis in figuram Diuisoris ductâ. Quare quoties per explorationem deprehenditur figura reliqua post subtractionem ad diuisionem, necessariam, vel æqualis figuræ quotientis, vel eadem maior: dubitari nullo modo debet; quin reliqui partiales numeri ex figura quotientis in singulas Diuisoris figuras ducta geniti, à superpositis numeris subduci possint: vt exigit apposita determinatio figuræ ad quotientem constituendæ.

Nolim tamen existimes, vbi per explorationem occurrerit figura, vel æqualis figuræ superpositæ, vel eâ minor; eam esse aptam ad diuisionem; ac proinde ad quotientem reponendam. Fieri siquidem potest, vt figura illa quotientis sit iusto minor: ita vt ex eius multiplicatione in diuisoris figuram, numerus producatur: qui à superposito subductus, numerum relinquat diuisore maiorem contra rationem diuisionis, & alteram determinationis conditionem. Neque etiam, quando figura reliqua post subtractionem, minor est figura quotientis: concludendum statim erit figuram quotientis perperam esse positam. Feri enim potest, vt figura illa reliqua semper sit minor figura quotientis; & tamen Diuisio ad exitum rectè perducatur. Diuide, exempli gratiâ, numerum A per numerum B. quotientis vera figura est 6; quâ in singulas Diuisoris figuras ducta numeri generantur: qui à superpositis subducti figuram relinquent figurâ quotientis semper minorem. Licet ergo ex huius Industriæ obseruatione rectè colligas figuram quotientis iusto maiorem non esse; quoties reliqua post subtractionem figura, vel æqualis est figuræ quotientis, vel ea maior, perperam tamen ex eo colligeres, non esse iusto minorem; sicut nec statim existimandum est esse iusto maiorem, si reliqua post subtractionem figura, figurâ ad quotientem posita minor occurrat.

A	1 7 9 2 2
B	2 9 8 7 (C 6

Industria secunda.

Iuuerit interdum ad debitam quotientis figuram certò definiendam: si obseruetur non tantùm quoties prima Diuisoris figura in numero superposito contineatur; sed etiam quoties numerus ex duabus figuris compositus in eodem reperiatur. Exempli gratiâ. Diuidendus est numerus

rus A per numerum B. hærebis statim quænam sit ad quotientem statuenda figura; si solùm quæras, quoties Diuisoris prima figura 1 in superposita figura 5 contineatur. At si attendas quoties numerus 19 in superposito 59 contineatur; faciliùs fortasse figuram quotientis defnies. Sic enim ratiocinabere. Si ad numerum 59 adhuc accederet vnitas fieret 60, siue 20, ter: qui numerus 20 continet semel 19, & præterea vnitatem ergo 60 continet numerum 19 ter, & præterea tres vnitates: ergo 59, eundem numerum 19 ter etiam continebit vna cum duabus vnitatibus, statue ergo ad quotientem figuram 3, & reliquam figuram 2 suo loco superpone supra figuram 9 diuidendi numeri A: tum prosequere Diuisionem ita inchoatam.

	2
A	594
B	198 (C 3

Industria Tertia.

Continget interdum, etiam post adhibitam accuratam explorationem, si maiores præsertim versentur numeri; vt maior iusto ad quotientem statuatur figura: nec tamen eius excessus deprehendatur, nisi post longiùs promotam operationem, cum scilicet maior nascetur ex multiplicatione ad diuidendum præscripta numerus, quàm vt subtrahi queat à numero superposito: quo in casu repetenda foret non sine tædio temporísque iactura, non solùm singularis illa operatio, quæ ex inepta quotientis figurâ pendet: sed etiam reliquæ ab exordio Diuisionis institutæ operationes, vt nimirum superpositus numerus restituatur, qui alioqui propter omnes expunctas figuras restitui nequit, neque ex eo quotientis figura emendari. Tunc ergo hac arte non sine compendio maximo figuras ad operationem necessarias repones. Vnicam illam figuram quotientis iusto maiorem ducito in Diuisoris figuras illas, quæ in hac operatione percursæ sunt: & geniti numeri figuras singulas seruatis gradibus, deletis figuris superpone. Hæ enim sunt, quæ ante initam operationem superpositæ erant Diuisori: ac proinde hanc solam operationem denuò exordieris assumptâ ad quotientem figura minore, quæ operationi satisfaciat.

Exemplo res clarior euadet. Proponatur numerus A diuidendus per B.

```
      5
    5 8
A 1 0 4 8 6
B   1 9 8  (C 5
        5
      2 8
      1 7
    1 9 1
A 1 0 4 1 6
B   1 9 8 8(C 5 3 2
      1 9
```

Prima operatione ritè absolutâ per positam ad quotientem C figuram 5, reliquus fit numerus 58 post subtractionem, vt habet schema primum. Si igitur promoueatur Diuisor ei superponitur numerus 586 (iam attende schema secundum in quo primum continetur) & suppone figuram 1 primam Diuisoris in superposita figura 5 contineri ter, positâ ad quotientem figura 3: quæ ducta sigillatim in duas priores figuras 1 & 9 Diuisoris numeros generat minores numeris superpositis, atque adeò aptos, vt ab ipsis subducantur: Duc enim 3 in 1, fit 3: subtrahe hunc productum 3 à superposita figura 5; restat figura 2, quæ superscribitur. Duc rursus 3 in 9; fit 27; qui subductus à superposito 28, restat figura 1 superponenda. At verò si eandem quotientis figuram 3 ducas in tertiam Diuisoris figuram 8: fiet 24. maior quàm sit numerus 16 superpositus, à quo fieri debet subtractio. Maior ergo iusto, est posita ad quotientem figura 3: ac proinde tota nō solùm operatio secunda, qua constituta est ad quotientem figura 3 maior iustò; sed etiam tota Diuisio denuò instituenda est, vt ad quotientem figura debita constituatur. Sed huic incommodo occurritur tradita arte, quà iubetur, vt figura illa 3 ad quotientem perperam posita ducatur in diuisoris numerum 19 percursum: fiet autem ex 3 in 9, numerus 27; scribe 7 directè in eadem classe numeri multiplicati 9; seruatâ priore figurâ 2. Tum rursùs ducito 3 in 1 fiet 3; cui adiuncta figura 2 reseruata, conflatur 5 in classe item figuræ 1 multiplicatæ superponenda. Ad hæc ad figuram illam 7 superpositam figuræ 9 Diuisoris multiplicatæ, addi debet figura 1 eiusdem classis, quæ deleta non fuit, nec deleri debuit: fiet ergo 8; atque adeò numerus 58, qui ante positam ad quotientem figuram 3 iusto maiorem; & per eam initas multiplicationem & subtractionem, ac etiam numerorum expunctionem reperiebatur Diuisori promoto superpositus. Restitutis ergo numeris, qui priùs diuisori subscripto respondebant; iniri denuò poterit hæc sola operatio secunda; quotientis figurâ 3 iusto maiore in minorem commutata, vt in 2: ex qua operatio absoluetur: eritque quotiens C 52, & reliquus fiet numerus 190, si Diuisionem absoluas emendatâ figurâ quotientis, quam in schemate non absolui, vt figuræ superpositæ restitutæ cerni possent; in quo nec deletæ sunt duæ figuræ 7 & 1; quæ simul additæ sunt, vt fieret figura 8, quæ ipsis superposita cernitur; earúmque loco in operatione haberi debet, & vtraque 7 & 1 deleri.

Ratio

Ratio huius artificij clara est. Nam si à diuisore 198 præscinderetur vltima illa figura 8 : solúsque numerus 19 diuidere deberet superpositum 586 : rectè constituta foret quotientis figura 3 ; & peractis multiplicationibus, & productorum subtractionibus, remaneret figura 1 reliqua. Si igitur conuersa operatione quotientis figura 3 multiplicet diuisorem 19, & producto 57 addatur quæ in diuisione reliqua fuerat figura 1 vt fiat numerus 58; eum numerum necesse est illum ipsum esse; qui diuisus fuerat per diuisorem 19. Atque ita restitutæ sunt in integrum deletæ, & perturbatæ figuræ : vt de nouo diuisio institui possit ad quotientem positâ aptiore figurâ.

Cæterùm si diuidendi ratio Prop. 46. tradita adhibeatur : in qua numeri ex multiplicatione diuisoris per singulas quotientis figuras geniti, exhibentur integri : nulli hæc industria futura est vsui. Imò cum totus diuisor per quotientis figuras priùs multiplicetur, quam subtractio instituatur an ea institui possit statim apparebit; maiore, vel non maiore sese prodente numero; qui subtrahendus est : qui si maior extiterit, quam numerus superpositus, vnde subduci debet : figura quotientis iusto maior emendari facile poterit iuxta ea, quæ citata Propositione declarata sunt.

Hîc quæratur, nec abs re vbi de figuræ iusto maioris emendatione actum est : si ad quotientem posita figura iusto minor deprehendatur : eo quod peractâ numeri ex multiplicatione diuisoris per quotientis figuram geniti subtractione à numero superposito; numerus superfit ipso diuisore maior quid tunc agi debeat, vt & figura quotientis debita statuatur; & reliquus ille numerus corrigatur ad sequentem operationem ineundam necessarius? huic quæstioni cumulatè satisfactura est sequens Industria præ cæteris, vt apparebit, commendanda.

Industria Quarta.

Hoc compendio omnis illa difficultas diuisionis; quæ in eligenda quotientis figura apta versatur, penitùs euanescit; ita vt hæc Arithmetica operatio æque ac cæteræ plana præter opinionē euadat: cum opera haud admodum graui numeri ex figura quotientis perperam positâ, siue ea iusto maior, siue minor fuerit, restituantur. Hanc memoriæ causa his versiculis complector.

Constructio.

Demere si nequeas : dum possis iunge secantem
Sed toties vno quotiens multetur adempto.

Subtracto genito: si sit sector relictus
Maior. Stet sector: rursusque secato relictum.

Horum sensus apertior fiet allato Exemplo. Sit ergo numerus A per B diuidendus. Quæris in primis quoties figura 1 Diuisoris reperiri queat in superiore figura 9 numeri A diuidendi; nec parùm hærere interdum continget, dum repetenda sæpiùs erit exploratio; quam sequentes Diuisoris figuræ; quarum ratio habenda est, exigunt. Verùm absque morâ diuturnâ propè veram æstimationem, suppone figuram 1 in superposita 9 contineri quinquies, positâ ad quotientem figurâ 5: quam duces in figuram 1, & productum 5 demes à superposita figura 9, & reliqua fiet 4 superscribenda, deletis interim inutilibus figuris 9 & 1.

	1			
	~~6~~	6		
	~~4~~	~~2~~		
A	~~9~~	~~2~~	1	
B	~~1~~	9	(C	~~5~~ 4

Deinde ductâ rursùs quotientis figurâ 5 in figuram 9 Diuisoris, producitur 45: qui maior est, quàm reliquus superpositus numerus 42; à quo proinde demi non potest. Maior ergo iusto est quotientis figura 5. Hanc ergo ad veram, & simul reliquum numerum debitum consequeris, seruato præcepto illo *Demere si nequeas &c.* cuius sensus est. Cum subtractio, vt hîc, fieri nequit: adde *secantem*, hoc est, Diuisorem 19 ad numerum illum reliquum 42 minorem, quàm vt possit ab eo fieri subtractio numeri 45, *dum possis* id est, quoties opus erit, vt fiat numerus ex illa additione maior, quàm subtrahendus numerus 45. hic ergo addetur diuisor 19 ad numerum 42, semel tantùm: fit enim ex ea additione numerus 61 maior numero 45 subtrahendo. Iam subtrahe à 61 numerum illum 45: relinquetur numerus 16 superponendus, vt schema refert; qui verus est numerus qui relinqui debet; si vera & debita figura ad quotientem statuta foret: quæ statim habetur iuxta illa verba. *Sed toties vno quotiens multetur adempto.* Id est, figura quotientis minuatur tot vnitatibus, quot additiones Diuisoris factæ sunt ad superiorem numerum, vt fieret numerus maior eo, qui subtrahendus est; vt hîc, additus est semel Diuisor 19 ad numerum 42, factúsque est numerus 61 maior numero 45 subtrahendo. Ergo figura 5 quotientis minui debet vnitate vnica, ita vt fiat 4, vera quotientis figura: iuxta quam imposterum prosequenda est Diuisio omissâ priore 5. Quod si initio ad quotientem statuisses figuram 6, & ex ea Diuisionem promouisses, addendus fuisset bis Diuisor 19, vt fieret numerus maior numero subtrahendo: atque ita figura 6 quotientis, duabus vnitatibus minueretur, vt figura eadem 4 quotientis haberetur. Sicut & idem numerus 16 reliquus factâ subtractione reperiretur ad absoluendam diuisionem.

Quod si Diuisor non tantùm foret 19, sed alia quapiam figura sequen-

te constaret. Tunc in eam ageretur iuxta nouam figuram quotientis emendatam, perinde, ac si ab initio operationis posita fuisset, vt in superiori exemplo, diuisor B non tantùm 19, sed 196 foret: emendatâ figurâ 5, & in figuram 4 conuersâ, dum versatur operatio circa numerum 19: deinceps multiplicabitur reliqua Diuisoris 196, figura 6 per quotientis figuram nouam 4; & productus 24 demetur à numero 161 superposito; atque ita Diuisio absoluetur more solito.

Demonstratio.

Ratio, cui nititur nouum hoc compendium, primâ fronte videatur abditissima: quæ tamen paucis euadat aperta hac nempe ratiocinatione: quæ ex Propositione 1. lib. 2. Elementorum petitur. Si quotiens C 5 iusto maior in duas partes diuidatur nimirum in aptam huic diuisioni figuram 4 (quæ scilicet multiplicans Diuisorem B 19 numerum generat 76 minorem, quàm sit numerus superpositus 92 à quo proinde subduci possit) & in figuram 1: & per hasce singulas partes multiplicetur Diuisor B 19 infectus; duo fient numeri 76 & 19 æquales simul numero 95: qui fit ex toto quotiente C 5 infecto, ducto in Diuisorem B 19. per citatam Prop. 1, lib. 2. Eucl. Si ergo ad duos inæquales numeros 92 (qui superponitur Diuisori B 19) & 76, qui producitur ex figura 4 in Diuisorem 19, addantur æquales numeri: numeri ex huiusmodi additione collecti inæquales etiam futuri sunt; eorúmque differentia eadem erit, quæ fuerat priorum numerorum 92 & 76 ante factam additionem. Sed cum Diuisor 19 additur ad superpositum numerum 92 toties, quoties opus est, vt factus, minor non sit; quàm numerus 95 ex toto Quotiente C 5 in Diuisorem B 19 ducto genitus: adduntur numeri æquales ad duos numeros 92 & 76. Ergo eadem differentia inter huiusmodi numeros reperietur. Probatur minor. Si ad numerum 76 ex figura 4 in Diuisorem B 19 ductâ genitum addatur numerus 19, qui fit ex figura 1 in 19 ductâ; fiet numerus 95: qui ex figura C 5 Quotientis in Diuisorem 19 ductâ producitur per Prop. 1. lib. 2. Eucl. Sed cum ad superpositũ numerum 92. toties additur 19, vt factus minor non sit quàm 95, ex quotiente C 5 in diuisorẽ B 19 ducto genitus; adduntur numeri æquales ad 92 & 76. Ergo eadem inter factos erit differentia. Probatur assumptum. Cum figura 4 ex suppositione sit debitus quotiens diuiso numero 92 per numerum B 19: figura 4 multiplicans Diuisorem 19, producit numerum 76 multiplicem diuisoris 19 proximè minorem numero Diuiso 92. iuxta determinationem rectæ Diuisioni debitam superiùs explicatam; ita vt numerus 92 excedat

A 92 1

B 19 (C 5

4, 1

95; 76, 19

numerum 76 excessu minore, quàm sit Diuisor 19: aliàs nec numerus 76

A 9 2 1
B 1 9 (C 5
4, 1
95; 76, 19

esset multiplex Diuisoris 19 proximè minor quàm Diuisus 92; nec figura 4 contra suppositionem verus foret quotiens Diuiso 92 per 19. Quod cum ita sit: si ad numerum 76 addatur aliquoties Diuisor 19: vt fiat nouus multiplex Diuisoris B 19; & toties idem Diuisor 19 addatur ad numerum 92, erit nouus ille multiplex Diuisoris 19, proximè minor producto hoc numero patet. Nam eadem differentia numerorum 92 & 76, quæ minor est quam 19; reperitur inter illos de nouo constitutos numeros: siquidem ad numeros inæquales 92 & 76 adduntur æquales numeri, dum 19 toties ad vnum, quoties ad alterum additur. Sed cum multiplicatur Diuisor 19 per quotientem C 5; additur ad numerum 76 ex figura 4 in Diuisorem eundem 19 ductâ genitum, Diuisor 19 aliquoties; quot scilicet vnitates continet figura 5 supra figuram 4 (hoc est hic, vnam.)

Additur autem ad numerum 92 Diuisor 19, donec factus numerus sit proximè maior, quàm numerus ex quotiente 5 in Diuisorem 19 ducto genitus: qui idem est per Prop. 1. lib. 2. Eucl. qui habetur figuris 4 & 1 sigillatim in 19 ductis, duobúsque genitis numeris simul additis. Ergo additur ad 92 æqualis numerus, id est, æque multiplex Diuisoris 19; siue toties additur 19 ad 92. quoties additus est ad 76: vt scilicet instituatur Diuisio numeri ex illa additione Diuisoris 19 ad numerum 92, producti per eundem Diuisorem 19, & quotiens sit figura C 5. Quod cum ita sit, ostensum sit præterea reliquum numerum peractâ Diuisione, eundem necessariò fore, qui reliquus est, si diuidatur numerus 92 per eundem Diuisorem 19: qui quidem est excessus numeri 92 Diuisi supra numerum 76 multiplicem Diuisoris 19 proximè minorem numero 92. constat quod assertum est. Nimirum; si quoties additus est Diuisor 19 ad numerum superpositum 92. vt fieret numerus proximè maior numero producto ex figura quotientis iusto maiore in diuisorem ductâ; toties dematur vnitas ex illa iusto maiore figurâ quotientis; relictam fore veram quotientis figuram; reliquum item haberi numerum, qui Diuisione per verum quotientem institutâ haberetur.

Verissima ergo est hæc figuram quotientis iusto maiorem emendandi ratio. Quæ quanti sit momenti, dum maiorum numerorum diuisiones iuxta vulgarem modum, qui figurarum percursarum expunctione vtitur, instituuntur, dici vix potest: norunt qui numerorum calculo delectantur. Nunc cum figura iusto minor ad quotientem posita est, quid opus facto declarandum.

Constructio

Constructio secundi Casus.

Cum ad quotientem figura iusto minor posita est: non nisi post absolutam operationem deprehendi potest, ex eo scilicet, quod reliquus numerus post Diuisionem maior est ipso Diuisore: quod contingit eò quod figura Quotientis multiplicans Diuisorem, numerum producit minorem, quàm par sit; qui à superposito subductus reliquum facit numerum iusto maiorem, & adhuc per eundem Diuisorem, diuisibilem. Cui incommodo paratissimum est remedium; iuxta superiùs allatum Praeceptum. *Subtracto genito, si sit sectore relictus maior.* Id est si numerus post subtractionem numeri producti ex multiplicatione figurae quotientis in Diuisorem ductae, à superiore diuidendo numero reliquus, fit adhuc ipso Diuisore maior. Quid tum? *Stet sector: rursúsque secato relictum.* Quid factu facilius? Ne promoueatur Diuisor in huiusmodi casu ad sequentem operationem inchoandam: cum nec dum ea, quae versatur, absoluta sit: sed per eundem diuisorem eodem in gradu constitutum, relictum illum numerum Diuisore maiorem diuide, quasi nouâ operatione initâ. Verùm obserua, sicut Diuisor promotus non est; ita nec figuram quotientis promouendam esse; sed cum priore iam statutâ iungendam; vt ex duabus vnica fiat, vt pote ex eadem operatione, si rectè fuisset instituta, profectura. Exemplum esto.

Numerus A diuidendus est per numerum B. Quaeritur primò quoties figura 1 prima Diuisoris B contineatur in superposita figura 9 suppone contineri ter; & figuram 3 ad quotientem C statue, iuxta quam expeditis subtractionibus, & multiplicationibus necessariis, reliquus fit numerus 35: qui maior est ipso Diuisore 19. Diuide ergo rursus 35 per 19 non promotum. Quaere scilicet quoties figura 1 prima Diuisoris contineatur in superpositâ figura 3? esto, semel contineri censeatur. Ad quotientem ergo statuenda est figura 1, non quidem consequenter post figuram 3 iam positam: absit; sed in eodem gradu cum ipsa: ei scilicet subscribetur, vt deinde per additionem ex duabus vnica 4 coalescat, peractâ autem hac operatione restituti sunt omnes numeri tum quotiens 4; tum reliquus superpositus numerus 16 minor Diuisore 19.: vt tunc possit idem Diuisor promoueri ad sequentem ineundam operationem. Ratio huius compendij clarior est, quàm vt pluribus debeat explicari. Duo scilicet numeri 3 & 1 ad quotientem positi dum in Diuisorem

1
2
3 6
6 5
A 9 2 1

B 1 9 (C 3 4
1

19 ducuntur, duos numeros producunt, qui ſimul additi æquales ſunt per Prop. 1. lib. 2. Elem. vnico numero ex figura 4 in eundem Diuiſorem ductâ : & ſigillatim ex numero ſuperpoſito 92 ſubducti, numerum eundem relinquunt; qui relinquitur ſubducto ex eodem numero 92, numero, qui ex figura 4 in eundem Diuiſorem 19 ductâ generatur.

Obſeruabis obiter in huiuſmodi numeris, in quibus præuia illa exploratio ad debitam figuram Quotientis eligendam neceſſaria, tam expedita non eſt : ſatiùs fore, vt figura quotientis eligatur iuſto potiùs minor, quàm maior : faciliùs enim numeros totius operationis reſtituit minor quàm maior : vtrauis porrò aſſumatur, ad ſcopum facile peruenitur; vt anceps hærere diu non debeat logiſta in eligendo quotientem : vtrouis enim deflectat; hac benè percepta induſtria in viam abſque longiori diuerticulo ſeſe reducere poteſt : vt ita, quod ſupra monui, Diuiſio nihil plus difficultatis, quàm reliquæ operationes patiatur.

Induſtria Quinta.

Quam ſuperiùs ad Prop. 38. vbi de multiplicatione agebatur, Induſtriam attuli quarto loco : huc etiam apprimè facit : & verò in numeris multitudine figurarum numeroſiore conſtantibus diuidendis compendium huic par vix inueniatur. In huiuſmodi enim diuiſionibus, antequam ad metam perueniatur, fatigatur animus; eúmque non rarò, dum attentiús operi incumbit, præuertit manus, alióſque quàm imperatos characteres exarat : qui opus totum labefactent, eò moleſtiùs, quò inter tantam multitudinem figurarum latere poſſunt occultiùs. Quibus incommodis occurrit hæc, quam hîc exponere ſtatui, induſtria perfacilis: quam minoribus numeris claritatis gratiâ complectar. Tu in maioribus eodem modo vtere. Diuidendus ſit numerus A per Diuiſorem B conſtrue tabellam Pythagoricam ſingularem ad Diuiſorem B pertinentem, vt hîc conſtitutam cernis; perpetuâ additione Diuiſoris 19 ad ſe ipſum primò, deinde ad productum 38: tertiò ad 38, vt fiat 57, & ſic deinceps: appoſitis etiam ad læuam vulgaribus notis nouem his productis reſpondentibus. Quâ ſic ad propoſitum vteris.

A 9217	B 19-C 485
76 .	1—19
161	2—38
152	3—57
———	4—76
0097	5—95
95	6—114
———	7—133
0002	8—152
	9—171

Numerus 19 Diuiſor ſubſcriberetur numero 92. Quære igitur in Tabella proximè minorem numero 92. Is eſt 76, cui ad læuam reſpondet figura 4. ſtatue ergo figuram 4 ad quotientem : tum deme 76 à 92, vt reliquus fiat numerus 16.

16 huic numero 16 appone sequentem diuidendi numeri A figuram 1 (sic enim promouetur Diuisor) fiet numerus 161 secundâ operatione diuidendus. Quære ergo in tabella, vel numerum 161, vel proximè minorem. Is est 152: cui præfigitur figura 8, ad quotientem vtique collocanda: dempto autem numero 152 ex 161, remanet 9. Cui adscribenda est diuidendi numeri A figura 7, vt fiat 97 pro sequenti operatione quæsito ergo in tabella numero 97, vel eo proximè minore, qui est 95; figura ei præfixa 5 ad quotientem statuetur; ipse verò demetur à 97, & reliqua fiet figura 2. Atque ita absoluta est Diuisio dati numeri A per Diuisorem B, inuento quotiente C 485; & numero 2, qui post diuisionem superest. Quæ iucundâ operatione, nulla certè animi contentione, aut hæsitatione, in magnis æquè ac in paruis numeris perficiuntur. Ratio verò artificij totius ex ipsa tabellæ constructione pendet. In qua singuli numeri toties continent numerum primum, qui Diuisor supponitur; quoties figura numeris præfixa continet vnitatem. Ergo cum supremus siue ad caput tabellæ positus numerus sit Diuisor. Toties tabellæ numeri, vel eis proximè maiores continebunt Diuisorem, quoties figura quotientis, (cum sit numeris tabellæ præfixa) continet vnitatem. Vt habet Diuisionis definitio. Quamquam enim vario in gradu figuræ illæ numeris præfixæ in tabella, dum ad quotientem statuuntur, reperiantur; cum diuisi in singulis operationibus numeri in iisdem gradibus versentur, nulla sequitur diuersitas in quotientis figuris.

Industria sexta.

Quod compendium Diuisionis hîc sum expositurus; illius conuersum est: quod suprà adduxi industriâ 3. ad multiplicationem iuuandam. Est autem huiusmodi. Cum Diuisor proponitur numerus compositus Prop. 10. definitus: qui scilicet generari potest per mutuam duorum numerorum multiplicationem: qualis est numerus 24, qui producitur duobus numeris 6, & 4, in se ductis. Tunc numerus diuidendus diuidi poterit per alterutrum duorum illorum numerorum, & ortus ex ea diuisione quotiens, rursùs diuidi per numerum alterum: hîc enim quotiens Diuisionis posterioris, ille ipse est; qui Diuiso proposito numero per

integrum Diuisorem produci debet. Vt si numerus A diuidi debeat per B: quotiens C foret 32. Qui idem produceretur eodem numero A diuiso per D 6; si quotiens inde ortus E 128, rursùs diuideretur per F 4, eò quod F 4 ductus in D 6 producat totum diuisorem B 24. Ratio huius diuisionis clara est ex citato loco. Nam cum multiplicatio & Diuisio eam seruent inter se habitudinem, vt altera alterius sit semper conuersa: si vltimus quotiens C 32 ducatur in secundum Diuisorem F 4. Tum ex ea multiplicatione ortus numerus E 128, iterùm multiplicetur per priorem diuisorem D 6. produci debet numerus A: qui idem produceretur ducto integro Diuisore B 24, qui ex mutua multiplicatione numerorum 6, & 4 nascitur; si in quotientem C 32 duceretur. Ergo rectè habetur quotiens C 32 si posteriore methodo Diuisio instituatur, quandoquidem numerum A vtrouis modo diuisum restituit, si vtrouis modo multiplicetur; hoc est, siue per Diuisorem ipsum B 24; siue per 4, genitúsque E 128 iterùm per 6. Sed iuuat Demonstrationem ex ipsis Diuisionis Principiis petitam afferre: quæ est huiusmodi.

```
A 768
B 24   (C 32
A 768
D 6    (E 128
          F 4   (C 32
```

Præparetur schema numeris, vt hîc cernitur, dispositis. Quia Diuisor D 6 metitur Diuisum A per E: metitur autem & B 24 per F 4 ex hypothesi: si D multiplicet E & F producet A & B. Ergo per Prop. 15. lib. 7. Elem. ita erit A ad B vt E ad F: & permutando, A ad E; vt B ad F. Rursùs, quia F diuidit E, & producit C, siue F metitur E per C; seipsum autem metitur per vnitatem G (quilibet enim numerus seipsum per vnitatem metitur, siue seipsum diuidens producit vnitatem per 5 Axi. lib. 7) Ergo F multiplicans C & G producet E & F. Ergo per 15. lib. 7. ita erit E ad F, vt C ad G: & permutando, ita erit E ad C, vt F ad G vnitatem. Quare ex æquo, ita erit A ad C vt B, ad G vnitatem. Ergo per Prop. 19. lib. 7. Idem fiet numerus ex primo A 768 in quartum G 1: qui fit ex secundo C 32 in tertium B 24. Sed ex primo A in quartum G, fit ipse primus A, cum G sit vnitas multiplicans. Ergo etiam ex secundo C in tertium B ducto, fiet idem A. Atque ita numerus B 24 metietur numerum A per C. Hoc est, numerus B diuidens A producet quotientem C. qui inuentus est diuiso primùm numero A per D; & rursùs quotiente E per hanc Diuisionem producto, diuiso per F. hac igitur ratione numerus quilibet diuidi potest per Diuisorem compositum; cuius partes adhibeantur eius loco. Quod non solùm verum est, cum duabus tantùm

```
A 768   B 24
    D 6
E 128   F 4
C 32    G 1
```

partibus constat diuisor; sed etiam cum pluribus: eadem enim est ratio. Vt hîc, numerus A diuidi poterit (si per numerum B 24 diuidendus proponatur) per numeros tres 2, 3, 4. Quia hi tres numeri in se ducti generant Diuisorem 24. Quemadmodum autem hi tres numeri quovis ordine inter se multiplicentur idem semper numerus producitur, vt Prop. 32. demonstratum est: ita etiam quovis ordine propositum numerum A diuidant eundem semper quotientem generabunt. Diuide A per B 4, vt habeat quotientem C: quem per numerum D 2 rursum diuidas; orietur E: quo demum per F 3 diuiso producetur quotiens G 32, quem produceret Diuisio eiusdem numeri A per Diuisorem 24 instituta. Permuta horum trium Diuisorum ordinem quo libuerit modo; semper idem quotiens G 32 absolutâ tertia Diuisione obtinebitur. Ratio clara est, quia si conuersâ operatione, quovis ordine multiplicetur quotiens G, & deinceps per singulas multiplicationes producti numeri: absolutis multiplicationibus, numerus A productus fuerit. Ergo G 32 est verus quotiens quovis ordine Diuisorum instituatur Diuisio. Quod idem demonstrari facilè posset ratiocinatione ei simili quam de duobus numeris paulò ante proposui.

A 768	C 192	E 96	G 32
B 4	D 2	F 3	

Industria septima.

Cum Diuisor postremis suis aliquot figuris O constabit: tunc his abscissis, totidémque figuris Diuidendi numeri postremis etiam sepositis, reliquus numerus diuidendus per reliquum Diuisorem diuidetur: sed absolutâ Diuisione, sepositæ illæ diuidendi figuræ, & si quæ aliæ anteriores supersint; erunt reliquus numerus Diuisionis. Ecce diuidendus est numerus A per B. Abscinde ex diuidendo A duas eius postremas figuras 94; & reliquum numerum 478, Diuide per numerum 25: qui est Diuisor B reiectis figuris O. Quotiens huius Diuisionis erit C, & reliqua fiet figura 3: quam duabus figuris 94 reiectis præfigere oportet, id ita eius gradu exigente: atque reliquus fiet post Diuisionem numerus D 394) quo quid fieri debeat exponetur breui.) Ratio huius compendij clara est ex ipsa Diuisionis methodo. Cum enim Diuisor B 2500 promouendus sit, donec vltima eius figura ad vltimam diuidendi figuram peruenerit: tunc autem duæ figuræ 94 Diuidendi respondeant duabus Diuisoris figuris O O; quæ per figuram quotientis multiplicatæ nihil nisi O, hoc est, nihil nisi nihil producunt à superposito numero 94 subtrahendum; ita vt intactæ rema-

A 47894	
B 2500	(C 19
D 394	

integrum Diuiſorem produci debet. Vt ſi numerus A diuidi debeat per B: quotiens C foret 32. Qui idem produceretur eodem numero A diuiſo per D 6; ſi quotiens inde ortus E 128, rursùs diuideretur per F 4, eò quod F 4 ductus in D 6 producat totum diuiſorem B 24. Ratio huius diuiſionis clara eſt ex citato loco. Nam cum multiplicatio & Diuiſio eam ſeruent inter ſe habitudinem, vt altera alterius ſit ſemper conuerſa: ſi vltimus quotiens C 32 ducatur in ſecundum Diuiſorem F 4. Tum ex ea multiplicatione ortus numerus E 128, iterùm multiplicetur per priorem diuiſorem D 6. produci debet numerus A: qui idem produceretur ducto integro Diuiſore B 24, qui ex mutua multiplicatione numerorum 6, & 4 naſcitur; ſi in quotientem C 32 duceretur. Ergo rectè habetur quotiens C 32 ſi poſteriore methodo Diuiſio inſtituatur, quandoquidem numerum A vtrouis modo diuiſum reſtituit, ſi vtrouis modo multiplicetur; hoc eſt, ſiue per Diuiſorem ipſum B 24; ſiue per 4, genitúſque E 128 iterùm per 6. Sed iuuat Demonſtrationem ex ipſis Diuiſionis Principiis petitam afferre: quæ eſt huiuſmodi.

A 768
B 24 (C 32
A 768
D 6 (E 128
F 4 (C 32

Præparetur ſchema numeris, vt hic cernitur, diſpoſitis. Quia Diuiſor D 6 metitur Diuiſum A per E: metitur autem & B 24 per F 4 ex hypotheſi: ſi D multiplicet E & F producet A & B. Ergo per Prop. 15. lib. 7. Elem. ita erit A ad B vt E ad F: & permutando, A ad E; vt B ad F. Rursùs, quia F diuidit E, & producit C, ſiue F metitur E per C; ſeipſum autem metitur per vnitatem G (quilibet enim numerus ſeipſum per vnitatem metitur, ſiue ſeipſum diuidens producit vnitatem per 5 Axi. lib. 7) Ergo F multiplicans C & G producet E & F. Ergo per 15. lib. 7. ita erit E ad F, vt C ad G: & permutando, ita erit E ad C, vt F ad G vnitatem. Quare ex æquo, ita erit A ad C vt B, ad G vnitatem. Ergo per Prop. 19. lib. 7. Idem fiet numerus ex primo A 768 in quartum G 1: qui fit ex ſecundo C 32 in tertium B 24. Sed ex primo A in quartum G, fit ipſe primus A, cum G ſit vnitas multiplicans. Ergo etiam ex ſecundo C in tertium B ducto, fiet idem A. Atque ita numerus B 24 metietur numerum A per C. Hoc eſt, numerus B diuidens A producet quotientem C. qui inuentus eſt diuiſo primùm numero A per D; & rursùs quotiente E per hanc Diuiſionem producto, diuiſo per F. hac igitur ratione numerus quilibet diuidi poteſt per Diuiſorem compoſitum; cuius partes adhibeantur eius loco. Quod non ſolùm verum eſt, cum duabus tantùm

A 768 B 24
D 6
E 128 F 4
C 32 G 1

partibus

partibus constat diuisor; sed etiam cum pluribus? eadem enim est ratio. Vt hîc, numerus A diuidi poterit (si per numerum B 24 diuidendus proponatur) per numeros tres 2, 3, 4. Quia hi tres numeri in se ducti generant Diuisorem 24. Quemadmodum autem hi tres numeri quovis ordine inter se multiplicentur idem semper numerus producitur, vt Prop. 32. demonstratum est: ita etiam quovis ordine propositum numerum A diuidant eundem semper quotientem generabunt. Diuide A per B 4, vt habeat quotientem C: quem per numerum D 2 rursum diuidas; orietur E: quo demum per F 3 diuiso producetur quotiens G 32, quem produceret Diuisio eiusdem numeri A per Diuisorem 24 instituta.

A 768	C 192	E 96	G 32
B 4	D 2	F 3	

Permuta horum trium Diuisorum ordinem quo libuerit modo; semper idem quotiens G 32 absolutâ tertia Diuisione obtinebitur. Ratio clara est, quia si conuersâ operatione, quovis ordine multiplicetur quotiens G, & deinceps per singulas multiplicationes producti numeri: absolutis multiplicationibus, numerus A productus fuerit. Ergo G 32 est verus quotiens quovis ordine Diuisorum instituatur Diuisio. Quod idem demonstrari facilè posset ratiocinatione ei simili quam de duobus numeris paulò ante proposui.

Industria septima.

Cum Diuisor postremis suis aliquot figuris O constabit: tunc his abscissis, totidémque figuris Diuidendi numeri postremis etiam sépositis, reliquus numerus diuidendus per reliquum Diuisorem diuidetur: sed absolutâ Diuisione, sepositæ illæ diuidendi figuræ, & si quæ aliæ anteriores supersint; erunt reliquus numerus Diuisionis. Ecce diuidendus est numerus A per B. Abscinde ex diuidendo A duas eius postremas figuras 94; & reliquum numerum 478, Diuide per numerum 25: qui est Diuisor B reiectis figuris O. Quotiens huius Diuisionis erit C, & reliqua fiet figura 3: quam duabus figuris 94 reiectis præfigere oportet, id ita eius gradu exigente: atque reliquus fiet post Diuisionem numerus D 394) quo quid fieri debeat exponetur breui.) Ratio huius compendij clara est ex ipsa Diuisionis methodo.

A 47894	
B 2500	(C 19
D 394	

Cum enim Diuisor B 2500 promouendus sit, donec vltima eius figura ad vltimam diuidendi figuram peruenerit: tunc autem duæ figuræ 94 Diuidendi respondeant duabus Diuisoris figuris O O; quæ per figuram quotienris multiplicatæ nihil nisi O, hoc est, nihil nisi nihil producunt à superposito numero 94 subtrahendum; ita vt intactæ rema-

integrum Diuisorem produci debet. Vt si numerus A diuidi debeat per B : quotiens C foret 32. Qui idem produceretur eodem numero A diuiso per D 6; si quotiens inde ortus E 128, rursùs diuideretur per F 4, eò quod F 4 ductus in D 6 producat totum diuisorem B 24. Ratio huius diuisionis clara est ex citato loco. Nam cum multiplicatio & Diuisio eam seruent inter se habitudinem, vt altera alterius sit semper conuersa: si vltimus quotiens C 32 ducatur in secundum Diuisorem F 4. Tum ex ea multiplicatione ortus numerus E 128, iterùm multiplicetur per priorem diuisorem D 6. produci debet numerus A : qui idem produceretur ducto integro Diuisore B 24, qui ex mutua multiplicatione numerorum 6, & 4 nascitur; si in quotientem C 32 duceretur. Ergo rectè habetur quotiens C 32 si posteriore methodo Diuisio instituatur, quandoquidem numerum A vtrouis modo diuisum restituit, si vtrouis modo multiplicetur; hoc est, siue per Diuisorem ipsum B 24; siue per 4, genitúsque E 128 iterùm per 6. Sed iuuat Demonstrationem ex ipsis Diuisionis Principiis petitam afferre: quæ est huiusmodi.

A 768
———
B 24 (C 32

A 768
———
D 6 (E 128
F 4 (C 32

Præparetur schema numeris, vt hic cernitur, dispositis. Quia Diuisor D 6 metitur Diuisum A per E : metitur autem & B 24 per F 4 ex hypothesi: si D multiplicet E & F producet A & B. Ergo per Prop. 15. lib. 7 Elem. ita erit A ad B vt E ad F: & permutando, A ad E; vt B ad F. Rursùs, quia F diuidit E, & producit C, siue F metitur E per C; seipsum autem metitur per vnitatem G (quilibet enim numerus seipsum per vnitatem metitur, siue seipsum diuidens producit vnitatem per 5 Axi. lib. 7) Ergo F multiplicans C & G producet E & F. Ergo per 15. lib. 7. ita erit E ad F, vt C ad G: & permutando, ita erit E ad C, vt F ad G vnitatem. Quare ex æquo, ita erit A ad C vt B, ad G vnitatem. Ergo per Prop. 19. lib. 7. Idem fiet numerus ex primo A 768 in quartum G 1: qui fit ex secundo C 32 in tertium B 24. Sed ex primo A in quartum G, fit ipse primus A, cum G sit vnitas multiplicans. Ergo etiam ex secundo C in tertium B ducto, fiet idem A. Atque ita numerus B 24 metietur numerum A per C. Hoc est, numerus B diuidens A producet quotientem C. qui inuentus est diuiso primùm numero A per D; & rursùs quotiente E per hanc Diuisionem producto, diuiso per F. hac igitur ratione numerus quilibet diuidi potest per Diuisorem compositum; cuius partes adhibeantur eius loco. Quod non solùm verum est, cum duabus tantùm

A 768	B 24
D 6	
E 128	F 4
C 32	G 1

partibus

partibus constat diuisor; sed etiam cum pluribus: eadem enim est ratio. Vt hîc, numerus A diuidi poterit (si per numerum B 24 diuidendus proponatur) per numeros tres 2, 3, 4. Quia hi tres numeri in se ducti generant Diuisorem 24. Quemadmodum autem hi tres numeri quovis ordine inter se multiplicentur idem semper numerus producitur, vt Prop. 32. demonstratum est: ita etiam quovis ordine propositum numerum A diuidant eundem semper quotientem generabunt. Diuide A per B 4, vt habeat quotientem C: quem per numerum D 2 rursum diuidas; orietur E: quo demum per F 3 diuiso producetur quotiens G 32, quem produceret Diuisio eiusdem numeri A per Diuisorem 24 instituta.

A 768	C 192	E 96	G 32
B 4	D 2	F 3	

Permuta horum trium Diuisorum ordinem quo libuerit modo; semper idem quotiens G 32 absolutâ tertia Diuisione obtinebitur. Ratio clara est, quia si conuersâ operatione, quovis ordine multiplicetur quotiens G, & deinceps per singulas multiplicationes producti numeri: absolutis multiplicationibus, numerus A productus fuerit. Ergo G 32 est verus quotiens quovis ordine Diuisorum instituatur Diuisio. Quod idem demonstrari facilè posset ratiocinatione ei simili quam de duobus numeris paulò ante proposui.

Industria septima.

Cum Diuisor postremis suis aliquot figuris O constabit: tunc his abscissis, totidémque figuris Diuidendi numeri postremis etiam sépositis, reliquus numerus diuidendus per reliquum Diuisorem diuidetur: sed absolutâ Diuisione, sepositæ illæ diuidendi figuræ, & si quæ aliæ anteriores supersint; erunt reliquus numerus Diuisionis. Ecce diuidendus est numerus A per B. Abscinde ex diuidendo A duas eius postremas figuras 94; & reliquum numerum 478, Diuide per numerum 25: qui est Diuisor B reiectis figuris O. Quotiens huius Diuisionis erit C, & reliqua fiet figura 3: quam duabus figuris 94 reiectis præfigere oportet, id ita eius gradu exigente: atque reliquus fiet post Diuisionem numerus D 394) quo quid fieri debeat exponetur breui.) Ratio huius compendij clara est ex ipsa Diuisionis methodo. Cum enim Diuisor B 2500 promouendus sit, donec vltima eius figura ad vltimam diuidendi figuram peruenerit: tunc autem duæ figuræ 94 Diuidendi respondeant duabus Diuisoris figuris O O; quæ per figuram quotientis multiplicatæ nihil nisi O, hoc est, nihil nisi nihil producunt à superposito numero 94 subtrahendum; ita vt intactæ rema-

A 47894	
B 2500	(C 19
D 394	

integrum Diuiſorem produci debet. Vt ſi numerus A diuidi debeat per B : quotiens C foret 32. Qui idem produceretur eodem numero A diuiſo per D 6; ſi quotiens inde ortus E 128, rursùs diuideretur per F 4, eò quod F 4 ductus in D 6 producat totum diuiſorem B 24. Ratio huius diuiſionis clara eſt ex citato loco. Nam cum multiplicatio & Diuiſio eam ſeruent inter ſe habitudinem, vt altera alterius ſit ſemper conuerſa: ſi vltimus quotiens C 32 ducatur in ſecundum Diuiſorem F 4. Tum ex ea multiplicatione ortus numerus E 128, iterùm multiplicetur per priorem diuiſorem D 6. produci debet numerus A : qui idem produceretur ducto integro Diuiſore B 24, qui ex mutua multiplicatione numerorum 6, & 4 naſcitur; ſi in quotientem C 32 duceretur. Ergo rectè habetur quotiens C 32 ſi poſteriore methodo Diuiſio inſtituatur, quandoquidem numerum A vtrouis modo diuiſum reſtituit, ſi vtrouis modo multiplicetur; hoc eſt, ſiue per Diuiſorem ipſum B 24; ſiue per 4, genitúſque E 128 iterùm per 6. Sed iuuat Demonſtrationem ex ipſis Diuiſionis Principiis petitam afferre : quæ eſt huiuſmodi.

A 768	
B 24	(C 32
A 768	
D 6	(E 128
F 4	(C 32

Præparetur ſchema numeris, vt hîc cernitur, diſpoſitis. Quia Diuiſor D 6 metitur Diuiſum A per E : metitur autem & B 24 per F 4 ex hypotheſi : ſi D multiplicet E & F producet A & B. Ergo per Prop. 15. lib. 7. Elem. ita erit A ad B vt E ad F : & permutando, A ad E; vt B ad F. Rursùs, quia F diuidit E, & producit C, ſiue F metitur E per C; ſeipſum autem metitur per vnitatem G (quilibet enim numerus ſeipſum per vnitatem metitur, ſiue ſeipſum diuidens producit vnitatem per 5 Axi. lib. 7) Ergo F multiplicans C & G producet E & F. Ergo per 15. lib. 7. ita erit E ad F, vt C ad G : & permutando, ita erit E ad C, vt F ad G vnitatem. Quare ex æquo, ita erit A ad C vt B, ad G vnitatem. Ergo per Prop. 19. lib. 7. Idem fiet numerus ex primo A 768 in quartum G 1 : qui fit ex ſecundo C 32 in tertium B 24. Sed ex primo A in quartum G, fit ipſe primus A, cum G ſit vnitas multiplicans. Ergo etiam ex ſecundo C in tertium B ducto, fiet idem A. Atque ita numerus B 24 metietur numerum A per C. Hoc eſt, numerus B diuidens A producet quotientem C. qui inuentus eſt diuiſo primùm numero A per D; & rursùs quotiente E per hanc Diuiſionem producto, diuiſo per F. hac igitur ratione numerus quilibet diuidi poteſt per Diuiſorem compoſitum; cuius partes adhibeantur eius loco. Quod non ſolùm verum eſt, cum duabus tantùm

A 768	B 24
D 6	
E 128	F 4
C 32	G 1

partibus

partibus conſtat diuiſor; ſed etiam cum pluribus? eadem enim eſt ratio. Vt hîc, numerus A diuidi poterit (ſi per numerum B 24 diuidendus proponatur) per numeros tres 2, 3, 4. Quia hi tres numeri in ſe ducti generant Diuiſorem 24. Quemadmodum autem hi tres numeri quovis ordine inter ſe multiplicentur idem ſemper numerus producitur, vt Prop. 32. demonſtratum eſt: ita etiam quovis ordine propoſitum numerum A diuidant eundem ſemper quotientem generabunt. Diuide A per B 4, vt habeat quotientem C: quem per numerum D 2 rurſum diuidas; orietur E: quo demum per F 3 diuiſo producetur quotiens G 32, quem produceret Diuiſio eiuſdem numeri A per Diuiſorem 24 inſtituta. Permuta horum trium Diuiſorum ordinem quo libuerit modo; ſemper idem quotiens G 32 abſolutâ tertia Diuiſione obtinebitur. Ratio clara eſt, quia ſi conuersâ operatione, quovis ordine multiplicetur quotiens G, & deinceps per ſingulas multiplicationes producti numeri: abſolutis multiplicationibus, numerus A productus fuerit. Ergo G 32 eſt verus quotiens quovis ordine Diuiſorum inſtituatur Diuiſio. Quod idem demonſtrari facilè poſſet ratiocinatione ei ſimili quam de duobus numeris paulò ante propoſui.

A 768	C 192	E 96	G 32
B 4	D 2	F 3	

Induſtria ſeptima.

Cum Diuiſor poſtremis ſuis aliquot figuris O conſtabit: tunc his abſciſſis, totidémque figuris Diuidendi numeri poſtremis etiam ſépoſitis, reliquus numerus diuidendus per reliquum Diuiſorem diuidetur: ſed abſolutâ Diuiſione, ſepoſitæ illæ diuidendi figuræ, & ſi quæ aliæ anteriores ſuperſint; erunt reliquus numerus Diuiſionis. Ecce diuidendus eſt numerus A per B. Abſcinde ex diuidendo A duas eius poſtremas figuras 94; & reliquum numerum 478, Diuide per numerum 25: qui eſt Diuiſor B reiectis figuris O. Quotiens huius Diuiſionis erit C, & reliqua fiet figura 3: quam duabus figuris 94 reiectis præfigere oportet, id ita eius gradu exigente: atque reliquus fiet poſt Diuiſionem numerus D 394) quo quid fieri debeat exponetur breui.) Ratio huius compendij clara eſt ex ipſa Diuiſionis methodo. Cum enim Diuiſor B 2500 promouendus ſit, donec vltima eius figura ad vltimam diuidendi figuram peruenerit: tunc autem duæ figuræ 94 Diuidendi reſpondeant duabus Diuiſoris figuris O O; quæ per figuram quotientis multiplicatæ nihil niſi O, hoc eſt, nihil niſi nihil producunt à ſuperpoſito numero 94 ſubtrahendum; ita vt intactæ rema-

A 47894
B 2500 (C 19
D 394

19 ducuntur, duos numeros producunt, qui simul additi æquales sunt per Prop. 1. lib. 2. Elem. vnico numero ex figura 4 in eundem Diuisorem ductâ : & sigillatim ex numero superposito 92 subducti, numerum eundem relinquunt; qui relinquitur subducto ex eodem numero 92, numero, qui ex figura 4 in eundem Diuisorem 19 ductâ generatur.

Obseruabis obiter in huiusmodi numeris, in quibus præuia illa exploratio ad debitam figuram Quotientis eligendam necessaria, tam expedita non est : satiùs fore, vt figura quotientis eligatur iusto potiùs minor, quàm maior : faciliùs enim numeros totius operationis restituit minor quàm maior : vtravis porrò assumatur, ad scopum facile peruenitur; vt anceps hærere diu non debeat logista in eligendo quotientem : vtrouis enim deflectat; hac benè percepta industria in viam absque longiori diuerticulo sese reducere potest : vt ita, quod supra monui, Diuisio nihil plus difficultatis, quàm reliquæ operationes patiatur.

Industria Quinta.

Quam superiùs ad Prop. 38. vbi de multiplicatione agebatur, Industriam attuli quarto loco : huc etiam apprimè facit : & verò in numeris multitudine figurarum numerosiore constantibus diuidendis compendium huic par vix inueniatur. In huiusmodi enim diuisionibus, antequam ad metam perueniatur, fatigatur animus; eúmque non rarò, dum attentiús operi incumbit, præuertit manus, aliósque quàm imperatos characteres exarat : qui opus totum labefactent, eò molestiùs, quò inter tantam multitudinem figurarum latere possunt occultiùs. Quibus incommodis occurrit hæc, quam hîc exponere statui, industria perfacilis: quam minoribus numeris claritatis gratiâ complectar. Tu in maioribus eodem modo vtere. Diuidendus sit numerus A per Diuisorem B construe tabellam Pythagoricam singularem ad Diuisorem B pertinentem, vt hîc constitutam cernis; perpetuâ additione Diuisoris 19 ad se ipsum primò, deinde ad productum 38: tertiò ad 38, vt fiat 57, & sic deinceps: appositis etiam ad læuam vulgaribus notis nouem his productis respondentibus. Quâ sic ad propositum vteris.

A 9217	B 19-C 485
76 ,	1—19
161	2—38
152	3—57
———	4—76
0097	5—95
95	6—114
———	7—133
0002	8—152
	9—171

Numerus 19 Diuisor subscriberetur numero 92. Quære igitur in Tabella proximè minorem numero 92. Is est 76, cui ad læuam respondet figura 4. statue ergo figuram 4 ad quotientem : tum deme 76 à 92, vt reliquus fiat numerus 16.

16 huic numero 16 appone sequentem diuidendi numeri A figuram 1 (sic enim promouetur Diuisor) fiet numerus 161 secundâ operatione diuidendus. Quære ergo in tabella, vel numerum 161, vel proximè minorem. Is est 152: cui præfigitur figura 8, ad quotientem vtique collocanda: dempto autem numero 152 ex 161, remanet 9. Cui adscribenda est diuidendi numeri A figura 7, vt fiat 97 pro sequenti operatione quæsito ergo in tabella numero 97, vel eo proximè minore, qui est 95; figura ei præfixa 5 ad quotientem statuetur; ipse verò demetur à 97, & reliqua fiet figura 2. Atque ita absoluta est Diuisio dati numeri A per Diuisorem B, inuento quotiente C 485; & numero 2, qui post diuisionem superest. Quæ iucundâ operatione, nulla certè animi contentione, aut hæsitatione, in magnis æquè ac in paruis numeris perficiuntur. Ratio verò artificij totius ex ipsa tabellæ constructione pendet. In qua singuli numeri toties continent numerum primum, qui Diuisor supponitur; quoties figura numeris præfixa continet vnitatem. Ergo cum supremus siue ad caput tabellæ positus numerus sit Diuisor. Toties tabellæ numeri, vel eis proximè maiores continebunt Diuisorem, quoties figura quotientis, (cum sit numeris tabellæ præfixa) continet vnitatem. Vt habet Diuisionis definitio. Quamquam enim vario in gradu figuræ illæ numeris præfixæ in tabella, dum ad quotientem statuuntur, reperiantur; cum diuisi in singulis operationibus numeri in iisdem gradibus versentur, nulla sequitur diuersitas in quotientis figuris.

Industria sexta.

Quod compendium Diuisionis hîc sum expositurus; illius conuersum est: quod suprà adduxi industriâ 3. ad multiplicationem iuuandam. Est autem huiusmodi. Cum Diuisor proponitur numerus compositus Prop. 10. definitus: qui scilicet generari potest per mutuam duorum numerorum multiplicationem: qualis est numerus 24, qui producitur duobus numeris 6, & 4, in se ductis. Tunc numerus diuidendus diuidi poterit per alterutrum duorum illorum numerorum, & ortus ex ea diuisione quotiens, rursùs diuidi per numerum alterum: hîc enim quotiens Diuisionis posterioris, ille ipse est; qui Diuiso proposito numero per

integrum Diuiſorem produci debet. Vt ſi numerus A diuidi debeat per B : quotiens C foret 32. Qui idem produceretur eodem numero A diuiſo per D 6; ſi quotiens inde ortus E 128, rurſus diuideretur per F 4, eò quod F 4 ductus in D 6 producat totum diuiſorem B 24. Ratio huius diuiſionis clara eſt ex citato loco. Nam cum multiplicatio & Diuiſio eam ſeruent inter ſe habitudinem, vt altera alterius ſit ſemper conuerſa: ſi vltimus quotiens C 32 ducatur in ſecundum Diuiſorem F 4. Tum ex ea multiplicatione ortus numerus E 128, iterùm multiplicetur per priorem diuiſorem D 6. produci debet numerus A: qui idem produceretur ducto integro Diuiſore B 24, qui ex mutua multiplicatione numerorum 6, & 4 naſcitur; ſi in quotientem C 32 duceretur. Ergo rectè habetur quotiens C 32 ſi poſteriore methodo Diuiſio inſtituatur, quandoquidem numerum A vtrouis modo diuiſum reſtituit, ſi vtrouis modo multiplicetur; hoc eſt, ſiue per Diuiſorem ipſum B 24; ſiue per 4, genitúſque E 128 iterùm per 6. Sed iuuat Demonſtrationem ex ipſis Diuiſionis Principiis petitam afferre: quæ eſt huiuſmodi.

A 768
B 24 (C 32
A 768
D 6 (E 128
F 4 (C 32

Præparetur ſchema numeris, vt hîc cernitur, diſpoſitis. Quia Diuiſor D 6 metitur Diuiſum A per E: metitur autem & B 24 per F 4 ex hypotheſi: ſi D multiplicet E & F producet A & B. Ergo per Prop. 15. lib. 7 Elem. ita erit A ad B vt E ad F: & permutando, A ad E; vt B ad F. Rurſùs, quia F diuidit E, & producit C, ſiue F metitur E per C; ſeipſum autem metitur per vnitatem G (quilibet enim numerus ſeipſum per vnitatem metitur, ſiue ſeipſum diuidens producit vnitatem per 5 Axi. lib. 7) Ergo F multiplicans C & G producet E & F. Ergo per 15. lib. 7. ita erit E ad F, vt C ad G: & permutando, ita erit E ad C, vt F ad G vnitatem. Quare ex æquo, ita erit A ad C vt B, ad G vnitatem. Ergo per Prop. 19. lib. 7. Idem fiet numerus ex primo A 768 in quartum G 1: qui fit ex ſecundo C 32 in tertium B 24. Sed ex primo A in quartum G, fit ipſe primus A, cum G ſit vnitas multiplicans. Ergo etiam ex ſecundo C in tertium B ducto, fiet idem A. Atque ita numerus B 24 metietur numerum A per C. Hoc eſt, numerus B diuidens A producet quotientem C. qui inuentus eſt diuiſo primùm numero A per D; & rurſùs quotiente E per hanc Diuiſionem producto, diuiſo per F. hac igitur ratione numerus quilibet diuidi poteſt per Diuiſorem compoſitum; cuius partes adhibeantur eius loco. Quod non ſolùm verum eſt, cum duabus tantùm

A 768 B 24
D 6
E 128 F 4
C 32 G 1

pattibus

partibus constat diuisor; sed etiam cum pluribus: eadem enim est ratio. Vt hîc, numerus A diuidi poterit (si per numerum B 24 diuidendus proponatur) per numeros tres 2, 3, 4. Quia hi tres numeri in se ducti generant Diuisorem 24. Quemadmodum autem hi tres numeri quovis ordine inter se multiplicentur idem semper numerus producitur, vt Prop. 32. demonstratum est: ita etiam quovis ordine propositum numerum A diuidant eundem semper quotientem generabunt. Diuide A per B 4, vt habeat quotientem C: quem per numerum D 2 rursum diuidas; orietur E: quo demum per F 3 diuiso producetur quotiens G 32, quem produceret Diuisio eiusdem numeri A per Diuisorem 24 instituta. Permuta horum trium Diuisorum ordinem quo libuerit modo; semper idem quotiens G 32 absolutâ tertia Diuisione obtinebitur. Ratio clara est, quia si conuersâ operatione, quovis ordine multiplicetur quotiens G, & deinceps per singulas multiplicationes producti numeri: absolutis multiplicationibus, numerus A productus fuerit. Ergo G 32 est verus quotiens quovis ordine Diuisorum instituatur Diuisio. Quod idem demonstrari facilè posset ratiocinatione ei simili quam de duobus numeris paulò ante proposui.

A 768	C 192	E 96	G 32
B 4	D 2	F 3	

Industria septima.

Cum Diuisor postremis suis aliquot figuris O constabit: tunc his abscissis, totidémque figuris Diuidendi numeri postremis etiam sépositis, reliquus numerus diuidendus per reliquum Diuisorem diuidetur: sed absolutâ Diuisione, sepositæ illæ diuidendi figuræ, & si quæ aliæ anteriores supersint; erunt reliquus numerus Diuisionis. Ecce diuidendus est numerus A per B. Abscinde ex diuidendo A duas eius postremas figuras 94; & reliquum numerum 478, Diuide per numerum 25: qui est Diuisor B reiectis figuris O. Quotiens huius Diuisionis erit C, & reliqua fiet figura 3: quam duabus figuris 94 reiectis præfigere oportet, id ita eius gradu exigente: atque reliquus fiet post Diuisionem numerus D 394) quo quid fieri debeat exponetur breui.) Ratio huius compendij clara est ex ipsa Diuisionis methodo. Cum enim Diuisor B 2500 promouendus sit, donec vltima eius figura ad vltimam diuidendi figuram peruenerit: tunc autem duæ figuræ 94 Diuidendi respondeant duabus Diuisoris figuris O O; quæ per figuram quotientis multiplicatæ nihil nisi O, hoc est, nihil nisi nihil producunt à superposito numero 94 subtrahendum; ita vt intactæ rema-

A 47894	
B 2500	(C 19
D 394	

A 47894	
B 2500 (C 19	
D 394	

neant figuræ huiuſmodi 94. Quid obſtat quin tam hæ 94 à Diuidendo, quàm à Diuiſore figuræ O reiiciantur initio Diuiſionis, vt ab inutili figurarum illatum deſignatione purgetur, breuiórque fiat operatio hinc ſequitur breuiter expediri cuiuſvis numeri Diuiſionem per Diuiſorem figuris aliquot O conſtantem, quibus præfigatur vnitas: cuiuſmodi forent Diuiſores 10, 100 &c. Si enim ex diuidendo tot poſtremæ figuræ tanquam relictæ ſeponantur, quot ſunt in Diuiſore figuræ O, reliquæ illius figuræ erunt quotiens Diuiſionis: abſciſſæ tamen figuræ ſeruari debent, vt reliquus poſt Diuiſionem numerus. Vt, diuidi debet numerus 4782 per 100. Quotiens eſt 47 ſepoſitis eius duabus poſtremis figuris 82, propter duas numeri 100 figuras O. Erit autem numerus 82 reliquus poſt abſolutam Diuiſionem.

Monitum.

Sæpiùs, vt toto hoc de Diuiſione tractatu obſeruari potuit, recurrit mentio, numeri: qui poſt abſolutam Diuiſionem eiúſque ſtatuto quotiente, reliquus fit. Cum enim ſit ipſo Diuiſore minor, qui poſſit in partes Diuiſori æquales ſecari? Diuidendus tamen eſt per eundem Diuiſorem: nec poteſt Diuiſio dati numeri per Diuiſorem datum abſoluta dici: niſi, etiam ad hunc reliquum numerum extendatur. Quid enim, nunquid tanquam nullius momenti negligendus videri debet? At erit interdùm grauiſſimi, nec niſi maximo cum diſpendio contemnatur. Diuidi ergo debet reliquus omnis ille numerus; & quidem per eundem Diuiſorem etſi ipſo maiorem. Quamuis enim ex eo reliquo obuenire quotienti non poſſit vnitas integra: vnitatis tamen in particulas plures diuiſæ, aliquid ad Diuiſorem addi poteſt; vt diuiſio totius numeri abſoluta dicatur. Atque hæc ex fractorum illorum numerorum, ſiue, vt vocant, minutiarum, aut fractionum origo: quorum vſus in Arithmeticis nec minùs frequens, nec minùs neceſſarius eſt, quàm ſimplicium integrorúmque numerorum, de quibus hactenùs quàntum ſatis: vt ad illos in poſterum conuertenda ſit contemplatio; quæ non nihil non poteſt non eſſe implicatior de quâ ſtatim, vbi paucis adhuc de reliquo illo ex Diuiſione numero, quando in ea verſamur, diſſeruero: vt planior ad fractos ex eo profectos acceſſus paretur: qui maximè ex ſequentium Propoſitionum cognitione promouebitur. Quare ſit.

PROP.

PROP. XXXXVII. *Defin.*

Numeri proportionales sunt : cum primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes.

Expositio

Numerus A est, verbi gratiâ, duplus numeri B : numerus autem C duplus est numeri D. erunt hi quatuor numeri proportionales : eò quod primus A ad secundum B eandem habeat rationem; quam habet tertius C ad quartum D. nempe duplam : rationum enim æqualitas illa Proportio; dicitur; vt clarè exposui lib. 1. Examinis Quadraturæ Circuli; vnde numeri eandem rationē seruantes, Proportionales denominantur.

A 4	C 10
B 2	D 5

Similiter, si termini conuertantur, Proportionales erunt B primus ad A secundum, & D tertius ad C quartum : quia primus B est secundi A eadem pars; quæ tertius D, quarti C, nempe dimidia : eadémque est ratio numeri primi B ad secundum A, quæ est tertij D ad quartum C. Rursùs si conferatur A ad C, & B ad D, Proportionales etiam dicentur. Nam primus A est eædem partes secundi C iuxta Prop. 8. (neque enim A metitur C) & tertius B, quarti D; nimirum, duæ quintæ partes. Idem dicendum de numeris aliam quamlibet rationem seruantibus. Consule citati examinis citatum locum.

PROP. XXXXVIII. *Theor.*

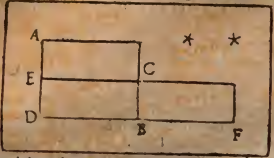
Si plani numeri latitudo ad quempiam numerum eandem rationem habeat : quam alius quidam numerus ad plani huius numeri longitudinem : hi duo numeri adsciti planum numerum æqualem dicto plano continebunt.

Expositio.

Hæc est celebris illa Euclidis Propositio 19. lib. 7. Aliis licet verbis nonnihil diuersis, idem tamen significantibus concepta. Ibi enim demonstrat Geometra. Si quatuor numeri proportionales fuerint, planum ex primo in quartum ducto genitum, æqualem esse numero plano, qui fit ex secundo in tertium ducto. In eo ergo tantùm differt ab hac Propositi-

tio mea:quod vnum ex duobus planis constitutum supponam: cuius lateribus duo alij numeri comparentur. Quod ita à me suppositum ea de causâ fuit: vt aptiùs posset Diuisioni numerorum, in qua versamur, applicari ea Propositio.

Sit ergò planus numerus A B genitus ex latitudine A D in longitudinem D B ductâ iuxta expositionem Propositionis 29. Latitudo verò A D eandem habeat rationem ad numerum quempiam E D: quam alius quidam numerus D F habet ad longitudinem D B positi plani numeri A B.



Dico igitur planum numerum; qui ex noua illa latitudine E D in nouam longitudinem D F ductâ generabitur:qualis est planus numerus E F:æqualem esse posito plano A B

Demonstratio

Planus numerus A B ad planum numerum E B, eandem habet rationem: quam illius basis A D habet ad huius basim E D. Rectè siquidem huiusmodi numeros Geometricis diagrammatibus exprimi declaratum est supra Prop. 29. Sed eadem est ratio numeri D F ad numerum D B, hoc est, longitudinis D F ad longitudinem D B: quæ est ex suppositione, latitudinis A D ad latitudinem E D: Vt autem longitudo D F ad longitudinem D B: ita est planus numerus E F ad planum numerum B E: Ergo ita est planus numerus A B ad planum E B: vt planus numerus E F ad eundem planum E B. Ergo duo plani numeri A B, E F eandem habentes rationem ad planum E B: æquales sunt inter se. Quæ demonstratio cum in omni casu locum habeat, siue maior sit A D, siue minor quam E D: constat veritas propositionis.

PROP. XLIX. *Theor.*

Si duo numeri planum contineant plano duobus aliis numeris contento æqualem: erit vt prioris illius numeri latitudo ad posterioris huius latitudinem: ita huius longitudo, ad illius longitudinem.

Expositio.

Expositio. Hæc propositio præcedentis est conuersa, vt patet. Sit ergo planus numerus A B plano E F æqualis: Dico plani A B latitudinem A D, ad plani E F latitudinem E D, eandem habere rationem: quàm longitudo D F plani E F, habet reciprocè ad longitudinem D B plani A B.

Demonstratio.

Duo plani numeri A B, E F sunt æquales. Ergo planus A B eandem habet rationem ad planum E B: quam ad eundem planum E B habet planus alter E F. Sed vt planus A B ad planum E B: ita est latitudo A D ad latitudinem E D. Ergo planus E F ad planum E B eandem rationem habet; quam latitudo A D, ad latitudinem E D. Sed vt planus E F ad planum E B; ita est longitudo D F, ad longitudinem D B. Ergo ita est latitudo A D ad latitudinem E D; vt reciprocè longitudo D E ad longitudinem D B. Si ergo duo numeri &c. Quod erat probandum.

PROP. L. *Probl.*

Tribus datis numeris, quartum reperire: ad quem tertius eandem habeat rationem: quam primus habet ad secundum.

Expositio & Constructio.

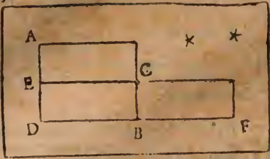
Hæc est aurea illa regula omni commendatione superior. Mathematicæ disciplinæ fundamentum ferè vnicum: vnica eius thesauri clauis, fax splendidissima. Oraculum nulla eludens responsa, nulla nisi apertissima fundens.

Sint ergo tres numeri dati, primus A D, secundus E D: tertius D F. Ducantur in se mutuò secundus E D, & tertius D F: Vt fiat numerus planus E F: qui diuidatur per primum A D; siue ad primum A D applicetur: vt fiat quartus quidam numerus, diuisionis quotiens D B. Dico numerum hunc D B eum esse, qui quæritur, id est, tertium D F eandem rationem habere ad quartum illum D B: quam habet primus A D ad secundum E D

Demonstratio.

Supposita præparatione: quæ rectangulorum A B, E F designatione absoluitur; manifesta euadit problematis solutio. Nam cum planus numerus E F diuidatur per A D: & fiat quotiens D B. Si duo numeri A D D B in se mutuò ducantur: restituent numerum æqualem numero E F. Constituitur autem per multiplicationem numerorum A D, D B planus

numerus.



numerus A B. Ergo duo plani numeri A B, E F sunt æquales. Ergo per Prop. 49. præcedentem. Ita est A D, primus numerus, latitudo plani numeri A B; ad secundum E D, latitudinem plani E F; vt tertius D F, longitudo plani numeri E F, ad quartum numerum D B longitudinem plani A B. Tribus ergo datis numeris; quartum inuenimus; ad quem ita se habet tertius: vt primus ad secundum. Siue tribus datis numeris quartum proportionalem inuenimus. Quod præstandum erat.

Monitum.

Propositioni huic attexanda videretur eius amplissima quæstiones quascunque soluendi facultas; quæ vt diuersissimæ sunt: ita plerúmque diuersam præparationem exigunt: quam reliquæ ex ea tanquam fonte scaturientes regulæ complectuntur. Verùm cum de Canone illo aureo hîc obiter tantùm agi oportuerit ratione solius illius difficultatis, quæ inter diuidendum occurrit, quoties Diuisio nequit esse præcisa: de eo fusior tractatus libro 4. Ex instituto habebitur. Nunc interim ex iis quæ de porportionalibus proximè exposui: propositam difficultatem soluo: & quidquid de numerorum Diuisione dicendum habebam exhaurio hoc Theoremate demonstrato.

PROP. LI. *Theor.*

Numerus, qui absolutá Diuisione reliquus fieri solet; diuiditur per eundem Diuisorem, si ad eum velut ad consequentem rationis referatur tanquam antecedens.

Expositio.

Sit numerus A quicunque, verbi gratiâ, 14, diuidendus per Diuisorem B 3. factâ Diuisione quotiens repertus est C 4. & reliquus superfuit numerus D 2: qui diuidendus superest, diuidique debet per eundem Diuisorem B 3: aliàs nec dum Diuisio absoluta foret. Dico igitur Diuisionem absolui: si

A 14 D 2
——
B 3 (C 4

numerus

numerus ille reliquus D 2 velut antecedens rationis referatur ad Diuisorem B 3 tanquam ad consequentem. Explicatiùs. Si vnitas secetur in tot particulas æquales, quot ipse Diuisor B, vnitates continet, nempe in tres, & totidem ex particulis illis tribus sumantur: quot vnitatibus constat reliquus ille numerus D; nempe duæ: assero Diuisionem reliqui illius numeri D per eundem Diuisorem B absolutam esse. Ita vt quotiens C contineat vnitates quatuor integras, & præterea duas particulas ex tribus, in quas diuidi censetur vna vnitas illarum quatuor, quibus constat quotiens C 4. Ita vt iuxta sensum Propositionis, reliquus post Diuisionem numerus D 2, & diuisor B 3 determinent (quamuis materialiter longè aliud significent) rationem partium vnitatis secandæ, & earum assumendarum. Quod adhuc in sequenti præparatione clariùs proponam.

Præparatio.

Designetur diagramma Geometricum duobus rectangulis constans A C, D R: quæ ambo simul repræsentẽt numerum diuidendum A 14 (planus siquidem est, vt superiùs exposui Prop. 29. Omnis numerus diuidendus) rectangulum autem A C designet numerum: qui præcisè diuiditur per Diuisorem B 3: cuiusmodi est in hoc exemplo numerus 12: alterum autem D R sit numerus D 2, reliquus post diuisionem duobus propterea quadratulis D H, E R constans. Erit ergo A B diuisor 3, & B C quotiens 4. qui scilicet in se ducti comprehendunt planum A C 12 quadratulis constans: quibus si duo reliqua D R accedant totus fit diuidendus numerus 14. Adhæc basis C H quadratuli vnius D H diuidatur in tres particulas æquales, tot scilicet; quot vnitates continet diuisor A B, siue F C, earúmque trium particularum duæ sint C L: ac per L ducantur L G parallela lineæ F C, vt fiat rectangulum F L. Quod continebit duas partes ex tribus in quas diuiditur rectangulũ F H: duo enim rectangula F H, F L ita se habent, vt bases eorum C H, C L per Prop. 1. lib. 6. Elem. his ita positis.



Demonstratio.

Rectangulum F L æquale est rectangulo D R. Nam vt F C partium 3 (est enim diuisor 3) ad C R 2. Ita est C H vna ex duabus partibus C R, ad C L, duas partes continentem ex tribus, in quas diuisa est per constructionem linea C H. Est autem C D æqualis lineæ C H. Ergo vt se habet F C ad C R, ita se habet D C ad C L. Ergo rectangulum F L sub primâ F C, & quartâ C L, æquale est rectangulo D R sub secunda C R, & tertia D C. Per Prop. 48. hinc fit, vt totum rectangulum A L, duobus rectangulis A C, D R numerum 14 diuidendum designantibus æquale, illum eundem numerum 14 designet. Quare si diuidatur A L per diuisorem A B, vel potiùs (vt ad Propositionem 29. exposui) per planum Diuisorem A T: quotiens erit B C 4. & prætereà C L, duas particulas continens lineæ C H, siue vnitatis vnius ex quatuor vnitatibus B C, diuisæ in tres partes, in tot scilicet, quot vnitates continet diuisor A B, siue planus A T. Patet ergo quomodo reliquus numerus D R post diuisionem numeri 14 per numerum A T 3. Rectè diuidatur per eundem diuisorem A T 3. Si numerus 2 designans duas illas reliquas vnitates planas D R, referatur velut antecedens ad numerum 3, vnitates planas A T diuisoris exprimentem velut ad consequentem vno verbo. Reliquus numerus 2, & diuisor 3, exhibent rationem: quam particulæ vnitatis diuisæ (quæ ad quotientem integrum 4 addi debent) ad vnitatem seruant. Quare numerus, qui absolutâ diuisione &c. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

Hinc ergo iam patet euidentissimè. quod hoc in negotio Diuisionis obscuriùs videri, nec primâ fronte concipi promptû erat. Quomodo scilicet peractâ diuisione supersint aliquæ integræ ex diuidendo numero vnitates: (integris enim vnitatibus planis omnis integer numerus diuidendus, vt diuiden



diuidendus, constare concipi debet) & tamen vnitatis particulis quotiens constare dicatur. Vt in proposito exemplo ad materiam, maioris lucis gratia, contracto constat. Quomodo diuisis aureis 14 in tres æquales partes; singulæ aureis 4 constent, & supersint duo aurei integri: quotiens tamen constare dicatur aureis 4, & præterea vnius aurei duabus particulis ex tribus particulis, in quas aureus secatur. Seruatur nimirum ratio; quam numerus 2 aureorum habet ad numerum 3 diuisorem; sed in materiam longè diuersam transfertur. Vt patet ex proxima demonstratione, & ad eam adducto schemate. In quo rectangulum D R duobus Quadratulis constans numerum aureorum duorum, qui peractâ diuisione superfuerunt, aptè repræsentat: & rectangulum F H, siue A T Diuisorem 3 iuxta Propositionem 29. Quorum duorum rectangulorum ratio est eadem cum ratione lineæ C H ad lineam C L (ostensum siquidem est rectangulum F L æquale rectangulo D R: sunt autem rectangula F H, F L inter se; vt inter se sunt eorum bases C H, C L per Propo. 1. lib. 6. Elem.) Est autem C H vnitas vna ex quatuor vnitatibus quotientis B C, vel earum vni æqualis; & C L est vnitatis illius, particulæ duæ. Patet ergo in proposita diuisione numeri 14 aureorum per numerum 3; quomodo ea peracta supersint reliqui duo aurei. Quomodo item ille aureorum numerus 2, depositâ denominatione transferatur ad designandum duas particulas C L vnitatis C H in tres particulas æquales diuisæ. Atque adeo patet quomodo quotiens diuiso plano A L aureorum 14 per diuisorem A T 3, sit tota linea B L constans quatuor vnitatibus B C, & duabus tertiis partibus C L, vnitatis C H.

Corollarium. 2.

Ex dictis constat præterea quotiens numerus minor per maiorem diuidendus est. Vt, si duo aurei D R) quid enim obstat quin duo quadrata D R singula aurei vnius pretio æstimentur?) Siue F L, diuidantur per F H trium vnitatum planarum: Diuisionem absolui sumptâ ratione numeri diuidendi & diuisoris: quæ eadem est cum ratione lineæ C L ad lineam C H, siue ad vnitatem in tres partes diuisam: quarum duas contineat linea C L; ita vt tunc quotiens sit quidem C L; sed cum relatione ad C H, dicatúrque duæ vnius aurei partes, non absolutè, sed duæ partes tertiæ aurei. Vnde fit,

vt fractus quilibet numerus ex duobus componatur: nec nisi vtroque eorum expresso, exprimi ipse possit. Sed de huiusmodi fractis numeris longior tractatio instituenda est toto sequenti libro. Hic vnde nascantur, satis est indicasse.

Finis libri primi Institutionum Arithmeticarum.

LIBER

LIBER SECVNDVS

MINVTIARVM, SIVE FRACTO-rum numerorum contemplationem praxi applicatam complectens

ARGVMENTVM.

LIBRO superiori ea omnia exp'icata videntur: quæ ad discretæ quantitatis illam inter primas facultatem spectant, quâ augeri, quâ minui ipsi conuenit. Augmenti ratio, additione, & (quæ additio compendiosa quædam est) multiplicatione continetur; decrementi verò subtractione, & subtractionis promotrice Diuisione. Ex quibus nullus non deducitur Arithmeticus Epilogismus: nec vlla potest numerorum vel cognitio comparari, vel praxis iniri; nisi horum quatuor beneficio instrumentorum. Etsi verò singulæ quatuor hæ partes Arithmeticæ fusè, quantùm satis, pertractata censeri possint: ea tamen, quæ vltimo loco declarata est, Diuisio, necdum exhausta est: imò materiam subministrat tam amplam, eámque tam nouam, & à traditâ hactenùs tam diuersam, quæque tot difficultatibus, ac tam crebris implicetur: vt tractatu peculiari egeat explicari. Ea est, quam superiùs monui è numero proficisci; qui numero per alterum diuiso relinqui sæpissimè solet, quique fractus eo nomine dici consueuit, quod in particulas vnitatem frangi necesse sit: vt earum aliquot quotienti attributis, totius dati numeri diuisio habeatur absoluta. Nec tantùm, cum numerus integer diuidendus proponitur, qui diuisionem præcisam non admittit, fracti nascuntur huiusmodi numeri; sed etiam quoties numerus quispiam diuidendus est per numerum eo maiorem: tunc enim vnitatem in particulas secare oportet, vt quotiens generetur. Quomodo enim

aliter generari queat cum diuisor in diuidendo ne semel quidem contineatur, nec quotienti possit vnitas integra obuenire? Atque de his tantùm numeris fractis ab omni numero integro absolutis, & liberis, quando de integris cumulatè iam actum est, agetur imposterùm.

Huius porrò generis fractorum numerorum tres celebrantur species diuersæ: de quibus singulis agendum erit. Prima est vulgarium fractorum numerorum, siue communium minutiarum. Secunda ad decadicas fractiones pertinet: quæ etsi à præcedente vix discrepare videatur, & ad eam meritò reuocari possit; quia tamen præstantissimis quibusdam compendiis constat ipsi propriis, esto ab illius Principiis deducantur omnia: ideo peculiari tractatione erit exponenda. Tertia denique, minuta Astronomica contemplatur: siue fractiones Sexagenarias, Astronomis, vnde nomen obtinüere, familiares. Postquam enim sphæræ circulos in ter-centas sexaginta partes, quas gradus vocant, dissecüere; gradum quemlibet in sexaginta particulas rursùs dispertiti sunt: quas minuta prima, siue absolutè, minuta dixêre. Quodlibet deinde minutum in alias item particulas sexaginta diuiserunt. Quæ minuta secunda, siue absolutè, secunda, nominantur. Secundum quodlibet in partes sexaginta diuisum, minuta tertia generat. Tertium, quarta: quartum quinta, & sic deinceps per diuisionem sexagenariam progressu facto. Quamquam calculus ab Abstronomis aliquando vix ineatur adeò præcisus, vt præter tertia, alia contineat minutiora minuta. Quia ergo hæc tanta minutorum diuersitas præcepta non nisi valdè diuersa possit exigere, dum alia cum aliis ad calculum concurrere contingit: ideò eorum singula, id materia tam celebri postulante, conuenit explicare.

Cæterùm cum fractio qualibet non nisi duobus numeris, vt ex superioribus constat, constabitque ex dicendis, exprimi vnquam possit: quorum vnus alteri subiciatur: ex eo illud incommodi in typographicum opus necessariò inuehitur, vt vel paucissimis characteribus Arithmeticis, aut etiam vnico sæpiùs constent versùs, quod operis elegantiam, & speciem labefactat: vel quod maioris est momenti, characteribus adeò minutis numeri illi dúo exprimantur, cum præsertim lineolâ rectâ interpositâ distingui soleant,

leant; quæ & ipsa characteris vnius spatium sibi benedicat; ita vt tres non ampliorem locum quàm vnicam Alphabeticam notam occupare oporteat; vt lectoris oculos fugiat, vel etiam fallat. Cui incommodo duplici facile occurri posse visum est: si numeri huiusmodi fracti seponantur, & in schematismos orationi perpetuò ductu continuatæ appositos redigantur in figuræ modum Mathematicis in rebus notissimum ac consuetum: cuius te monitum volui, ne quid instituti te lateat mei.

PARS PRIMA

MINVTIÆ COMMVNES.

PROP. I. *Definitio.*

Numerus fractus, siue minutia est quotiens diuisionis numeri minoris per maiorem.

Expositio.

CAusalis est hæc fracti numeri definitio: quâ eius ortus, & generatio declaratur: ex qua aliæ aliquot postmodum colligentur. Intelligi verò facilè potest ex his; quæ ad calcem libri superioris obseruaui obiter: quæ hic ex professo tractanda sunt. Ac in primis recolendum occurrit illud; quod aliâs asserui Prop. 39. libri 1. Nimirum quemlibet numerum, qui in diuisionem vocatur, hoc ipso quod diuidendus est, planum censeri debere. Quæritur enim numerus (qui quotiens diuisionis est) qui in diuisorem ductus, datum numerum producat: qui propterea duobus illis numeris, diuisore scilicet, & quotiente, tanquam duobus lateribus contineatur: nec vllum in eo discrimen est inter fractos, & integros numeros: siue enim maior diuidendo numero sit diuisor, siue eodē minor: semper quotiens siue fractus, siue integer, siue integer cum fracto, vnà cum diuisore diuidendum numerum continere dicetur tanquam numerum planum. Quo eodem iure tam diuisor, quàm quotiens, lineares numeri

numeri, vniusque dimensionis, ac primæ speciei quantitatis discretæ, primæ speciei quantitatis continuæ, respondentis censeri, ac supponi debent hoc ipso; quod hi duo numeri in se ducti planum numerum producant: cuius ipsimet latera existant.

Si ergo numerus A 2, per diuisorem ipso maiorem, nempe per B 3 diuisus sit: quotiens erit fractus numerus C, duobus numerus A & B constans, illo superposito, supposito isto, rectâque lineolâ interiectâ. Cuius numeri natura, vt apertissima euadat (quamquam ex iam dictis ignota esse non potest) diagramma

2 A
A 2 B 3 C —
3 B

Geometricum appono: quod rem oculis subiiciat. Esto igitur diuidendus numerus A 2, rectangulum A B, duobus quadratis A D, K B, hoc est, duabus vnitatibus planis constans, duas vnitates diuidendi numeri A 2 repræsentantibus. Diuisor autem B 3, exprimatur rectangulo E D ex tribus vnitatibus planis composito, quæ sunt quadratula tria sibi inuicem applicata. Quilibet enim diuisor ante diuisionem peractam non secùs ac numerus diuidendus planus est, vt lib. 1. Prop. 39. exposui. Quomodo enim diuisor diuidendum numerum qui planus est, metiendi capax foret; nisi ipse planus, eiusdémque speciei censeretur? mensuram siquidem mensurato homogeneam esse necesse est. At, inquies, si planus est diuisor: quomodo numeri diuidendi vnum latus esse potest, vt cum quotiente velut altero latere illum, vt paulò ante asserui comprehendat? Ad hanc obiectionem postmodum patebit responsio: nunc interim ob allatam rationem esto diuisor E D planus sub vnitate C D, & latere C E tres vnitates continente comprehensus. Diuidatur autem vnitas C D linearis in tres partes æquales; quot scilicet vnitates diuisor continet: quarum duæ sunt C F; & per F ducatur F G parallela lateri C E. Erit ergo rectangulum E F duæ partes tertiæ rectanguli totius E D per Prop. 1. lib. 6. Elem. basis enim illius C F, est duæ tertiæ, huius baseos C D. Erit præterea idem rectangulum E F, æquale rectangulo A B, vt ostensum est lib. 1. Prop. 48. eo quod ita sit latus E C 3; ad latus C B 2: vt C D, siue C A, est ad C F. Hoc posito.



Diuisor est E D planus numerus, isque maior, vt supponitur, quam diuidendus; qui planus est numerus E F in locum plani numeri A B ipsi æqualis, substitutus. Quotiens verò quisnam futurus est? certè non alius à numero C F lineari, qui duas particulas ex tribus, in quas vnitas

C

C D item linearis fecatur, continet: huic enim latitudini C F, si applicetur diuidendus planus numerus A B duabus planis vnitatibus, vt dictum est, constans: fiet planus E F, plano diuidendo A B æqualis, vt probatum est: eiúsque longitudo, siue altitudo erit C E, eadem cum longitudine plani numeri E D, qui diuisor est ex tribus planis vnitatibus conflatus, quíque est mensura numeri plani E F, siue ei æqualis A B, excedens quidem mensuratum E F, designans tamen & exprimens eius quantitatem: mensura siquidem quælibet, vt se maiores quantitates sæpiùs repetita exponit, ita etiam exponit seipsâ minores, nec excessum demonstrandi aptior est, quàm defectum.

Ad maiorem totius huius expositionis euidentiam, huc reuoca, quæ lib. 1. Prop. vltimâ declarata sunt: eiúsque diagramma hic rursùs perpende. In eo numerus diuidendus est A L (reuocato numero plano D R in planum F L) Diuisor est A T; qui repetitus quater, latitudinem facit B C, & eius



duæ tertiæ partes F L adiunctæ, duas tertias partes C L, vnitatis C H, aut vnitatis B T addit ad quatuor vnitates B C latitudinis, vt fiat quotiens totus B L constans quatuor vnitatibus B C integris, & partibus duabus C L, vnitatis C H in tres partes diuisæ. Si ergo solus numerus planus D R, siue ei æqualis F L, diuidendus proponatur per Diuisorem eo maiorem A T, siue F H: haud dubium, quin quotientem generet numerum C L linearem: qui casus est ipsissimus, qui hîc habetur. Consule etiam si lubet Propositionem 39 eiusdem libri 1. quæ huc aliquid etiam conferet claritatis.

Ex quibus demùm constet quomodo ex diuisione numeri plani A B minoris per numerum planum E D maiorem, fiat quotiens linearis numerus C F minor vnitate lineari C D: quæ minoritas, vt exprimatur, duos numeros concurrere necesse est: numerum scilicet particularum, in quas secatur vnitas C D; & numerum particularum C F assumptarum. Qui duo numeri in abstracto iidem planè sunt cum numeris Diuisoris E D, & diuidendi E F: quamuis in concreto, & ad res numeratas applicati, sint planè diuersi. Alij enim sunt duo plani numeri, E D 3 diuisor, E F 2 diuiden-

dus: Alij C D 3, vnitas in tres particulas diuisa; & C F 2, duas particulas ex tribus, in quas diuisa est vnitas C D, assumens.

Atque ex his omnibus colligitur fractum numerum rectè definiri: dum dicitur esse quotientem numerum diuisionis; quâ minor numerus per maiorem diuiditur: tunc enim vnitatem frangi, & in particulas secari necesse est, vt aliquot ex eis assumi queant ad quotientem verum constituendum. Atque adeò vt fractus numerus generetur qui non potest non esse quotiens diuisionis, vt ostensum est.

Coroll. 1. Duo numeri sunt omninò necessarij, vt fractus quilibet numerus exprimatur. Ostensum siquidem est, numerum C F duas partes continere, non quascunque & absolutè; sed duas partes ex tribus, in quas vnitas C D diuidi concipitur. Quo fit, vt vnitas C D in partes diuisa, denominator rectè dicatur: numerus verò partium assumptarum, vocetur numerator. Ille enim partes denominat, in quas vnitas diuiditur, vt tres, quatuor, quinque &c. Hic verò numerat, & exponit, quot ex illis partibus assumantur. Si enim vnitas diuidatur in tres partes æquales, ex quibus assumantur duæ; duæ illæ partes denominabuntur, tertiæ. Si ex quinque partibus, in quas secta fuerit vnitas, quatuor sumantur; dicentur hæ, quatuor quintæ. Duo ergo numeri fractum numerum constituunt; quorum vnus dicitur numerator, alter denominator. Hic (si verè fractus est numerus) illo semper maior: neque enim omnes particulas, in quas diuisa est vnitas, quásque denominator exprimit; numerator sibi vendicat: alioqui vnitati, atque adeò integro æqualis foret ille numerus; & integer, non fractus censeretur. Non rarò tamen numerator denominatore maior existit: & quamuis huiusmodi numerus, vt proximè monui, non fractus, sed integer propriè dici debeat: omnes tamen fractorum numerorum facultates sibi vendicat, & eodem, quo fracti, modo tractari, eorúmque legibus subesse potest: eodémque modo cum illis designari. Porro duo numeri ita designātur, vt numerator superponatur, & subiiciatur denominator: vt in appositis exēplis cernere est. Efferatur ergo fractio prima A B, *duæ tertiæ*. Secunda C D, *quatuor septimæ*. Tertia E F, *quindecim trigesimæ secundæ* &c. Nec aliter efferendæ erunt, quæ integro maiores sunt, vt G H efferetur, *decem nonæ*; K L, *viginti quinque duodecimæ &c.*

A 2	C 4	E 15	G 10	K 25	
—	—	— &c.	—	— &c.	
B 3	D 7	F 32	H 9	L 12	

Coroll. 2. Colligitur præterea ex dictis responsio ad obiectionem illam qua impugnabatur assertio, in qua dixi Diuisorem, planum numerum censeri semper debere. Si enim (obiiciebatur) Diuisor planus est numerus. Quomodo quotiens numerus & Diuisor, tanquam duo latera numerum diuidendum; quem planum, vt diuidendus est, necessariò supponi debere

bere declaraui lib. 1. Prop. 39. continebunt? vel, quod idem est, quomodo, si in se quotiens, & diuisor ducantur; diuidendum, qui planus est, producere possunt, vt producere debent: eò quod multiplicatio numerum restituat per Diuisionem dissolutum: producetur enim numerus, non planus; sed solidus ex quotiente in Diuisorem (si planus est) ducto? huic, inquam, obiectioni responsio patet tum ex dictis hîc, tum ex dictis Prop. 51. libri 1. Vbi ostendi eos, qui post diuisionem superesse solent reliqui numeri, etsi iidem materialiter ad quotientem reponantur, longè tamen aliam quantitatem significare ad quotientem positi, quàm cum toti diuidendo numero adhærebant, illiúsque pars censebantur. Tunc enim vnitates planas ad diuidendum pertinentes exprimebant; cum tamen ad quotientem collocati tanquam illius pars, vnitatis linearis particulas tantùm significent. Ecce hoc ipsum in diagrammate superiùs delineato. Di-

2 A
A 2 B 3 C —
3 B

uidendus erat numerus A 2, per diuisorem B 3 maiorem ipso diuidendo A. Diuidendus exprimitur rectangulo A B duabus planis vnitatibus constante. Diuisor verò designatur rectangulo E D tribus constante vnitatibus planis: at quotiens C ex numeris diuidendi A 2, & Diuisoris B 3 in modum fracti compositus, exprimitur linearibus numeris C F, C D: quorum ille est numerator A 2; hic est denominator B 3. At quam longè diuersa est horum numerorum, etsi materialiter idem videantur, significatio? Eodem modo, Diuisor B 3, planus censebatur, tribus planis vnitatibus rectangulum E D componentibus constans. At verò, si cum quotientem C, cuius numeri aliam consecuti sunt significationem; comparetur idem Diuisoris, numerus B 3; aliud etiam, quàm prius, significabit, idémque materialiter tantùm remanebit: designabit enim numerus ille B 3 numero plano E D designando, nuper applicatus, longitudinem E C, tribus vnitatibus linearibus constantem. Vel certè rectangulum E L, cuius basis est ipsa longitudo E C. Sic enim, si iuxta tradita ad Prop. 43. lib. 1. numerus B 3; qui hactenùs Diuisor censebatur, ducatur in quotientem C; cuius numerator est A 2, & denominator B 3, & exprimitur lineis C F, C D, producet numerum diuidendum E F, siue, ei æqualem A B vt constabit ex ratione multiplicationis fractorum Prop. 24. tradenda. Atque ita quotiens multiplicatus à numero Diuisoris E D, materialiter eodem, formaliter autem eodem cum numero plano E L, siue maius iuxta vulga-



rem conceptum, eodem cum numero lineari E C; generabit diuidendum numerum E F, siue A B. Verúmque semper erit quotientem à Diuisore multiplicatum, vel contrà, diuisorem multiplicatum à quotiente restituere numerum diuisum.

PROP. II. *Definit.*

Numerus fractus is est; qui particulis constat aliquot ex iis, in quas diuisa est vnitas.

Expositio.

Hæc est altera fracti numeri Definitio formam ipsam illius exponens: quæ per se clara est. Si ergo vnitas quæpiam vel in abstracto, vel in concreto, vt vnitas A, diuidatur in quolibet partes, vt in tres (quas refert numerus B 3) ex quibus sumantur duæ numero C 2 designatæ: numerus C 2 connotans partium numerum 3, in quas Diuisa est vnitas A, fractus est numerus.

A 1	B 3	C 2
		—
		B 3

Necessaria verò est illa partium connotatio, in quas diuisa est vnitas: alioqui nec fractus numerus constitueretur, nec eius species innotesceret. Quo fit, vt duobus numeris numerus quilibet fractus necessariò constare debeat: vt eius valor exprimatur: quorum vnus multitudinem partium vnitatis diuisæ designet, alter autem, earum partium, quæ assumuntur, multitudinem: eóque nomine hîc dicitur numerator, vt paulò ante iam exposui; ille verò, denominator. Qui semper numeratori subscribitur. Sicut ergo vnitas per continuam sui additionem, numerorum omnium integrorum parens est, & origo; ita etiam fractorum per continuam sui diminutionem: nec secùs fracti in infinitum minui, quàm integri in infinitum augeri possint, media inter vtrósque perstante vnitate. En vtrorúmque vnum aut alterum paradigma. In quo vtróque ab vnitate A media (est enim, vt postea dicetur, etiam vnitas media in secundo ordine) ad dextrâ sunt numeri fracti in infinitum minores: ad læuam verò maiores in infinitum. In illis enim

							A								
	7	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
&c.	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	&c.
	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	

						A					
	7	6	5	4	3	2	2	2	2	2	2	
&c.	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	&c.
	2	2	2	2	2	2	3	4	5	6	7	

cum

cum eadem vnitas in particulas ſemper plures diuidatur: eas deinceps minores eſſe neceſſe eſt. Cum ergo eadem multitudo ſemper ſumatur ad numeratorem conſtituendum: minor ſemper ſumetur ex vnitate, quantitas. Contrà verò ad læuam; quia vnitas in eaſdem partes diuiſa in omnibus perſeuerat: earum verò ſemper plures, dum numeratores ſemper creſcunt, aſſumuntur: maiorem ſemper fieri numerorum huiuſmodi quantitatem neceſſe eſt; ſiue numeri illi, ſint præcisè integri, vt in priori ſerie contingit, ſiue, vt in poſteriore, aliqui integris cum fractis ſimul æquiualeant.

Colligitur porrò ex eadem definitione numeros omnes in modum fractorũ expreſſos, adhibitis ſcilicet numeratore, denominatore in triplici differentia reperiri, vel enim numerator æqualis eſt denominatori, vel maior, vel minor. Si æqualis eſt, vt in fracto A B, numerus ille æqualis eſt vnitati.

A 3	C 3	E 2
B 3	D 2	F 3

Nam cenſetur vnitas (vt indicat denominator B) in tres partes diuidi; quæ omnes, vt numerator A exigit, aſſumuntur: aſſumitur ergo vnitas tota & integra. At ſi numerator denominatore maior eſt, vt in fracto C D cernitur: quia vnitas in duas partes ſecta eſt, quarum tres numerator continet; continet haud dubiè aliquid plus, quàm vnitatem, vnam ſcilicet partem ex duabus, in quas diuiſa eſt vnitas. Contrà verò, cum numerator denominatore minor eſt, vt ſi numerator fuerit E, denominator autem F: fractus numerus ab vnitate deficit, eáque minor eſt: cum vnitatis partes omnes non aſſumat. Ex quibus præterea ſequitur numerum quemlibet ſiue propriè fractum, ſiue impropriè, hoc eſt, ſiue vnitate minorem ſiue maiorẽ: alio quolibet fracto eiuſdem denominationis cum ipſo, eſſe maiorem, ſi maiore gaudeat numeratore. Vno verbo inter cuiuſcúmque generis fractos, ſiue vnitate fuerint maiores, ſiue minores: quorum idem eſt denominator, illi ſunt maiores; quorum numerator maior eſt. Ratio aperta eſt, plures enim partes aſſumunt vnitatis, ex iis, in quas diuiſa eſt, numeratores maiores, quàm minores: atque adeò illi numeri maiores ſunt quàm iſti.

PROP. III *Theor.*

Idem numerus duos vel plures numeros multiplicans numeros producit eandem habentes rationem, quàm numeri multiplicati.

Expoſitio.

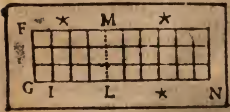
Hæc Propoſitio eadem eſt cum Euclidis Propoſitione 17. lib. 7. aliter

tamen hîc demonstranda longè planiùs, ex continua quantitate, probatione iuxta methodum à me vsurpari solitam petitâ. Numerus ergo A in duos numeros B & C ductus produxerit duos numeros D & E. dico duos numeros D & E eandem habere rationem inter se, quam inter se habent numeri B & C.

Præparatio.

A 3	B 4	C 6
	D 12	E 18

Numerus A multiplicans designetur rectâ lineâ F G, vel, si mauis, rectangulo F I ex tribus planis vnitatibus conflato: duo autem multiplicandi B & C exprimantur lineis G L, L M in rectam lineam compositis. Ergo duo numeri ex multiplicatione numerorum B & C per numerum A producti, erunt duo plani numeri F L, M N.



Demonstratio.

Quid porrò euidentiùs, quàm duos numeros planos F L, M N: quorum eadem est altitudo G F, numerus scilicet A multiplicans; eandem habere rationem inter se, quam eorum bases G L, L N, siue multiplicati muneri B, C, habent inter se per Prop. 1. lib. 6. Elem. Quare idem numerus duos, aut plures numeros (eadem enim est plurium ac duorum ratio) multiplicans, numeros producit eiusdem inter se rationis cum ratione multiplicatorum inter se. Quod probandum erat.

PROP. IV. *Theor.*

Si duo vel plures numeri per eundem numerum diuidantur: numeri producentur eandem rationem habentes inter se, quam inter se habent numeri diuisi.

Expositio.

A 3	B 4	C 6
	D 14	E 18

Resumatur idem schema duo numeri D & E per eundem numerum A diuidantur: & ex ea Diuisione producantur quotientes B & C. Dico B & C eandem habere rationem inter se: quam habent diuisi numeri D & E.

Præparatio.

Præparatio.



Quandoquidem duo numeri D & E diuiduntur: plani supponuntur numeri iuxta declarata Prop. 39. lib. 1. Et quia per eundem numerum A diuiduntur: eorum planorum numerorum latus vnum æquale erit: nempe Diuisor A. Illud ergo latus vnius quidem numeri, nempe D per rectangulum F L designati, sit recta F G: alterius autem numeri E, quem rectangulum M N exhibet, latus priori F G æquale, sit M L. Si igitur planus numerus F L diuidatur per numerum, F G; nascetur latitudo G L: si autem diuidatur planus M N per eundem numerum F G, vel per æqualem M L; producetur latitudo L M. Ostendi ergo debet latitudinem G L, ita se habere ad latitudinem L M, siue quotientem B ad quotientem C; vt se habet planus numerus F L, ad planum numerum M N, hoc est, vt diuisus numerus D ad diuisum numerum E.

Demonstratio.

Quia duorum rectangulorum F L, M N eadem est altitudo: vt se habent inter se rectangula, ita se habebunt bases G L, L N per conuersam Propositionis 1. lib. 6. Elem. hoc est, numeri B & C ex diuisione producti. Eadémque est plurium, quæ duorum ratio. Quare. Si duo vel plures numeri &c. Quod erat probandum.

PROP. V. *Theor.*

Fractiones omnes, quarum numeratores eandem seruant ad denominatores rationem, æquales sunt inter se.

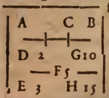
A 2	C 4
B 3	D 6

Expositio. Sint duæ fractiones (plurium eadem foret ratio) A B, C D: terminis diuersis expressæ: ita tamen, vt quam rationem habet numerator A ad suum denominatorem B; eandem habeat ad suum denominatorem D, numerator C. Dico fractos illos numeros esse æquales.

Demonstratio

Demonstratio.

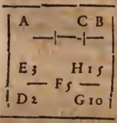
Eadem est ratio A ad B, quæ est C ad D ex hypothesi. Ergo per Prop. 47. libri superioris, vel per Definit. 20. lib. 7. Elem. eadem pars est, vel eædem partes numerus A, numeri B (has fractiones suppono, vt propriè dictas; quarum scilicet numeratores A & C, minores sunt denominatoribus B & D) quæ pars, vel quæ partes numeri D, est numerus C. Sed si duarum vnitatum eiusdem quantitatis in quotcúnque partes sectarum eadem pars, vel eædem partes sumantur; vt fiant minutiarum numeratores, quarum denominatores sunt vnitates diuisæ; minutiæ illæ, siue fracti numeri sunt æquales. Ergo si numeratores ad suos denominatores eandem habeant rationem: æquales sunt fracti numeri ex illis numeratoribus, & denominatoribus constituti. Assumptum hoc declaratur, & probatur. Sumatur vnitas in concreto, siue denominata, aut numerata. Verbi gratiâ, linea A B, cuius longitudo sit trium passuum: ex quibus



sumantur passus duo A C, quorum numerus D 2 fiat numerator fractionis: cuius denominator sit numerus E 3, numerus scilicet passuum in linea A B contentorum. Iam quia passus quilibet Geometricis quinque pedibus constat: multiplicetur tam numerator D quàm denominator E per eundem numerum F 5: & producantur duo numeri G 10 & H 15, ex quibus terminis fractus G H constituitur: cuius numerator G eandem rationem habet ad denominatorem H, quàm fracti D E, numerator D ad denominatorem E per Prop. 3. libri huius (numerus enim F ductus in D & E produxit G & H.) Eadem ergo pars est, aut partes numerator G, denominatoris H, quæ pars est aut partes numerator D, denominatoris E. Cum ergo vterque denominator E & H eandem vnitatem A B in partes diuersi generis sectam designent: vterque etiam numerator D & G eandem eiusdem vnitatis A B partem A C designabunt. Et verò dum F pedum numerus in passu contentorum multiplicat D, passus duos lineæ A B parte A C designatos; ipsos perinde in numerum G pedum 10 reducit, ac reducit passûs 3, quos tota linea A B continet, in numerum H 15 pedum, dum multiplicat numerum E 3. Ita vt eadem quantitas A C sumatur ex vnitate A B, siue numero passuum, siue pedum exprimatur. Nec alia ratio foret, si eadem vnitas A B, eiúsque pars A C in alias particulas, vt in palmos, aut pollices, vel alias quascúnque reducerentur per multiplicationem ipsarum, & vnius cuiusvis numeri: per quam duo partium numeri producti, eandem rationem semper obseruarent per citatam Prop. 3. quam obseruant termini fractionis D E, aut A C, A B. Atque ita

æqualis

æqualis valoris fractiones illæ semper erunt: quarum numeratores ad denominatores eandem rationem obseruabunt. Quod etsi conclusum videatur de fractis propriè dictis, hoc est, de fractis vnitate minoribus; quorum numerator denominatore minor est, nullâ numerorū vnitate maiorum factâ mentione; qui in fractionis modum exprimuntur, & fracti dicuntur impropriè, eadem tamen ratiocinatione, eisdémque è Principiis petitâ, de iis etiam concludi potest. Inuertantur Paradigmatis superioris termini. Sit nimirum linea A B passuum trium, numerator fractionis, eiúsque denominator, lineæ A B pars A C passuum duorum: ita vt A C censeatur vnitas in duas partes diuisa: quarum tres contineat tota A B. Cuius loco substituatur fractio E D inuersis terminis fractionis prioris: sit nimirum E numerator, qui priús fuerat denominator, & D esto denominator. Si ergo fractiones E D, termini ducantur in numerum F



5: fiet fractio H G: cuius termini erunt proportionales terminis E & D, prioris fractionis per Prop. 3. vel Prop. 18. lib. 7. Elem. Lineáque A B, quæ tres passus numeratore E 3 expressos continebat; Pedes 15, quos exprimit numerator H 15 nouæ fractionis, continebit: sicut eiusdem lineæ pars A C duorum prius passuum; nunc pedum 10 futura est, denominatore D 2 in denominatorem G 10 conuerso. Quibus positis. Fractiones duæ E D, H G, quarum numeratores E & H, ad suos denominatores D & G, eandem habent rationem; eiusdem erunt valoris, hoc est, æquales erunt: easdem enim lineas duas A B, A C, ambæ repræsentant: easdémque repræsentabunt fractiones quæcúnque ortæ ex multiplicatione fractionis E D per vnum eundémque numerum quemcunque; eadem enim omnium erit ratio. Ergo fractiones quælibet siue vnitate maiores, & impropriè dictæ; siue propriè dictæ, & vnitate minores: quarum singularum numeratores ad denominatores suos eandem rationem habent: æquales sunt inter se. Quod erat ostendendum.

Corollarium.

Tam magni, quàm quæ maximi momenti hæc Propositio censeri debet. Ecce enim eâ stabilitâ nihil de rationibus & earum proportionibus asseri demonstraríque potest: quin idem fractis numeris conueniat: sicut vicissim rationibus apprimè congruet: quidquid fractionibus congruere fuerit ostensum eò vsque vt si nominatoris, & denominatoris voces; quibus fractionum termini explicantur, in voces commutaueris antecedentis, & consequentis; quæ ad rationes exponendas vsurpari solent: eadem planè sit rationum, & fractionum Doctrina, & vtrásque tractandi mo-

dus. Ex quo quantùm lucis mutuæ, vtrique ſatis alioqui obſcuræ acceſſurum ſit; vel ex iis colligi poſſit, quæ libro. 1. Examinis quadraturæ Circuli de rationibus expoſui, aut quæ de fractionibus hîc allatutus ſum.

PROP. VI. *Defin.*

Multiplicatio fractionis per fractionem eſt inueſtigatio fractionis: quæ in multiplicata ita contineatur; vt fractio multiplicans in vnitate continetur.

Vel multiplicatio fractionis per fractionem eſt inueſtigatio fractionis, ad quam ita ſe habeat multiplicata, vt ſe habet multiplicans ad vnitatem.

Expoſitio.

Duplex hæc fractorum multiplicationis Definitio, etſi verbis paulò diuerſis conſtet, eodem tamen ſenſu conſtat. Si enim ea fractio, quæ per multiplicationem inueſtigatur, quæque per multiplicationem producitur, ita contineatur, iuxta priorem definitionem, in fractione multiplicatâ; vt fractio multiplicans continetur in vnitate: ea erit eadem pars, vel eædem partes, multiplicatæ: quæ pars eſt, vel quæ partes vnitatis, fractio multiplicans. Quod idem eſt per Prop. 47. lib. 1. ac ſi dicatur iuxta poſteriorem Definitionem, fractio inueſtigatur ad quam fractio multiplicata eandem habeat rationem; quam fractio multiplicans habet ad vnitatem. Vtraque porro ei Definitioni per ſimilis eſt, quam lib. 1. Prop. 28. attuli, multiplicationis integrorum; ita vt eadem Definitio numeris tam integris quã fractis communis tradi poſſit; & quidem verbis planè iiſdem; quibus hîc effertur Definitio ſecunda: quamquam enim in integrorum multiplicatione, multiplicatus ad productum per multiplicationem, & vnitas ad multiplicantem, rationem habeant minoris inæqualitatis, cum antecedentes conſequentibus ſint minores: contrà quam fiat in numeris fractis: in quibus antecedentes rationum termini, qui ſunt vnitas, & fractio multiplicata terminis conſequentibus, fractione ſcilicet multiplicante, & fractione per multiplicationem productâ maiores ſemper exiſtunt. Quod cum paradoxi ſpeciem præ ſe ferat (quis enim primâ fronte aſſentiatur quantitatem gigni poſſe per multiplicationem duarum quantitatum, vtrauis quantitate multiplicatâ minorem?) paulò apertiùs exponendum eſt: præſertim cum eadem ad fractorum diuiſionem concipiendam non mediocriter profutura ſint.

Proponantur

Proponantur ergo fractiones duæ A B , C D : quarum illa vocetur multiplicans, hæc multiplicata. Earum multiplicatio dicetur, Inuestigatio numeri cuiusdam fracti (quæ quomodo instituatur suo loco tradetur Prop. 24. hîc tantùm definimus, non problema proponimus) qui sit interim E F : ad quem fractio C D, multiplicata eandem habeat rationem: quam habet vnitas G H (quam exprimo per modum fractionis G H, cuius numerator, vt & denominator sit 6, æqualis denominatori B, fractionis multiplicantis A B : sic enim vnitas per terminos quoscunque æquales designari potest, vt Prop. 2. docui) ad fractionem A B multiplicantem.

G 6	A 5	C 3	E 15
—	—	—	—
H 6	B 6	D 4	F 24

Quia igitur vnitas G H maior est fractione A B multiplicante: ergo maior etiam erit fractio C D multiplicata, quàm fractio E F ex multiplicatione producta per Prop. 14. lib. 5. Elem. Quod si multiplicans fractus A B, æqualis foret vnitati : cuius scilicet numerator æqualis esset denominatori, æqualis etiam foret fractio E F ex multiplicatione genita fractioni multiplicatæ C D, vt schema prius. Etsi si, vt schema posterius refert, multiplicans fractio A B maior sit vnitate G H, numeratore maiore, quam sit denominator, existente: maior etiam erit fractio E F (quam fractio A B, multiplicans fractionem C D, producit) fractione C D multiplicatâ per eandem citatam Prop. 14. lib. 5. Elem. ex quibus patet per multiplicationem fractionis alicuius generari posse fractionem non tantùm maiorem multiplicatâ; sed etiam æqualem, & minorem; prout multiplicans aut maior vnitate, aut vnitati æqualis, aut eadem minor fuerit. Quod expositionis tantùm gratiâ, hîc allatum, clarissimè ostendetur; vbi multiplicationis fractorum problema soluetur scilicet Prop. 24. in scholio.

A 6	C 3	E 18
—	—	—
B 6	D 4	F 24

G 6	A 7	C 3	E 21
—	—	—	—
H 6	B 6	D 4	F 24

PROP. VII. *Defin.*

Diuisio fractionis per fractionem est Inuestigatio fractionis: quæ ita se habeat ad vnitatem, vt fractio diuisa se habet ad diuidentem.

Expositio.

Ex præcedentis Propositionis declaratione hæc euadit clarissima, vt pote illi, velut in integris numeris, planè opposita. Repetitis superioribus exé-

E 15	A 5	C 3	G 6
F 24	B 6	D 4	H 6

plis Si diuidatur fractus E F per fractum A B; habebitur fractus C D; qui ad vnitatem G H habeat eandem rationem: quam diuisus E F habet ad diuidentem A B, & permutando. Ita sit Diuisus E F, ad productum C D per diuisionem: vt Diuisor A B ad vnitatem G H. Quare si Diuisor A B minor sit vnitate G H, vt in primo exemplo; minor etiam esse colligitur diuisus E F, numero C D per diuisionem producto. Quod paradoxum exponetur apertissimè ad Propositionem 25. in scholio vbi diuisionis modus tradetur. Si autem Diuisor A B maior sit vnitate G H, aut ei æqualis, vt in duobus exemplis posterioribus, maior etiam erit Diuisus E F, producto C D per diuisionem; aut ei æqualis per Prop. 14. lib. 5. Elem. Quæ hîc allata ad has maximi momenti definitiones explicandas, clariùs percipientur; vbi suo loco accesserint eorum demonstrationes, ad Propositiones scilicet 24. & 25. ad quas sequentibus Propositionibus patandus est aditus

PROP. VIII. *Theor.*

Numerus integer numerum fractum multiplicans; numerum fractum producit: cuius numerator est numerus productus ex multiplicatione numeri illius integri, & numeratoris fractionis multiplicatæ; denominator autem est eiusdem multiplicatæ fractionis denominator immutatus.

Expositio.

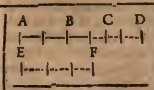
Fractio quævis A B multiplicetur per numerum integrum E. Dico fractionem produci C D: cuius numerator C est numerus ex numero E in numeratorem A ducto genitus: Denominator autem D est idem denominator B fractionis multiplicatæ A B.

Demonstratio.

Euidens est huius Propositionis ratio: si attendatur fractionum valorem non ex quantitate denominatoris; sed ex quantitate numeratoris censeri debere. Denominatoris enim munus illud tantùm est, vt partium, in quas totum diuisum est, multitudinem exprimat, ac denominet. At verò numerator indicat, quot ex illis partibus sumantur,

A 2		C 6
	E 3	
B 3		D 3

tur, ex quo fracti numeri quantitas pendet: maior enim erit, vel minor; prout plures, vel pauciores partes ſumentur ad numeratorem ſtatuendum ipſo immutato denominatore. Cum itaque numerus integer E 3, multiplicat fractionem A B, hoc eſt, duas tertias partes vnitatis; toties ſumi debent duæ illæ tertiæ partes vnitatis: quot ſunt in multiplicante E 3 vnitates, hoc eſt, ter: ita vt ſumantur ſex tertiæ partes vnitatis, vt habet fractio C D. Quod idem in quantitate continua manifeſtum eſt. Si enim A B ſit duæ partes tertiæ, lineæ E F: & A B ter ſumatur, hoc eſt, multiplicetur per 3; vt fiat tota A D, ſex partium tertiarum lineæ E F; conſtat hanc multiplicationem abſolui immutato denominatore E F quare. Si numerus integer &c. Quod erat oſtendendum.



PROP. IX. *Theor.*

Si fractio quælibet per denominatorem ſuum tanquam per numerum abſolutum multiplicetur: producitur eius numerator tanquam numerus abſolutus & integer.

Expoſitio.

Sit fractio quælibet, cuius numerator ſit A, & denominator B. Hæc autem fractio multiplicetur per denominatorem B, vt abſolutus eſt, & integer numerus ex tribus vnitatibus compoſitus. Dico per huiuſmodi multiplicationem produci numerum abſolutum & integrum tot vnitatibus conſtantem, quot conſtat numerator A, vt abſolutus, & integer, vt in hoc exemplo, duabus.

A 2	C 6
B 3	D 3

Demonſtratio.

Conſtituatur fractio, aut quaſi fractio E F: cuius numerator E, ſit fractionis A B denominator, qui in ipſam ducitur: denominator autem ſit F vnitas, ita vt hæc fractio E F ſit numerus integer tribus vnitatibus

A 2	E 3	C 6
B 3	F 1	D 3

constans vt ex dictis Prop. 2. patet. Quia igitur numerus absolutus B 3, hoc est, E multiplicat fractionem A B & producit fractionem C D: cuius numerator C est numerus productus ex multiplicatione numeratoris A per numerum absolutum E, per proximè antecedentem Propositionem 8. Denominator autem D, idem est cum denominatore B, fractionis A B multiplicatæ: qui produci censetur, si vnitas F multiplicetur per B, vel E (quilibet enim numerus multiplicans vnitatem seipsum producit.) Ergo numerus E multiplicans duos numeros A & F producit duos numeros C, D: qui per Prop. 3. libri huius, eandem habent inter se rationem quam habent numeri duo A & F multiplicati. Sed per Prop. 5. libri huius, numeri eandem habentes rationem fractiones constituunt æquales. Ergo fractio C D æqualis est fractioni: cuius numerator foret A, & denominator F. Sed hæc fractio ex numeratore A, & denominatore F constituta; æqualis est numero absoluto A. Vnitas enim, quæ denominator est huiusmodi fractionis, numeratorem diuidens, ipsum non immutat. Ergo etiam fractio C D, æqualis est eidem numero absoluto A. Quare si fractio quælibet per denominatorem &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. X. *Theor.*

Quarum fractionum idem est denominator: eæ rationem eandem habent inter se; quam habent inter se numeratores.

Expositio.

A 2	C 3
B 5	D 5

Sint duæ fractiones A B, C D: quarum denominatores B & D sunt æquales. Dico fractionem A B ad fractionem C D eam habere rationem: quam illius numerator A habet ad huius denominatorem C.

Demonstratio.

Denominator B multiplicans fractionem A B, generat absolutum & integrum numerum A per Prop. 9. præcedentem: per quam eandem denominator D multiplicans fractionem suam C D, generat absolutum & integrum numerum C. Idem ergo numerus B, vel D (sunt enim hi duo denominatores æquales ex hypothesi) multiplicans duas fractiones A B, C D, & producens duos numeros absolutos A & B; eos producit in eadem

dem ratione; quam habent inter se fractiones A B, C D per Prop. 3. libri huius. Ergo earum fractionum, quarum idem est denominator, eadem est ratio: quæ est numeratorum A, C. Quod erat probandum.

PROP. XI. *Theor.*

Ratio fractionum, quarum idem est numerator, eadem est cum ratione denominatorum reciprocè.

Expositio.

Fractionum duarum A B, C D numeratores A & C sint iidem. Dico fractionis A B ad fractionem C D rationem, eandem esse, cum ratione denominatoris D fractionis C D ad denominatorem B, fractionis A B; ita vt termini harum rationum reciprocè sumantur.

Demonstratio.

Denominator B in suam ductus fractionem A B, producit absolutum, & integrum numerum A per Prop. 9. huius: per quam etiam denominator D ductus in fractionem C D, producit numerum integrum & absolutum C. Æqualem ex hypothesi numero A. Cum ergo numerus B ductus in fractum A B producat numerum A æqualem numero C: qui producitur ex numero D in fractum C D ducto: numerus B primus ita erit ad secundum D; vt tertius C D fractus, ad quartum A B fractum per Prop. 49. libri 1. Patet ergo fractionem C D ita se habere ad fractionem A B; vt reciprocè fractionis A B denominator B, se habet ad fractionis C D denominatorem D. Quare ratio fractionum, quarum idem est &c. Quod erat probandum.

A 5	C 5
B 10	D 15

PROP. XII. *Theor.*

Fractio quælibet ad vnitatem, siue ad totum, cuius est fractio; ita se habet vt fractionis eiusdem numerator se habet ad denominatorem.

Expositio.

A 2	E 3	C 6
B 3	F 1	D 3

constans vt ex dictis Prop. 2. patet. Quia igitur numerus absolutus B 3, hoc est, E multiplicat fractionem A B & producit fractionem C D: cuius numerator C est numerus productus ex multiplicatione numeratoris A per numerum absolutum E, per proximè antecedentem Propositionem 8. Denominator autem D, idem est cum denominatore B, fractionis A B multiplicatæ: qui produci censetur, si vnitas F multiplicetur per B, vel E (quilibet enim numerus multiplicans vnitatem seipsum producit.) Ergo numerus E multiplicans duos numeros A & F producit duos numeros C, D: qui per Prop. 3. libri huius, eandem habent inter se rationem quam habent numeri duo A & F multiplicati. Sed per Prop. 5. libri huius, numeri eandem habentes rationem fractiones constituunt æquales. Ergo fractio C D æqualis est fractioni: cuius numerator foret A, & denominator F. Sed hæc fractio ex numeratore A, & denominatore F constituta; æqualis est numero absoluto A. Vnitas enim, quæ denominator est huiusmodi fractionis, numeratorem diuidens, ipsum non immutat. Ergo etiam fractio C D, æqualis est eidem numero absoluto A. Quare si fractio quælibet per denominatorem &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. X. *Theor.*

Quarum fractionum idem est denominator: eæ rationem eandem habent inter se; quam habent inter se numeratores.

Expositio.

A 2	C 3
B 5	D 5

Sint duæ fractiones A B, C D: quarum denominatores B & D sunt æquales. Dico fractionem A B ad fractionem C D eam habere rationem: quam illius numerator A habet ad huius denominatorem C.

Demonstratio.

Denominator B multiplicans fractionem A B, generat absolutum & integrum numerum A per Prop. 9. præcedentem: per quam eandem denominator D multiplicans fractionem suam C D, generat absolutum & integrum numerum C. Idem ergo numerus B, vel D (sunt enim hi duo denominatores æquales ex hypothesi) multiplicans duas fractiones A B, C D, & producens duos numeros absolutos A & B; eos producit in eadem

dem ratione; quam habent inter se fractiones A B, C D per Prop. 3. libri huius. Ergo earum fractionum, quarum idem est denominator, eadem est ratio: quæ est numeratorum A, C. Quod erat probandum.

PROP. XI. *Theor.*

Ratio fractionum, quarum idem est numerator, eadem est cum ratione denominatorum reciprocè.

Expositio.

Fractionum duarum A B, C D numeratores A & C sint iidem. Dico fractionis A B ad fractionem C D rationem, eandem esse, cum ratione denominatoris D fractionis C D ad denominatorem B, fractionis A B; ita vt termini harum rationum reciprocè sumantur.

Demonstratio.

Denominator B in suam ductus fractionem A B, producit absolutum, & integrum numerum A per Prop. 9. huius: per quam etiam denominator D ductus in fractionem C D, producit numerum integrum & absolutum C. Æqualem ex hypothesi numero A. Cum ergo numerus B ductus in fractum A B producat numerum A æqualem numero C: qui producitur ex numero D in fractum C D ducto: numerus B primus ita erit ad secundum D; vt tertius C D fractus, ad quartum A B fractum per Prop. 49. libri 1. Patet ergo fractionem C D ita se habere ad fractionem A B; vt reciprocè fractionis A B denominator B, se habet ad fractionis C D denominatorem D. Quare ratio fractionum, quarum idem est &c. Quod erat probandum.

$$\frac{A\ 5}{B\ 10} \qquad \frac{C\ 5}{D\ 15}$$

PROP. XII. *Theor.*

Fractio quælibet ad vnitatem, siue ad totum, cuius est fractio; ita se habet vt fractionis eiusdem numerator se habet ad denominatorem.

Expositio.

A 2	E 3	C 6
B 3	F 1	D 3

constans vt ex dictis Prop. 2. patet. Quia igitur numerus absolutus B 3, hoc est, E multiplicat fractionem A B & producit fractionem C D: cuius numerator C est numerus productus ex multiplicatione numeratoris A per numerum absolutum E, per proximè antecedentem Propositionem 8. Denominator autem D, idem est cum denominatore B, fractionis A B multiplicatæ: qui produci censetur, si vnitas F multiplicetur per B, vel E (quilibet enim numerus multiplicans vnitatem seipsum producit.) Ergo numerus E multiplicans duos numeros A & F producit duos numeros C, D: qui per Prop. 3. libri huius, eandem habent inter se rationem quam habent numeri duo A & F multiplicati. Sed per Prop. 5. libri huius, numeri eandem habentes rationem fractiones constituunt æquales. Ergo fractio C D æqualis est fractioni: cuius numerator foret A, & denominator F. Sed hæc fractio ex numeratore A, & denominatore F constituta; æqualis est numero absoluto A. Vnitas enim, quæ denominator est huiusmodi fractionis, numeratorem diuidens, ipsum non immutat. Ergo etiam fractio C D, æqualis est eidem numero absoluto A. Quare si fractio quælibet per denominatorem &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. X. *Theor.*

Quarum fractionum idem est denominator: eæ rationem eandem habent inter se; quam habent inter se numeratores.

Expositio.

A 2	C 3
B 5	D 5

Sint duæ fractiones A B, C D: quarum denominatores B & D sunt æquales. Dico fractionem A B ad fractionem C D eam habere rationem: quam illius numerator A habet ad huius denominatorem C.

Demonstratio.

Denominator B multiplicans fractionem A B, generat absolutum & integrum numerum A per Prop. 9. præcedentem: per quam eandem denominator D multiplicans fractionem suam C D, generat absolutum & integrum numerum C. Idem ergo numerus B, vel D (sunt enim hi duo denominatores æquales ex hypothesi) multiplicans duas fractiones A B, C D, & producens duos numeros absolutos A & B; eos producit in eadem

dem ratione; quam habent inter se fractiones A B, C D per Prop. 3. libri huius. Ergo earum fractionum, quarum idem est denominator, eadem est ratio: quæ est numeratorum A, C. Quod erat probandum.

PROP. XI. *Theor.*

Ratio fractionum, quarum idem est numerator, eadem est cum ratione denominatorum reciprocè.

Expositio.

Fractionum duarum A B, C D numeratores A & C sint iidem. Dico fractionis A B ad fractionem C D rationem, eandem esse, cum ratione denominatoris D fractionis C D ad denominatorem B, fractionis A B; ita vt termini harum rationum reciprocè sumantur.

Demonstratio.

A 5	C 5
B 10	D 15

Denominator B in suam ductus fractionem A B, producit absolutum, & integrum numerum A per Prop. 9. huius: per quam etiam denominator D ductus in fractionem C D, producit numerum integrum & absolutum C. Æqualem ex hypothesi numero A. Cum ergo numerus B ductus in fractum A B producat numerum A æqualem numero C: qui producitur ex numero D in fractum C D ducto: numerus B primus ita erit ad secundum D; vt tertius C D fractus, ad quartum A B fractum per Prop. 49. libri 1. Patet ergo fractionem C D ita se habere ad fractionem A B; vt reciprocè fractionis A B denominator B, se habet ad fractionis C D denominatorem D. Quare ratio fractionum, quarum idem est &c. Quod erat probandum.

PROP. XII. *Theor.*

Fractio quælibet ad vnitatem, siue ad totum, cuius est fractio; ita se habet vt fractionis eiusdem numerator se habet ad denominatorem.

Expositio.

A 2	E 3	C 6
B 3	F 1	D 3

constans vt ex dictis Prop. 2. patet. Quia igitur numerus absolutus B 3, hoc est, E multiplicat fractionem A B & producit fractionem C D: cuius numerator C est numerus productus ex multiplicatione numeratoris A per numerum absolutum E, per proximè antecedentem Propositionem 8. Denominator autem D, idem est cum denominatore B, fractionis A B multiplicatæ: qui produci censetur, si vnitas F multiplicetur per B, vel E (quilibet enim numerus multiplicans vnitatem seipsum producit.) Ergo numerus E multiplicans duos numeros A & F producit duos numeros C, D: qui per Prop. 3. libri huius, eandem habent inter se rationem quam habent numeri duo A & F multiplicati. Sed per Prop. 5. libri huius, numeri eandem habentes rationem fractiones constituunt æquales. Ergo fractio C D æqualis est fractioni: cuius numerator foret A, & denominator F. Sed hæc fractio ex numeratore A, & denominatore F constituta; æqualis est numero absoluto A. Vnitas enim, quæ denominator est huiusmodi fractionis, numeratorem diuidens, ipsum non immutat. Ergo etiam fractio C D, æqualis est eidem numero absoluto A. Quare si fractio quælibet per denominatorem &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. X. *Theor.*

Quarum fractionum idem est denominator: eæ rationem eandem habent inter se; quam habent inter se numeratores.

Expositio.

A 2	C 3
B 5	D 5

Sint duæ fractiones A B, C D: quarum denominatores B & D sunt æquales. Dico fractionem A B ad fractionem C D eam habere rationem: quam illius numerator A habet ad huius denominatorem C.

Demonstratio.

Denominator B multiplicans fractionem A B, generat absolutum & integrum numerum A per Prop. 9. præcedentem: per quam eandem denominator D multiplicans fractionem suam C D, generat absolutum & integrum numerum C. Idem ergo numerus B, vel D (sunt enim hi duo denominatores æquales ex hypothesi) multiplicans duas fractiones A B, C D, & producens duos numeros absolutos A & B; eos producit in eadem

dem ratione; quam habent inter ſe fractiones A B, C D per Prop. 3. libri huius. Ergo earum fractionum, quarum idem eſt denominator, eadem eſt ratio: quæ eſt numeratorum A, C. Quod erat probandum.

PROP. XI. *Theor.*

Ratio fractionum, quarum idem eſt numerator, eadem eſt cum ratione denominatorum reciprocè.

Expoſitio.

Fractionum duarum A B, C D numeratores A & C ſint iidem. Dico fractionis A B ad fractionem C D rationem, eandem eſſe, cum ratione denominatoris D fractionis C D ad denominatorem B, fractionis A B; ita vt termini harum rationum reciprocè ſumantur.

Demonſtratio.

Denominator B in ſuam ductus fractionem A B, producit abſolutum, & integrum numerum A per Prop. 9. huius: per quam etiam denominator D ductus in fractionem C D, producit numerum integrum & abſolutum C. Æqualem ex hypotheſi numero A. Cum ergo numerus B ductus in fractum A B producat numerum A æqualem numero C: qui producitur ex numero D in fractum C D ducto: numerus B primus ita erit ad ſecundum D; vt tertius C D fractus, ad quartum A B fractum per Prop. 49. libri 1. Patet ergo fractionem C D ita ſe habere ad fractionem A B; vt reciprocè fractionis A B denominator B, ſe habet ad fractionis C D denominatorem D. Quare ratio fractionum, quarum idem eſt &c. Quod erat probandum.

$$\frac{A\ 5}{B\ 10} \qquad \frac{C\ 5}{D\ 15}$$

PROP. XII. *Theor.*

Fractio quælibet ad vnitatem, ſiue ad totum, cuius eſt fractio; ita ſe habet vt fractionis eiuſdem numerator ſe habet ad denominatorem.

Expoſitio.

E 15	A 5	C 3	G 6
F 24	B 6	D 4	H 6

plis Si diuidatur fractus E F per fractum A B; habebitur fractus C D; qui ad vnitatem G H habeat eandem rationem: quam diuisus E F habet ad diuidentem A B, & permutando. Ita sit Diuisus E F, ad productum C D per diuisionem: vt Diuisor A B ad vnitatem G H. Quare si Diuisor A B minor sit vnitate G H, vt in primo exemplo; minor etiam esse colligitur diuisus E F, numero C D per diuisionem producto. Quod paradoxum exponetur apertissimè ad Propositionem 25. in scholio vbi diuisionis modus tradetur. Si autem Diuisor A B maior sit vnitate G H, aut ei æqualis, vt in duobus exemplis posterioribus; maior etiam erit Diuisus E F, producto C D per diuisionem; aut ei æqualis per Prop. 14. lib. 5. Elem. Quæ hîc allata ad has maximi momenti definitiones explicandas, clariùs percipientur; vbi suo loco accesserint eorum demonstrationes, ad Propositiones scilicet 24. & 25. ad quas sequentibus Propositionibus parandus est aditus

PROP. VIII. *Theor.*

Numerus integer numerum fractum multiplicans; numerum fractum producit: cuius numerator est numerus productus ex multiplicatione numeri illius integri, & numeratoris fractionis multiplicatæ; denominator autem est eiusdem multiplicatæ fractionis denominator immutatus.

Expositio.

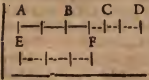
Fractio quævis A B multiplicetur per numerum integrum E. Dico fractionem produci C D: cuius numerator C est numerus ex numero E in numeratorem A ducto genitus: Denominator autem D est idem denominator B fractionis multiplicatæ A B.

Demonstratio.

Euidens est huius Propositionis ratio: si attendatur fractionum valorem non ex quantitate denominatoris; sed ex quantitate numeratoris censeri debere. Denominatoris enim munus illud tantùm est, vt partium, in quas totum diuisum est, multitudinem exprimat, ac denominet. At verò numerator indicat, quot ex illis partibus sumantur,

A 2		C 6
	E 3	
B 3		D 3

tur, ex quo fracti numeri quantitas pendet: maior enim erit, vel minor; prout plures, vel pauciores partes sumentur ad numeratorem statuendum ipso immutato denominatore. Cum itaque numerus integer E 3, multiplicat fractionem A B, hoc est, duas tertias partes vnitatis; toties sumi debent duæ illæ tertiæ partes vnitatis: quot sunt in multiplicante E 3 vnitates, hoc est, ter: ita vt sumantur sex tertiæ partes vnitatis, vt habet fractio C D. Quod idem in quantitate continua manifestum est. Si enim A B sit duæ partes tertiæ, lineæ E F: & A B ter sumatur, hoc est, multiplicetur per 3; vt fiat tota A D, sex partium tertiarum lineæ E F; constat hanc multiplicationem absolui immutato denominatore E F quare. Si numerus integer &c. Quod erat ostendendum.



PROP. IX. *Theor.*

Si fractio quælibet per denominatorem suum tanquam per numerum absolutum multiplicetur: producitur eius numerator tanquam numerus absolutus & integer.

Expositio.

Sit fractio quælibet, cuius numerator sit A, & denominator B. Hæc autem fractio multiplicetur per denominatorem B, vt absolutus est, & integer numerus ex tribus vnitatibus compositus. Dico per huiusmodi multiplicationem produci numerum absolutum & integrum tot vnitatibus constantem, quot constat numerator A, vt absolutus, & integer, vt in hoc exemplo, duabus.

A 2	C 6
B 3	D 3

Demonstratio.

Constituatur fractio, aut quasi fractio E F: cuius numerator E, sit fractionis A B denominator, qui in ipsam ducitur: denominator autem sit F vnitas, ita vt hæc fractio E F sit numerus integer tribus vnitatibus

A 2	E 3	C 6
B 3	F 1	D 3

constans vt ex dictis Prop. 2. patet. Quia igitur numerus absolutus B 3, hoc est, E multiplicat fractionem A B & producit fractionem C D: cuius numerator C est numerus productus ex multiplicatione numeratoris A per numerum absolutum E, per proximè antecedentem Propositionem 8. Denominator autem D, idem est cum denominatore B, fractionis A B multiplicatæ: qui produci censetur, si vnitas F multiplicetur per B, vel E (quilibet enim numerus multiplicans vnitatem seipsum producit.) Ergo numerus E multiplicans duos numeros A & F producit duos numeros C, D: qui per Prop. 3. libri huius, eandem habent inter se rationem quam habent numeri duo A & F multiplicati. Sed per Prop. 5. libri huius, numeri eandem habentes rationem fractiones constituunt æquales. Ergo fractio C D æqualis est fractioni: cuius numerator foret A, & denominator F. Sed hæc fractio ex numeratore A, & denominatore F constituta; æqualis est numero absoluto A. Vnitas enim, quæ denominator est huiusmodi fractionis, numeratorem diuidens, ipsum non immutat. Ergo etiam fractio C D, æqualis est eidem numero absoluto A. Quare si fractio quælibet per denominatorem &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. X. *Theor.*

Quarum fractionum idem est denominator: eæ rationem eandem habent inter se; quam habent inter se numeratores.

Expositio.

A 2	C 3
B 5	D 5

Sint duæ fractiones A B, C D: quarum denominatores B & D sunt æquales. Dico fractionem A B ad fractionem C D eam habere rationem: quam illius numerator A habet ad huius denominatorem C.

Demonstratio.

Denominator B multiplicans fractionem A B, generat absolutum & integrum numerum A per Prop. 9. præcedentem: per quam eandem denominator D multiplicans fractionem suam C D, generat absolutum & integrum numerum C. Idem ergo numerus B, vel D (sunt enim hi duo denominatores æquales ex hypothesi) multiplicans duas fractiones A B, C D, & producens duos numeros absolutos A & B; eos producit in eadem

dem ratione; quam habent inter ſe fractiones A B, C D per Prop. 3. libri huius. Ergo earum fractionum, quarum idem eſt denominator, eadem eſt ratio: quæ eſt numeratorum A, C. Quod erat probandum.

PROP. XI. *Theor.*

Ratio fractionum, quarum idem eſt numerator, eadem eſt cum ratione denominatorum reciprocè.

Expoſitio.

Fractionum duarum A B, C D numeratores A & C ſint iidem. Dico fractionis A B ad fractionem C D rationem, eandem eſſe, cum ratione denominatoris D fractionis C D ad denominatorem B, fractionis A B; ita vt termini harum rationum reciprocè ſumantur.

Demonſtratio.

Denominator B in ſuam ductus fractionem A B, producit abſolutum, & integrum numerum A per Prop. 9. huius: per quam etiam denominator D ductus in fractionem C D, producit numerum integrum & abſolutum C. Æqualem ex hypotheſi numero A. Cum ergo numerus B ductus in fractum A B producat numerum A æqualem numero C: qui producitur ex numero D in fractum C D ducto: numerus B primus ita erit ad ſecundum D; vt tertius C D fractus, ad quartum A B fractum per Prop. 49. libri 1. Patet ergo fractionem C D ita ſe habere ad fractionem A B; vt reciprocè fractionis A B denominator B, ſe habet ad fractionis C D denominatorem D. Quare ratio fractionum, quarum idem eſt &c. Quod erat probandum.

A 5	C 5
B 10	D 15

PROP. XII. *Theor.*

Fractio quælibet ad vnitatem, ſiue ad totum, cuius eſt fractio; ita ſe habet vt fractionis eiuſdem numerator ſe habet ad denominatorem.

Expositio.

Sit fractio A B. Dico ita esse eius numeratorem A ad denominatorem B: vt ipsa fractio A B est ad vnitatem, siue ad totum, cuius est fractio.

Demonstratio

Formetur alia quædam fractio C D: cuius tam numerator C, quàm denominator D, sit æqualis denominatori B, fractionis datæ A B. Erunt igitur æquales etiam inter se C & D ergo fractio C D æqualis erit vnitati, vt Prop. 2. libri huius declaratum est. Iam, cum duarum fractionum A B, C D denominatores B & D sint æquales: erit fractio A B ad fractionem C D; vt numerator A illius, ad huius numeratorem C per Prop. 10. libri huius hoc est, ad suum denominatorem B. Cum ergo fractio C D æqualis sit vnitati, siue toti, cuius est fractio: Erit fractio A B ad vnitatem, cuius est fractio; vt numerator eius est ad suum denominatorem. Quare fractio quælibet ad vnitatem, siue &c. Quod erat probandum.

A 3	C 5
---	---
B 5	D 5

PROP. XIII. *Theor.*

Fractio quælibet ita se habet ad numeratorem suum tanquam numerum integrum, & absolutum: sicut se habet vnitas ad denominatorem, velut ad numerum integrum & absolutum.

Expositio.

Sit fractio quælibet A B. Dico eam fractionem habere ad numeratorem suum A tanquam numerum integrum, & absolutum, vt hîc ad numerum 2) eandem rationem: quam habet vnitas ad denominatorem B tanquam numerum integrum (vt hîc ad numerum 3 tribus vnitatibus constantem.) Ita vt fractio A B eadem sit pars numeri A 2, siue duarum vnitatum: quæ pars est vnitas numeri B 3, siue trium vnitatum. Atque ita, cum vnitas sit pars cuiusvis numeri ab ipso numero denominata: erit in hoc paradigmate vnitas, pars tertia numeri B 3, ab ipso numero 3 nomen accipiens. Vnde iuxta sensum Propositionis, asseritur fractio

A 2	C 3
---	---
A 3	D 3

A B, pars tertia numeri A 2, siue duarum vnitatum: vt scilicet eadem sit ratio fractionis A B ad numerum 2, & vnitatis ad numerum 3; vt exigit Definitio rationis lib. 1. Prop. 47. allata. Atque hic est sensus iuxta quem demonstranda est hæc Propositio.

Demonstratio.

Fiat fractio C D æqualis vnitati: cuius scilicet numerator & denominator æquales sint, & vterque æqualis denominatori B ipsius fractionis A B. Quo posito. Cum numerator A habeat ad denominatorem B eandem rationem: quam ipsa fractio A B ad vnitatem, siue ad fractionem C D (quæ vnitas est) per Prop. 2. huius. Erit permutando vt numerator A ad fractionem A B: ita denominator B ad vnitatem C D. Et inuertendo. Vt fractio A B ad numeratorem A; ita vnitas C D ad denominatorem B. Quare fractio quælibet ita se habet ad numeratorem &c. Quod erat probandum.

Scholium 1.

Cum eadem sit ratio fractionis A B ad numeratorem A, & vnitatis ad denominatorem B. Erit per Prop. 47. lib. 1. fractio A B, eadem pars numeratoris A tanquam numeri integri & absoluti: quæ pars est vnitas denominatoris B tanquam numeri integri & absoluti. Sicut ergo vnitas est pars numeri B, ab ipso numero B denominata, vt superiùs expositi; ita fractio A B, pars erit numeratoris A à denominatore B denominata, vt in hoc exemplo, pars tertia: sicut vnitas est pars tertia numeri B. Adeo vt fractio sit semper pars præcisa, siue aliquota numeratoris sicut vnitas non potest non esse pars præcisa denominatoris.

Scholium 2.

Hæc Propositio, si rectè perpendatur, idem planè asserit: quod Propositione 51. Siue vltimâ libri præcedentis: quodque Propositione 1. libri huius secundi, eiúsque Coroll. & assertum, & probatum est. Nimirum quando numerus minor per maiorem diuiditur; vel, quando peractâ Diuisione numerus quispiam relinquitur; ostensum est locis citatis fractionem fieri; cuius numerator est minor numerus diuidendus; denominator autem, est Diuisor; eóque modo numerum illum minorem per maiorem diuidi, ita vt fractio, verbi gratiâ (resumpto superiori

Exemplo) A B, ſit quotiens Diuiſionis: quâ duæ vnitates numero A expreſſæ diuiduntur per vnitates tres, quas Diuiſor B continet. Sed quotiens quilibet ex natura ſua eſt pars numeri diuiſi à Diuiſore denominata: ſicut viciſſim, Diuiſor eſt ſemper pars numeri eiuſdem diuiſi à quotiente denominata. Diuiſor enim toties ſumptus, quot ſunt in quotiente vnitates; ſicut etiam quotiens, ſumptus toties; quot vnitates continet Diuiſor, Diuiſum numerum reſtituit ſeſéque partes illæ duæ denominant reciprocè. Nihil ergo mirum, ſi fractio A B dicatur pars numeratoris A tanquam numeri abſoluti, denominata à denominatore B tanquam numero abſoluto: cum fractio A B ſit quotiens diuiſionis; quâ numerus abſolutus A 2 diuiditur per diuiſorem B 3, vt numerum abſolutum.

A 2	C 3
B 3	D 3

Quam Propoſitionis huius cum citatis Propoſitionibus conuenientiam declarat euidentiùs adhuc Geometricum diagramma: quod illarum expoſitioni inſeruiit: quod iterum paucis repeto; vt perſpecta omninò fiat difficultas illa: quæ in huiuſmodi Diuiſione numeri minoris per maiorem ineſſe ſolet: dum quotiens iiſdem terminis Diuiſionis conſtat; vnitate



tamen minor euadit. Numerus ergo planus A B duabus vnitatibus planis A D, K B conſtans, diuidendus erat per numerum E C ex tribus vnitatibus conflatum. Per quam Diuiſionem gigni oſtenſus illic eſt quotiens C F, duas vnitatis C D partes tertias continens: quæ fractio conſtituitur ſeruatis numeris tam A B diuiſo (qui ſit numerator) quam E C Diuiſore in denominatorem aſſumpto: licet reuerà mutentur materialiter in alios C F, & C D per Diuiſionem; vt eodem loco oſtenſum eſt. Quod ſic denuò appoſitè ad allatam huius Propoſitionis demonſtrationem expono. Duo rectangula A B, E D æquali altitudine C A, C D conſtantia, ita ſe habent, vt baſes C B, C E. Sed rectangulum E F eſt ex conſtructione illic ſtatutâ, æquale rectangulo A B. Ergo ita ſe habet A B rectangulum ad E D rectangulum; vt C B ad C E. Sed duo rectangula E F, E D, ita ſunt, vt C F, C D. Per Prop. 1. lib. 6. Elem. Ergo ita eſt C B duas vnitates continens, ad C E tribus vnitatibus conſtantem; vt C F ad vnitatem C D. Quare, ſi vnitas C D in tres partes ſecetur; earum duas ſibi vendicabit C F; vnam verò F D. Iam ergo, quia eſt vt F D ad C D; ita dupla lineæ F D, hoc eſt, C F; ad duplam lineæ C D hoc eſt ad C B. (Sunt enim partes cum pariter multiplicibus æquales

æquales per Prop. 15. lib. 5. Element.) est autem F D pars tertia lineæ C D: erit etiam C F pars tertia lineæ C B. Idem autem numerus exprimit rectangulum A B, & lineam C B; nimirum numerator A 2 fractionis A B: & idem numerus exprimit rectanguli E D, latus E C, & rectam C D in totidem cum E C, partes diuisam: nempe in tres, quas denominator B 3, fractionis A B; continet. Constat igitur fractionem A B, quæ est quotiens Diuisionis: quâ numerus A 2 minor, per maiorem B 3 diuiditur; esse numeri diuisi A 2 partem, à Diuisore B 3 denominatam. Quod Propositio hæc, exigebat non secùs ac Propositio 51. libri 1. & Propositio 1. libri 2.

PROP. XIV. *Theor.*

Si duarum minutiarum numeratores in earum denominatores reciprocè ducantur: prioris scilicet numerator in posterioris denominatorem; & viciſſim, posterioris numerator in denominatorem prioris: prior productus numerus ad productum posteriorem numerum eandem rationem habebit; quam prior minutia habet ad posteriorem.

Expositio.

E 21	F 30
A 3	C 6
—	—
B 5	D 7

Sint duæ minutiæ A B, C D: quarum prioris numerator A ducatur in posterioris denominatorem D; per quam multiplicationem producatur E. Ducto autem posterioris numeratore C, in prioris denominatorem B producatur F. Dico priorem productum numerum E, ad posteriorem productum numerum F, eandem habere rationem: quam habet prior minutia A B ad posteriorem C D.

Demonstratio.

Quoniam si denominator B multiplicet minutiam A B producit numerum integrum A per Prop. 9. lib. 2. huius. Producit autem F, si ducatur in fractionis C D numeratorem C. Ita erit A ad F; vt minutia A B ad numerum integrum C per Prop. 3. lib. 2. Rursùs. Si denominator D ducatur in fractionem C D, producit numerum C, per citatam Prop. 9. producit autem E ductus in A. Ergo minutia C D ad numerum integrum A, ita se habet, vt numerus C ad E per Prop. 3. libri 2. huius, citatam. Quia igitur minutia A B ad posterioris numeratorem C ostensa est ita se habere;

vt prioris numerator A ſe habet ad F & rursùs oſtenſa eſt poſterior mi-

A 3	C 6
—	—
B 5	D 7
C 6	A 3
E 21	F 30

nutia C D ita ſe habere ad prioris numeratorem A, vt poſterioris numerator C, ſe habet ad numerum E : ita erit ex æqualitate perturbata ; iuxta appoſitam formulam; fractio A B, ad numerum E ; vt fractio C D ad numerum F. Et permutando. Ita erit fractio A B ad fractionem C D : vt numerus E ex A in D productus , ad numerum F ex C in D productum. Ergo ſi duarum minutiarum numeratores &c. Quod erat probandum.

Alia propoſitionis demonſtratio.

Productus ergo ſit numerus E ex numeratore A in Denominatorem D ducto , & numerus F ex numeratore C ducto in denominatorem B iuxta hypotheſim Propoſitionis. Ducantur iam duo denominatores in

E 21	F 30
A 3	C 6
—	—
B 5	D 7
G 35	

ſe mutuò, & fiat G. Quia igitur D duos numeros A & B multiplicans generat numeros E & G erit , per Prop. 3. libri huius , E ad G; vt A ad B. Ergo per Prop. 5. libri huius. Fractio E G æqualis eſt fractioni A B. Rursùs quia numerus B multiplicat duos numeros C & D , & producit numeros F & G : eadem eſt ratio numeri F ad G , quæ eſt numeri C ad D per citatam Prop. 3. libri 2. huius. Ergo etiam per Prop. 5. fractio F G æqualis eſt fractioni C D. Cum ergo duæ fractiones E G & F G , eundem habeant denominatorem G : ita erunt inter ſe; vt inter ſe ſunt earum numeratores E & F per Prop. 10. libri huius. Ergo etiam duæ fractiones A B, C D æquales fractionibus E G , F G eandem habent rationem inter ſe ; quam inter ſe habent numeri E F. Quod erat demonſtrandum.

Eiuſdam alia Demonſtratio.

Poſitis eiſdem fractionibus A B , C D. Numerus E , qui fit ex numeratore A prioris minutiæ , in denominatorem D minutiæ poſterioris , ipſi poſteriori minutiæ adſcribatur : ſicut & numerus F ex numeratore C poſterioris minutiæ , in prioris denominatorem B ducto genitus ipſi priori

G 18	
A 3	C 6
—	—
B 5	D 7
F 30	E 21

minutiæ A B adhereat. Ducantur etiam in ſe mutuò numeratores A & B , vt fiat G hoc poſito. Quoniam numerator A multiplicans numeros C & D producit G & E: ita erit G ad E , vt C eſt ad D per Prop. 3. libri 2. huius. Ergo per Prop. 5. minutia G E æqualis eſt minutiæ C D. Rursùs. Quoniam numerator C multiplicans A & B generat

nerat numeros G & F: erit fractio G F æqualis fractioni A B per proximè citatas Propoſitiones. Eſt enim G ad F, vt A eſt ad B. Quia igitur duæ minutiæ G F, & G E eundem habent numeratorem G: eandem habent rationem inter ſe; quam inter ſe habent reciprocè denominatores F & E per Prop 11. libri 2. huius. Eſt ergo fractio G F ad fractionem G E; vt huius denominator E ad illius denominatorem F. Sed fractio A B fractioni G F, & fractio C D fractioni G E eſt æqualis. Ergo fractio A B ad fractionem C D, eam habet rationem: quam numerus E ex numeratore A prioris minutiæ in denominatorem D poſterioris ducto genitus, habet ad numerum F genito per multiplicationem numeratoris C minutiæ poſterioris, in prioris denominatorem B. Quare. Si duarum minutiarum numeratores in earum &c. Quod erat probandum.

PROP. XV. *Theor.*

Cum numerator vnius minutiæ in alterius minutiæ denominatorem ductus numerum gignit æqualem ei; qui ex numeratore huius poſterioris minutiæ in prioris denominatorem ducto gignitur: æquales ſunt duæ illæ minutiæ. Quod ſi duo illi numeri per duas huiuſmodi multiplicationes geniti, fuerint inæquales: inæquales ſunt & ipſæ minutiæ: eáque maior eſt, cuius numerator in alterius denominatorem ductus, numerum genuit maiorem.

Expoſitio & Demonſtratio.

E 21	F 30
A 3	C 6
—	—
B 5	D 7

Propoſitio hæc Corollarium eſt à præcedente deriuatum. Si enim fractio A B ad fractionẽ C D eandem habet rationem: quam numerus E ex numeratore A in denominatorem D ducto genitus habet ad numerum F ex numeratore C in denominatorem B ducto genitum, vt Demonſtratione ſecundo loco allata, eiúſque ſchemate conſtat: luce clariús patet fractiones A B, C D æquales eſſe; ſi duo numeri E & F fuerint æquales: inæquales etiam fore. Si iidem numeri E & F ſint inæquales: eámque maiorem eſſe altera, cuius numerator maiorem numerum genuit: qualis eſt in hoc paradigmate minutia C D; ex cuius numeratore C in denominatorem oppoſitum B genitus eſt numerus F maior, quàm E ex multiplicatione numeratoris A & denominatoris B D productus. Si enim quatuor fuerint quantitates proportionales; vt hîc, E, F, & minutiæ

A B C D : & prima E, æqualis fuerit ſecundæ F : etiam tertia A B, æqualis erit quartæ C D : etſi prima minor, aut maior ſecunda extiterit, etiam tertia minor, aut maior erit, quàm quarta per Prop. 14. lib. 5. Elem. Ergo. Cum numerator vnius &c. Quod erat probandum.

PROP. XVI. *Theor.*

Minutia minutiæ alterius, æqualis eſt minutiæ ſimplici: quæ producitur, ſi tam numeratores, quàm denominatores inter ſe mutuò ducantur.

Expoſitio.

Quemadmodum ſi vnum aliquod totum in particulas diuidatur: quarum aliquot aſſumantur; minutia generatur; cuius numerator eſt numerus aſſumptarum particularum; denominator autem eſt ipſe numerus particularum, in quas totum diuiſum ſupponitur. Ita etiam, ſi fractio quæpiam iam conſtituta, in partes aliquot æquales diuidatur tanquam vnum aliquod totum: poterunt earum partium aliquæ aſſumi in numeratorem nouæ fractionis; cuius denominator erit numerus partium, in quas prior fractio diuiſa fuit. Hæc ergo fractio ita conſtituta, dicitur fractio fractionis prioris : & tamen particula quædam eſt totius primò diuiſi : eſt enim pars quædam partis alterius ad illud totum pertinentis. Exemplum eſto. Paſſus duo Geometrici diuidantur per numerum 5 : ex ea

A 2	C 3
—	—
B 5	D 4

diuiſione naſcitur fractio A B; diuiſor enim 5 maior eſt diuiſo 2 : eiúſque ſenſus eſt, vt ex Propoſitione 51. libri 1. & Prop. 1. & 2. huius. Paſſum vnum Geometricum diuiſum eſſe in partes quinque earúmque duas eſſe aſſumptas: quæ duæ vnius paſsûs particulæ, ſunt pedes duo Geometrici paſſus ſiquidem pedes quinque continet) iam verò ſi hæc minutia A B, in partes quatuor diuidatur; quarum tres aſſumantur in nouæ minutiæ numeratorem; ea erit C D : eiúſque valor exprimetur, ſi dicatur eſſe tres partes quartas duarum partium quintarum vnius paſsûs Geometrici. Cum ergo fractionis A B valor ſit duorum pedum : ſinguli autem pedes æquales ſint palmis quatuor : fractio A B æqualis erit palmis 8. Ergo eorum 8 palmorum. Tres partes quartæ, eſt fractio C D. Erit ergo huius fractionis C D valor, palmi 6. Quod itaque hîc perpenditur, eſt quænam pars vnius paſſus ſint illi palmi 6. Aſſeritúrque indicatum iri per fractionem, E F cuius numerator E gignitur ex mutua numeratorum A & C multiplicatione; denominator autem F ex multiplicatione denominatorum

A 2	C 3	E 6
B 5	D 4	F 20

natorum B & D. Quòd verùm esse constat à posteriori in hoc Exemplo ad materiam contracto. Nam passus Geometricus palmos 20 continet: quorum duæ quintæ partes, quibus constat fractio A B, sunt 8 palmi (pars enim quinta Palmorum 20, est 4: ac proinde quintæ duæ partes sunt palmi 8.) Palmorum verò 8, partes tres quartæ; quæ fractione C D designantur; sunt palmi 6. Nam quarta pars palmorum 8, est palmi 2. Ergo tres quartæ partes sunt palmi 6. Itaque si minutia C D ad totum illud vnum, qui passus est, referatur nullâ habitâ, vel factâ mentione fractionis mediæ A B, eius valor erit 6 partium siue palmorum: qualium passus vnus, est 20: rectéque designabitur fractione E F: cuius numerator E, fit ductis in se mutuò numeratoribus duobus A, C. Denominator autem F, ductis item in se inuicem duobus denominatoribus B & D. Quod idem in quauis aliâ fractione fractionis siue in abstracto, siue in concreto, vt hîc, sumptæ, verum comprobabitur. Sed hæc expositionis tantùm gratiâ adducta sunt hactenùs: nunc à priori probanda est assertio: ratio scilicet est afferenda; cur fractio C D, fractionis A B; si ad totum referatur, transeat in fractionem E F: cuius numerator E ex numeratoribus A, C; denominator F ex denominatoribus B D in se mutuò ductis generetur.

Demonstratio.

Superiori resumpto paradigmate, in quo fractio E F genita est numeratoribus A, C, & denominatoribus B D in se mutuò ductis: vt fieret

G 8	E 6	
A 2	C 3	H 20
B 5	D 4	L 20
F 20		

numerator E, & denominator F. Ducatur numerator B simplicis fractionis, in denominatorem D, fractionis C D, (quæ est fractio fractionis) & fiat G. Ad hæc statuatur fractio H L vnitati æqualis: cuius scilicet numerator H æqualis sit denominatori L, vt Prop. 2. huius declaratum est: sint autem termini illius æquales numero F; qui fit ex multiplicatione duorum denominatorum B & D, & statutus est denominator fractionis E F. His ita præparatis. Cum numerus A ductus sit in duos numeros C & D, & produxerit duos numeros E & G: ita erit E ad G, vt C ad D per Prop. 3. libri huius. Vt autem numerator C ad denominatorem D: ita est fractio C D ad suum totum per Prop. 12. libri huius hoc est, ad fractionem A B. Ergo ita est E ad G; vt fractio C D ad fractionem A B. Sed fractio A B æqualis est fractioni, cuius numerator est G, & denominator F: eò quod G & F geniti sint ducto numero D in numeros A & B. Atque adeò per Prop. 3. libri huius, eandem habeant rationem,

quam

quam multiplicati A & B; ac demùm per Prop. 5. huius. Minutiam G F æqualem constituant minutiæ A B. Ergo ita est E ad G; vt fractio C D ad fractionem G F. Est autem fractio G F ad fractionem H L (hoc est ad vnitatem) vt G numerator fractionis G F numeratorem H per Prop. 10. huius.) Sunt enim duarum fractionum G F, H L æquales denominatores F & L) ergo ita est G ad H; vt fractio G F ad fractionem H L; siue vnitatem. Sed fractio A B, vt ostensum est, æqualis est fractioni G F. Ergo ita est fractio A B ad fractionem H L vt est G ad H. Quibus ita declaratis, sic demùm Propositum concludemus.

CD	EF
AB	GF
HL	HL

Ostensa est fractionis A B fractio C D ita se habere ad ipsam fractionem A B; vt fractionis E F, numerator E se habet ad G numeratorem fractionis G F. Tum ostensa est fractio A B (eo quod æqualis foret fractioni G F) ita esse ad fractionem H L: Vt fractionis G F numerator G est ad numeratorem H eiusdem fractionis H L. Sed fractionum E F, G F H L denominatores sunt æquales: Atque adeò ita se habent inter se fractiones ipsæ E F, G F, H L vt numeratores earum. Ergo etiam ita erit fractionis fractio C D ad fractionem A B: vt fractio E F ad fractionem G F. Vt autem fractio A B se habet ad fractionem H L; ita etiam se habebit fractio G F ad fractionem H L. Ergo ex æquo, vt appositum schema refert, ita se habet fractionis fractio C D ad fractionem H L, siue ad vnitatem; vt ad eandem fractionem H L, siue ad eandem vnitatem se habet fractio simplex E F. Ergo fractio E F simplex æqualis est per Prop 9. lib. 5. Eucl. fractionis A B fractioni C D; cum vnitas eandem habeat rationem ad vtramque. Quare si tam numerator fractionis, quæ alterius fractionis fractio sit, numeratorem illius; quàm denominator denominatorem multiplicet: fractio nascetur simplex, & immediatè ad vnitatem pertinens; quæ erit æqualis fractionis fractioni. Quod erat probandum. Quamquam autem tum in proponendo, tum in demonstrando duarum tantùm fractionum, quarum vna fractio sit alterius, mentio habeatur: eadem tamen est ratio plurium minutiarum; quarum singulæ sint deinceps antecedentis minutiæ fractiones. Si enim omnium numeratores in se ducantur: producetur numerator fractionis simplicis, ad quam reducitur fractio vltima fractionum; eiúsque denominator erit numerus ex multiplicatione denominatorum omnium genitus.

	K 12	G 6
A 2	C 2	E 2
B 5	D 4	F 4
	L 80	H 16

Vt si tres proponantur fractiones A B, C D, E F; quarum prima A B sit vnius alicuius totius immediata fractio; secunda verò C D, sit fractio fractionis A B: ac demùm tertia E F sit etiam fractionis C D fractio: hæc vltima E F æqualis erit fractioni simplici, quæ scilicet ad illud vnum totum immediatè referatur,

referatur, illiúsque tantùm fractio dicatur: cuius numerator producitur ex multiplicatione trium numeratorum A, C E; & denominator ex tribus denominatoribus B, D, F in se pariter multiplicatis: Qualis est fractio K L: cuius numerator K fit ducto E in C, vt fiat G: tum in G ducto A vt fiat K. Similiter denominator L fit ducto D in F, vt fiat H, in quem ducatur B, vt fiat L. Ratio clara est ex demonstratione præcedenti. Nam fractio G H æqualis est fractioni simplici collata ad totum. Cuius C D est fractio: est enim E F fractio fractionis C D; Sed illud totum cuius C D est immediata fractio, est fractio A B. Ergo fractio G H est fractio fractionis A B. Igitur fractio G H reducitur ad simplicem fractionem K L; si duo numeratores A, G, & duo denominatores B, H in se ducantur. Quare fractio K L ad totum immediatè collata; est fractio simplex æqualis fractioni G H; hæc autem ostensa est æqualis fractioni E F. Ergo K L eidem E F est æqualis: atque ita fractio E F fractionis C D; quæ & ipsa fractio est fractionis A B, æqualis est fractioni simplici k L; cuius termini generantur per multiplicationem numeratorum A, C, E, & denominatorum B, D, F. Et verò hoc ipsum maioris explicationis gratia patet; si numeri ad materiam contrahantur: nempe ad mensuras Geometricas passuum, pedum, palmorum, & digitorum; quarum passus pedes 5. continet; Pes, Palmos 4; palmus, digitos 4. Ergo passus, qui est totum, digitos continet 80. qui numerus fit ex denominatoribus B, D F multiplicatis: & denominator est L, fractionis K L. numerator autem K est digitorum 12. Nam prima fractio A B est æqualis pedibus duobus (duabus scilicet partibus quintis vnius passûs) siue palmis 8, quibus æquiualent illi duo pedes. Horum verò palmorum octo fractio C D assumit tres partes quartas, siue palmos 6: qui æquales sunt digitis 24 (palmus enim quilibet digitis quatuor constat) horum autem palmorum 6, siue digitorum 24, duas quartas partes sibi assumit fractio E F eò quod sit fractio fractionis C D. Digitis autem 24 in quatuor partes diuisis, vt fractionis E F denominator F exigit, eorum pars quarta est digitorum numerus 6. Qui numerus bis sumi debet pro numeratore E 2: bis verò sumptus numerus 6, generat numerum 12 digitorum. Fractio ergo, cuius numerator est 12, & denominator est 80, exprimit valorem fractionis E F: quæ est fractio fractionis C D; quæ & ipsa est alterius fractionis A B fractio. Totum autem illud vnum, cuius sunt hæ fractiones, passus est Geometricus, pedibus 5. Vel palmis 20 aut digitis 80 constans. Ecce itaque quomodo & in abstracto, & in concreto fractio K L valorem exprimat fractionis E F vt simplicis, & immediatè ad totum suum relatæ.

Alia eiusdem Propositionis Demonstratio continuæ quantitatis ope explicatior.

Cum numeri characteribus exprimantur ex instituto designatis; non autem ex ipsorum numerorum naturâ petitis: ægriùs haud dubiè concipi, animóque hærere difficiliùs possunt; quàm Geometrica diagrammata: quæ ipsum etiam sensum afficiunt; rerúmque, quæ tractantur, speciem oculis subiiciunt. Iuuat ergo allatæ Propositionis demonstrationem è Geometria haurire, abstractis numeris ad lineas, & superficies contractis: vt aliquoties factitatum est hactenùs; & imposterum, cum ex vsu fuerit, præstiturus sum.

Resumatur Exemplum superius: in quo fractio C D, fractio est fractionis A B quæ fractio fractionis reducta est ad fractionem simplicem E F.

E 6	
A 2	C 3
---	---
B 5	D 4
F 20	

Fiat ergo rectangulum I T: cuius vnum latus sit M T partium quinque: alterum sit I M partium quatuor: tot scilicet quot vnitates continent denominatores B, & D. Per singulas verò partes, lineæ ducantur ad latera perpendiculares: quæ totum rectangulum I T distribuent in quadratula; quorum multitudo erit numerus ex M T, 5 partium, in numerum M I, 4 partium ducto genitus, hoc est, erit numerus F 20; qui fit ex denominatoribus B & D inuicem multiplicatis.



Rursus ex lateribus M T, M I denominatores B & D exprimentibus sumátur particulæ, numeratores A, & C designantes; ex latere quidem M T, binæ M S; & ex altero M I, ternæ M O. Hæ rectangulum comprehendunt O S, tot quadratulis constans; quot vnitatibus constat numerus E ex duobus numeratoribus A 2, & C 3 in sé ductis genitus, nempe 6. Rectangulum ergo

O

O S ad totum rectangulum I T collatum exhibet Geometricè fractionem Arithmeticam E F: quæ asseritur esse fractio simplex æqualis fractioni C D, fractionis A B. Denique rectangulum I S exhibet numerum C 8 genitum ex numeratore A 2 in oppositum denominatorem D 4 ducto: est enim M S partium duarum, qualium M I, est 4. Quibus positis.

Concluditur propositum. Ratio rectanguli O S ad rectang. I T componitur ex ratione rectanguli O S ad rectang. I S, & rectanguli I S ad rectang. I T. Per Definit. 5. libri 6. Elem. Sed ratio rectanguli O S ad rectang. I S eadem est cum ratione lineæ O M ad I M per Prop. 1. lib. 6. Elem. & per eandem Prop. Ratio rectanguli I S ad rectang. I T, eadem est cum ratione lineæ M S ad M I. Ergo ratio rectanguli O S ad rectang. I T componitur ex ratione lineæ O M ad I M, & ratione lineæ M S ad M T. Sed ratio O M ad I M ex suppositione eadem est quæ numeratoris C ad denominatorem D: & ratio M S ad M T eadem, quæ numeratoris A ad denominatorem B. Ergo ratio rectanguli O S ad rectang. I T componitur ex ratione numeratoris C ad denominatorem D, & ex ratione numeratoris A ad denominatorem B. Sed rectangulum O S exprimit fractionis E F numeratorem E genitum ex A in C: & rectangulum I T exprimit eiusdem fractionis E F denominatorem F genitum ex denominatoribus B, D in se ductis. Ergo ratio numeratoris E ad denominatorem F componitur ex ratione numeratoris C ad denominatorem D, & ex ratione numeratoris A ad denominatorem B. Sed ratio numeratoris C ad denominatorem D est eadem per 12. libri huius. Quæ fractionis C D ad suum totum, quod est fractio A B, & ratio numeratoris A ad denominatorem B eadem est cum ratione fractionis A B ad suum totum. Ergo ratio numeratoris E ad denominatorem F componitur ex ratione fractionis C D ad fractionem A B, & ratione fractionis A B ad suum totum. Sed ratio numeratoris E ad denominatorem F est eadem cum ratione fractionis E F ad suum totum per Prop. 12. libri huius. Ergo ratio fractionis E F ad suum totum componitur ex ratione fractionis C D ad fractionem A B, & ex ratione fractionis A B ad suum totum. Id est. Ita se habet fractio E F ad suum totum: vt se habet fractionis A B fractio C D, ad totum fractionis A B atque adeo fractio C D fractionis A B reducta est ad simplicem fractionem E F: quandoquidem E F ita est ad totum sicut fractio C D ad totum primitiuum fractionis A B; cuius C D fractio est.

PROP. XVII. *Probl.*

An oblatus quivis numerus primus sit; an compositus expendere.

Expositio & Constructio.

Quinam primi numeri dicantur Propositione 10. lib. 1. declaratum est. Hîc quæritur ratio dignoscendi numeros huiusmodi primos; siue definiendi. An oblatus aliquis numerus verè primus sit, an verò compositus: quem scilicet alius quispiam numerus præter vnitatem metiatur. Ars quidem ad hanc cognitionem perueniendi obuia est: sed quàm nota & obuia, non tam expedita ad vsum. Datum numerum, diuide per numeros omnes ipso minores. Si enim his omnibus initis diuisionibus, earum nullâ præcisè exhauriatur: ipsum primum esse ex numeri primi Definitione affirmare ne dubita. At si magnus proponatur numerus: quàm grauis futura est & prolixa huiusmodi operatio? grauissima sanè & prolixissima: sed quâ nec leuior detur nec breuior. Compendia tamen quædam obseruari possunt; quibus tanta diuisionum multitudo, sin minùs tota; at saltem ex parte minuatur. Eorum quædam, quæ occurrerunt exponam.

Primum est. Parem nullum numerum, dici posse primum, cum binarius illum metiatur: Par autem numerus quilibet facilè dignoscitur ex vnica sola figura eorum vltima: hæc enim, si par obseruetur, parem numerum totum esse necesse est. Nam ea dempta figura; qui superest numerus Articulus par est: Par autem additus pari, parem totum efficit per Prop. 21. lib. 9. Elem.

Secundum nullus numerus, cuius vltimam figuram esse digitum 5 contigerit, primus est. Nam digitus 5 omnes numeros articulos 10. 20. 30. 70. &c. metitur: eò quod omnium primum & minimum 10 metiatur: ipse verò Articulus 10 cæteros metitur. Ergo & digitus 5 ipsos metietur per axiom. 11. lib. 7. Elem. metitur autem seipsum. Ergo totum numerum tertium, quo maius vix dari possit, compendium est. Vt radix dati numeri quadrata reperiatur iuxta Prop. 14. libri 3. huius, Hæc enim radix, si præcisa fuerit; datus numerus primus non est: quia radix inuenta ipsum per se ipsam metitur: ergo in eo casu eum non metitur vnitas sola, vt exigit numeri primi Definitio. Careat iam radice quadrata datus numerus, veráque aut maior, aut minor ei competat: quarum ab altera discrepat vnitate, vt citato libro fusè docetur. Quod cum occurret; habeto pro certo, nullum numerum, qui radicem verâ maiorem superet, datum numerum metiri posse præcisè, & adæquatè: quin detur alius numerus

merus eadem radice minor; qui eundem præcisè & adæquatè metiatur: ille scilicet numerus, qui quotiens est diuisionis adæquatæ, & pars est reciproca numeri radice illa maioris, per quem diuisio instituta est: quæque numerum diuidentem denominat, & ab ipso vicissim denominatur. Vt si detur numerus 45. nulla est eius quadrata radix præcisa: maior autem verâ est 7. Dico igitur nullum numerum maiorem radice illa 7 reperiri posse, qui numerum 45 metiatur, quin illum metiatur per numerum quempiam minorem, quam sit radix eius 7 verbi gratia, numerus 9 metitur, siue adæquatè diuidit numerum 45. Dico igitur illum metiri per numerum minorem quàm sit radix eius verâ maior 7, nempe per 5: atque adeò numeros duos 9 & 5; illum radice 7 maiorem, hunc eadem minorem esse partes numeri 45 sese inuicem denominantes. Quales etiam forent numeri duo 15 & 3; ille maior, hic minor quàm sit radix 7. Ratio per se clara est. Nam radix 7 maior verâ, si in se ducatur, numerum gignit iam maiorem, quam sit numerus 45. Vt ergo numerus 45 producatur per multiplicationem numeri 7, & alterius cuiuspiam numeri; quisquis ille fuerit eum numero 7 minorem esse necesse est. Quare si numerus aliquis maior adhuc quam 7 numerum 45 diuidat, siue metiatur; illum per numerum metietur; qui minor sit adhuc, quam numerus, per quem numerus 7 metiebatur 45. Quò enim maior Diuisor alicuius numeri extiterit: eò minorem fore quotientem necesse est.

Hoc itaque constituto Principio: vt sciatur primusne sit oblatus quispiam numerus: quod non nisi tentando, variisque initis diuisionibus agnosci posse superiùs monui: Radix eius quadrata inuestiganda est, & maior verâ assumenda. Vt in exemplo allato radix numeri 45 maior verâ est 7. Satis enim est, si diuisiones instituantur per numeros minores quàm 7, nullâ maiorum habitâ ratione. Nam, vt declaratum est paulò ante, nullus numerus maior quàm 7 numerum 45 metiri potest, nisi per numerum minorem quàm 7. & vicissim; si quis numerus minor, quàm 7 numerum 45 metiatur: illum metietur per numerum maiorem quàm 7. Quare sufficit, vt per numeros minores, quàm 7 datus numerus 45 diuidatur: si enim contingat eorum numerorum nullum adæquatè ipsum diuidere; certum est ipsum primum esse, nec vllum numerum dari tunc posse; qui præcisè eundem metiatur: cum enim metiretur per numerum radice eius verâ maiore minorem, ac proinde & numerus eâ radice minor eundem metiretur quod est contra hypothesim cum nullus radice verâ maiore minor eum metiri supponatur. Quod, vt patet, compendij non mediocris loco haberi debet: cum multitudo numerorũ radice quadratâ alicuius numeri minorum vsque ad vnitatem, longè minor sit multitudine numerorum qui ab ipsa radice ad numerum vsque reponuntur. Vt in dato Exemplo, paucissimi sunt numeri inter vnitatem & 7, habitâ ratione

multitudinis numerorum: qui inter 7, & numerum 45 interiiciuntur. Quantò pauciores inter vnitatem, & 10 radicem numeri 100 reperiuntur, quam inter 10 & numerum ipsum quadratum 100? & sic de cæteris. Quartum. Compendio præcedenti ad numeros per quàm paucos Examen primorum numerorum contractum est: hoc verò ex paucissimis illis non pauci adhuc reiici possunt. Ac primò omnes, qui pares sunt numeri. Hos enim cum binarius metiatur; metiretur etiam binarius numerum datum, quem numeri illi pares metirentur per Axiom. 11. lib. 7. Elem. Ex quo eodem axiomate omittendi præterea sunt numeri illi, quos metitur quispiam iam ad Examen adhibitus numerus. Vt si numerum 3 non metiri fueris expertus numerum 25; certum est nec numeros 6, 9, 12 &c. quos metitur 3: ipsum numerum 25 posse metiri. Alioqui numerus 3, qui eos metitur, ipsum etiam numerum 25 metiretur. Quod si reiiciatur adhuc digitus 5 iuxta compendium secundo loco allatum, & præterea omnes, quos ipse metitur: pauci supererunt numeri, quos ad Examen adhibendi erunt. Atque ea sunt, quæ ad solutionem problematis huius, quod ad minutias ad minimos terminos reducendas, maximè necessarium est, exponenda occurrerunt. Expendimus igitur an oblatus numerus primus sit; an compositus. Quod erat præstandum.

PROP. XVIII. *Probl.*

An propositi duo numeri, primi inter se sint, vel compositi inuestigare. Et compositorum maximam communem mensuram definire.

Expositio.

Quinam primi numeri inter se, quinam compositi vocentur, dictum est lib. 1. Propositione 11. Illi nempe sunt: quos nulla communis mensura metitur; hi verò qui communem aliquam mensuram sortiuntur præter vnitatem. Vtrosque dignoscendi ars habetur certissima, etsi paulò prolixior: quam in quibusdam casibus breuiorem licet exhibere: quos prius percurro, quàm solutionem generalem expono. Primò itaque duo quilibet numeri pares, sunt inter se compositi; vtrúmque enim binarius saltem, vt mensura communis, metitur. Secundò. Si duorum datorum numerorum maiorem constet esse primum: cum nulla mensura conueniat ei, si solus spectetur; ergo nec si spectetur cum altero. Tertiò. Si verò duorum numerorum minor, primus est: compositi quidem esse possunt duo illi numeri: sed communis eorum mensura, eáque maxima, & vnica; alia esse non potest præter minorem illum numerum: hîc enim aliam omnem

nem mensuram sui præter se vnum respuit. Quare si maiorem ab ipso minore mensurari contingat; erunt eo in casu duo illi dati numeri, compositi; minor enim & se, & maiorem metitur. Quoties igitur numerus minor primus esse innotuerit: vt an duo numeri primi sint, an compositi, innotescat: diuidendus est maior per minorem: si enim præcisa fuerit & adæquata diuisio; ita vt ipsâ absolutâ nihil supersit reliquum; compositi sunt numeri duo: sin secùs, primi. Maxima verò (si compositos esse contingat) eorum mensura est ipse minor numerus: maior enim seipso dari non potest, qui illum metiatur: est etiam, vt dixi, vnica. Quia nulla alia minorem, cum primus supponatur, metitur præter seipsum. Exemplum esto. Quæritur an duo numeri 45 & 7 sint primi, an compositi? Quia igitur minor 7 primus est: diuidatur maior 45 per minorem 7: & quia facta diuisione, reliquus fit numerus 3; primi inter se sunt duo numeri 45 & 7. At si proponerentur duo 42 & 7: quia diuiso 42 per 7, nihil superest: compositi sunt dicendi: eorúmque mensura, & vnica, & maxima est ipse minor numerus 7. Verùm constructionem tradamus vniuersalem ex Euclide lib. 7. Prop. 2. petitam.

Constructio.

Duo quilibet numeri A & B proponantur examinandi, primíné an compositi sint inter se? & si quidem compositi reperti fuerint; definienda sit eorum mensura maxima. Diuidatur maior A per minorem B attendatur, nulla quotientis habita ratione, numerus C; qui absoluta diuisione reliquus fit: isque in diuisorem assumatur; quo ipse prior Diuisor B diuidatur, & reliquus ab hac diuisione numerus D diuidat iam proximum Diuisorem C. Tum reliquus E diuidat D, ac reliquus F diuidat E: quem ita diuidit; vt nihil relinquatur. Hîc ergo standum, nullus enim habetur nouus Diuisor per quem numerus F diuidi possit. Quò cum deuentum fuerit: compositos esse numeros A & B asseri tutò potest: asseri item maximam eorum mensuram esse numerum F: qui vltimò diuisionem absoluit præcisam, nihilque reliquum fecit. Quod probandum superest.

A	1524
B	738
C	48
D	18
E	12
F	6
G	....

Demonstratio.

Numerus F metitur E: E metitur D, si ab eo dematur F, qui factus est reliquus. Ergo F, qui metitur E metietur etiam F numerum illum qui relinquitur detracto F à numero D. Siquidem numerus metiens E, metitur etiam omnem numerum, quem metitur E per Pronunc. 11. lib. 7. Elem.

Elem. Sed numerus F ſeipſum etiam metitur. Ergo numerus F metiens ablatum (quem E metitur) metiens & reliquum; nempe ſeipſum: metietur etiam totum numerum D per conuerſum axioma 12 Lib. 7. Elem. Rursùs. Quia D metitur C, ſi à numero C dematur E, qui fuit reliquus diuiſo C per D; metitur autem numerus F, tam numerum D, vt probatum eſt, quàm numerum E, ex conſtructione: metietur idem F totum numerum C per citatum Axiom. 11. Deinde. Quia numerus C metitur B, ſi ab eo dematur D; metitur autem F tàm numerum C quam D; metietur etiam F numerum B. Denique. Quia B metitur numerum A, minutum numero C; quem metitur F, ſicut & numerum B: metietur etiam F totum numerum A. Quare cum numerus F vtrúmque numerum A & B metiatur: compoſiti ſunt numeri duo A & B.

Quod ſi perpetua illa alterna Diuiſione nunquam Diuiſor occurrat; qui præcisè diuidat proximum diuiſorem donec vnitas reliqua fiat: certiſſimum ſignum eſt duos numeros A & B primos eſſe, vt poſtmodum colligetur, ex probatione ſecundæ partis Propoſitionis: in qua definiri debet maxima duorum numerorum A & B menſura. Quam aſſero eſſe numerum F, & oſtendo.

Si enim numerus F non eſt maxima menſura duorum numerorum A & B: eoſdem metiatur, ſi fieri poteſt, alius quidam numerus G maior quàm F. Quia igitur G metitur totum A, & ablatum B: metietur etiam reliquum C. Per Axiom. 12. lib. 7. Elem. Rursùs. Quia G metitur totum B; metitur autem & ablatum C, metietur etiam reliquum D. Eodem modo. Idem G metiens totum C & ablatum D, metietur reliquum E. Ac denique. Cum G metiatur totum D, & ablatum E: metietur & reliquum F, maior numerus (maior enim G ponitur quàm F) minorem. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo numerus maior quàm F, metiri poteſt duos Compoſitos numeros A & B. Quare numerus F eſt omnium maxima menſura, quæ ipſos metiatur.

A	1524
B	738
C	48
D	18
E	12
F	6
G	....

Ex ea ratiocinatione iam patet altera pars Propoſitionis; nimirum. Si alternata illa Diuiſione aliquis numerus ſemper relinquatur, donec relinquatur vnitas: Duos numeros A & B eſſe inter ſe primos. Si enim per eam Diuiſionem deuentum fuerit ad vnitatem, quæ ſit F: erit F, vt proximè demonſtratum eſt, maxima duorum numerorum A & B menſura. Quæ cum ſit vnitas, nullus præter eam numerus ipſos metietur. Ergo primi tunc erunt duo numeri A & B iuxta Definitionem. Inueſtigatum ergo eſt: an duo numeri, ſint ad inuicem primi, vel compoſiti: &, ſi compoſiti fuerint, maxima eorum menſura definita eſt. Quod erat præſtandum.

Corollarium,

Corollarium.

Si quis numerus maximam duorum compoſitorum numerorum menſuram metiatur : is metietur etiam duos illos compoſitos numeros. Omnis enim numerus numerum metiens metitur etiam omnes, quos ille metitur. Vt in ſuperiori exemplo. Numerus 3 metitur F 6, numerus autem F metitur A & B. Ergo etiam numerus 3 metietur A & B. Quod idem colligitur; etiam ſi F non ſit maxima numerorum A & B menſura: eadem enim eſt argumenti vis. Colligitur etiam è conuerſo, numerum quemcunque duos numeros metientem metiri etiam maximam eorum menſuram. Si enim numerus ille ſit maxima eorum menſura cum ſeipſum metiatur, patet aſſertio : ſi verò minor ſit;eadem aſſertio concluditur ex allata demonſtratione.Oſtensũ enim eſt numerum quemcunque; qui dicatur metiri numeros A & B, vt ſi foret G; metiri neceſſario etiam numerum F : atque adeò numerus ille, ſin minùs eſt ipſe F maxima menſura, erit eo minor, ita vt eundem metiatur, vt probatum eſt.

PROP. XIX. *Probl.*

Minutiam minutiæ ; aut minutiam minutiæ : quæ & ipſa minutiæ alterius minutia ſit, ad ſimplicem totius minutiam reuocare.

Conſtructio.

A 2	C 3	E 6
B 5	D 4	F 5

Sit minutia C D minutiæ A B ad ſimplicem totius minutiam reuocanda: iuxta ſenſum Propoſitionis 16, quam conſule. Multiplica tam numeratores A & C, vt fiat E, quàm denominatores B & D, vt fiat F. Dico fractionem E F eſſe fractionem ſimplicem totius illius: cuius A B eſt fractio ſimplex.

Demonſtratio. Huius ſolutionis probatio, eſt ipſa Propoſitionis 16 demonſtratio. In ea ſiquidem oſtenſum eſt. Minutiam illam eſſe minutiam totius: quæ fit ex numeratoribus duarum, vel plurium minutiarum; quarum ſingulæ ſunt minutiæ præcedentium, in ſe ductis, vt fiat numerator: & ex earundem denominatoribus per ſe mutuò multiplicatis; vt fiat denominator. Quod hîc obſeruatur. Ergo minutia E F ex multiplicatione numeratorum A & C inter ſe : & ex multiplicatione denominarorum B & D genita; ea eſt quæ quæritur. Nec alia eſt, vt ex citata Prop. 16.

constat, plurium minutiarum ratio quarum singulæ sint fractiones fractionum antecedentium. Quare minutiam minutiæ, vel minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reuocauimus. Quod fouendum erat.

PROP. XX. *Probl.*

Minutiam ad duos terminos minimos reuocare.

Expositio.

Constat per Propositionem 5. Huius libri 2. Eas fractiones esse æquales: quarum numeratores ad denominatores eandem habent rationem; quibuscúnque tandem terminis exprimantur. Sicut ergo vnius rationis duo termini antecedens & consequens exiberi possunt tam exigui; vt minores dari non possint (qui propterea rationis illius radix dici solent) ita etiam eiusdem fractionis termini quidam existunt, quibus minores non licet reperire, sed ipsi sunt minimi. Hos ergo hoc problemate definire propositum est ob magnum, quod ex huiusmodi terminorum minimorum vsu nasciturum est compendium. Numeri enim minores non tantúm expeditiùs tractantur, sed etiam percipiuntur euidentiùs.

Constructio.

Maxima si numerum mensura secarit vtrúmque
Gignitur in minimis æqualis fractio prima.

Continent hi versiculi totius solutionis rationem: quam pauló fusiùs expono. Sit data fractio: cuius numerator sit A, denominator veró B.

A 738	C 123
F 6	
B 1524	D 254

Reperiatur per Prop. 18. huius. Maxima mensura terminorum A & B: eáque sit numerus F. Per quem terminum vtrúmque A & B diuide. Fiátque C ex diuisione numeratoris A: ex diuisione veró denominatoris B, gignatur quotiens D. Erit fractio C D, ea quæ quæritur; minimis scilicet terminis expressa, ita vt minoribus exprimi nequeat.

Demonstratio.

In primis certum est fractionem C D æqualem esse fractioni A B. Cum enim duo termini A & B diuidantur per eundē numerum F: & ex ea diuisione

ſione generentur numeri C & D: eadem erit ratio numerorum C, D: quæ eſt numerorum A & B per Prop. 4. Ergo æqualis erit fractio C D fractioni A B per Prop. 5. huius. Quod autem termini C & D minimi ſint omnium, quibus exprimi poteſt fractio A B; ex eo colligitur quod Diuiſor F ſit maximus omnium, qui vtrúmque numerum A & B diuidere poſſunt Hinc enim fit vt C & D ſint quotientes minimi: qui ex diuiſis numeris A & B per eundem Diuiſorem F gigni poſſunt. Cum enim ita ſe habeat diuiſus A, ad Diuiſorem F, vt quotiens C ad vnitatem per Prop. 40. lib. 1. huius. Eodémque iure, ita B ad F: vt D ad vnitatem. Sit autem F maximus diuiſor communis numerorum A & B. Tam ratio A ad F quàm ratio B ad F erit omnium rationum minima, quam habere poſſunt A & B ad quemuis alium numerum per Prop. 10. lib. 5. Elementorum per quam conſtat quantitatem aliquam, minorem habere rationem ad maiorem quantitatem, quàm ad minorem. Ergo eadem quantitas ad maximam quantitatem, minimam habet rationem. Ergo etiam ratio quam ad vnitatem habent duo quotientes C & D, minima eſt rationum, quam habere poſſunt duo quiuis alij numeri eandem ſeruantes inter ſe rationem, quam C & D, vel A & B. Siquidem maiores numeri quàm C & D maiorem rationem haberent ad vnitatem quam minores C & D per citatam Prop. 10. lib. 5. Sunt ergo C & D termini minimi, qui eandem habeant rationem, quam A & B. Ergo fractio C D minimis terminis exprimitur, quibus exprimi poteſt fractio vlla, quæ æqualis ſit fractioni A B. Si enim fractio aliqua fractioni A B æqualis minoribus terminis, quàm fractio C D exprimi poſſet: eadem foret ratio illius terminorum, quæ eſt terminorum C D. Per Prop. 5. huius lib. 2. Ergo ratio A ad B non exprimeretur terminis minimis C, D contra quam paulò antè probatum eſt. Quare fractio C D æqualis eſt fractioni A B & quidem terminis minimis expreſſa.

Quod ſi duo numeri A & B fuerint inter ſe primi: erunt ipſi minimi terminiquibus fractio A B exprimi poteſt. Si enim minoribus exprimi poſſet. Eadem foret ratio inter illos, quæ eſt inter A & B. Per Prop. 5. huius lib. 2. Ergo ratio inter primos numeros A & B, minoribus terminis exprimi poſſet: quod abſurdum eſt. Cum ex Propoſitione 23. lib. 7. Elem. Primi numeri, minimi ſint omnium eandem rationem habentium.

Corollarium.

Ex proximè annotatis ſequitur terminos fractionis C D: quæ cum ſit æqualis fractioni A B, minimis terminis exprimitur; eſſe numeros inter ſe primos. Niſi enim primi eſſe concedantur, admitti debet aliqua eorum communis menſura, per quam diuidi poſſint. At ſi per eam diuidantur:

generarentur duo numeri minores quàm C, D, eandem tamen cum ipsis rationem seruantes per Prop. 4. lib 2. Ergo C, D minimi non forent termini, habentes inter se rationem, quam habent A & B. Quod est absurdum. Ostensum siquidem est rationem A ad B minoribus terminis exprimi non posse, quam terminis C & D.

Corollarium. 2.

Si termini fractionis alicuius primi non sint, sed compositi: poterit fractio ad terminos minores reuocari: si per communem aliquam mensuram, etsi non minimam, diuidantur: ita vt maximæ illius mensuræ: inuestigatio omitti queat. Vt, si duo termini sint numeri pares, vt in exemplo superiori pares esse contingit A & B, vterque bifariam diuidatur: fient noui termini C & D:

A 738	B 1524
C 369	D 762
E 123	F 254

qui fractionem æqualem fractioni priori A B constituent: eadem enim est ratio A ad B, & C ad D; cum binarius diuidens A & B producat C & D. Ergo per Prop. 5. huius, fractiones illæ sunt æquales. Quod si hi noui termini C, D, pares etiam forent: rursùs bifariam vterque secaretur, & ex ea diuisione fieret minutia minoribus adhuc terminis constans. Sed quia vterque terminus C & D par non est numerus: tētandum an trifariam vterque diuidi possit. Vt hîc præstari reuerà potest, & ita habetur fractio noua minoribus numeris E & F expressa, & prioribus æqualis, licet clarè non agnoscatur an hi sint minimi termini.

PROP. XXI. Probl.

Duas vel plures minutias, integrum item & minutiam: integrum denique cum sibi adhærente minutia, & minutiam ad eandem denominationem reducere.

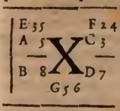
Constructio.

Pande decussatim partes in nomina: partes
Produces, Noménque dabis, si nomina ducas.

Momenti maximi, vsúsque frequentissimi est hoc problema: quod totum duplici præcepto his versiculis contento expono. Datæ sint primò duæ fractiones A B, C D: quarum denominatores diuersi sunt numeri, eásque ad eandem denominationem oporteat reuocare.

Præceptum

Præceptum 1. *Pande decussatim partes &c. Pande*, id est, multiplica, plani enim fiunt & expanduntur per multiplicationem numeri, & in superficiem explicantur. Multiplica ergo partes decussatim in nomina, id est, numeratores (hi enim indicant quot partes totius diuisi assumantur) in nomina, siue denominatores; siquidem denominatorum illud est munus, vt quænam sint partes, in quas totum diuisum est, exponant, eísque nomen tribuant, vt ad initium libri huius secundi explicatum est: Duc ergo numeratores in denominatores, sed *decussatim.*



Hoc est, vnius numeratorem in denominatorem alterius: cuius vicissim numerator in prioris denominatorem ducatur. Vt dispositis fractionibus A B, C D, vt refert appositum schema. Duc numeratorem A decussatim in denominatorem D & vicissim numeratorem C in oppositum denominatorem B fiet ex priori multiplicatione A *in* D, numerus E, numemerus autem F ex multiplicatione C in B: ille futurus est numerator fractionis æqualis fractioni A B: hîc, fractionis, fractioni C D æqualis: quarum idem quæritur denominator: qui habetur ope sequentis præcepti.

Præceptum 2. *Noménque dabis, si nomina ducas* ducantur scilicet duo denominatores B & D mutuò, vt fiat G: erit numerus G denominator communis duarum fractionum: quarum numeratores sunt E & F: ita vt fractio E G æqualis sit fractioni A B, & fractio F G, æqualis fractioni C D Atque ita duæ fractiones A B, C D in duas alias æquales E G, F G, eiusdem denominationis conuersæ sunt. Quod facilè demonstratur.

Demonstratio.

Denominator D ductus est in numeratorem A, & produxit E, ductus item est in denominatorem B, & produxit G. Ergo per Prop. 3. huius libri 2. Ita est E ad G, vt A est ad B. Ergo per Prop. 5. duæ minutiæ E G, A B sunt æquales. Eodem modo æquales probabuntur minutiæ F G, & C D. Nam denominator B ductus in numeros C & D produxit numeros F & G eiusdem rationis cum numeris C & D: atque adeò æqualem fractionem constituentes. Reductæ sunt ergo duæ datæ fractiones A B, C D ad eandem denominationem. Quod faciendum erat.

Constructio secunda.

Iam verò sint tres fractiones A B, C D, H L ad eandem denominationem reducendæ. Eadem, qua priùs methodo, hoc ipsum absoluetur. Si enim duæ priores minutiæ A B, C D ad duas E G, F G reductæ fuerint; vt traditum est, tertiæ fractionis H L denominator L ducendus erit in vtrúmque numeratorem E & F; vt fiant noui numeratores R & S. Ducetur etiam denominatór G in numeratorem H tertiæ huius minutiæ, vt fiat numerator T. Denominator autem communis nascetur ex multiplicatione denominatorum G & L, eritque numerus Z.

R 175	S 170	T 224
E 35	F 24	~
A 5	C 3	H 4
—	—	—
B 8	D 7	L 5
G 56	G 56	
	Z 280	

Demonstratio

Eadem est hîc, quæ superiùs, demonstratio. Nam numerus L multiplicat E, F, & G: & producit R, S, & Z eandem seruantes rationem quam E, F & G, & proinde æquales fractiones constituunt. Deinde, denominator G ductus est in H & L, & produxit T & Z fractionem T Z constituentes æqualem fractioni H L iuxta eandem ratiocinationem. Ecce igitur fractiones tres R Z, S Z, T Z tribus fractionibus A B, C D, H L, æquales: quarum idem est denominator Z. Qui quærebatur. Eadem ratione minutiæ quatuor, aut plures ad eandem denominationem reuocabuntur: nec diuersa demonstratio, quotquot extiterint, est futura.

Constructio tertia.

Quando contingit (vt contingit non rarò) fractionem & numerum integrum proponi: vt ad eandem denominationem reuocentur: fiet ex integro genus quoddam fractionis, vt Propositione 2. huius. Declaratum est, ei suppositâ vnitate: cum qua perinde ac si vera foret fractio, agendum erit: vt in hoc Paradigmate cernitur. In quo numerus A integer reuocatus est ad fractionem E G eiusdem denominationis cum fractione C D, seruatâ primæ constructionis methodo: nec aliam hîc demonstrationem afferre necesse est. Quod si integer cum fracto reduci debeat ad denominationem eandem cum datâ fractione. Reducetur integer ad denominationem adhærentis sibi fractionis. Tum adhibebitur

E 40		F 3
A 8	X	C 3
B 1		D 5
	G 5	

adhibebitur constructio secunda ad tres fractiones reducendas pertinens.

Scholium.

Si quando occurrat, vt vnius minutiæ denominator, alterius, cum qua ad eandem denominationem reuocanda est, denominatorem metiatur. Vt, si fractiones A B, C D reuocandæ proponerentur: quarum alterius, nempe C D, denominator D metitur alterius denominatorem B. Tunc diuidatur denominator B per D: & per productum quotientem G multiplicetur numerator C, & fiat E. Erit fractio C D reducta ad æqualem fractionem E B, & eiusdem denominationis cum A B, quæ immutata perseuerat. Ratio clara est. Nam G multiplicans C & D producit E & B eandem cum numeris C & D rationem habentes per Prop. 3. & per Prop. 5. æqualem fractionem constituentes.

	E 9
A 5	C 3
—	—
B 12	D 4
G 3	

PROP. XXII. *Probl.*

Duas vel plures minutias in vnam per additionem colligere.

Constructio.

In commune reduc fractorum nomina nomen
Partes iunge: & idem iunctis subscribito nomen.

Tota fractorum additio hisce duobus præceptis absoluitur Præceptum 1. *In commune reduc. &c.* Addendæ fractiones eodem semper denominatore constare debent; nec aliter ipsas addi possibile est: cuius ratio postmodum apparebit. Si ergo duæ fractiones A B, C D (plurium eadem est ratio) diuersæ denominationis addendæ proponantur: reuocentur in primis ad duas alias æquales fractiones eiusdem denominationis per Prop. 21. huius. Quales sunt E G, F G.

Præceptum 2. *Partes iunge: & idem &c.* Id est, fractionum ad eandem denominationem reductarum numeratores adde: genitóque per hanc additionem numero subscribe communem denominatorem: fractio enim ita constituta, ea ipsa est quæ duabus simul addendis fractionibus est æqualis. Vt in allato exemplo. Adde duos numeratores E & F, vt fiat L numerator: cui subscribatur denominator communis G: erit fractio L G, ea quæ inuestigatur; quæ scilicet duabus minutiis E G, F G siue A B, C D est æqualis.

Demonstratio

Demonstratio

A 3	C 4
—	—
B 5	D 7
E 21	F 20
—	—
G 35	G 35
L 41	
—	
G 35	

Cum duæ fractiones E G, F G eodem constent denominatore: ita erit minutia E G ad minutiam F G: vt numerator E ad numeratorem F per Prop. 10. huius. Ergo componendo, ita erunt duæ minutiæ E G, F G simul, ad minutiam F G; vt duo numeratores E, F simul, ad numeratorem F. Est autem minutia F G ad minutiam L G vt F est ad L per proximè citatam Proposit. (idem enim est vtriúsque denominator G) ergo ex æquo, ita sunt duæ minutiæ E G, F G simul ad minutiam L G: vt duo numeratores E & F simul, ad numeratorem L. Sed duo numeratores E & F simul; æquales sunt numeratori L. Ergo etiam duæ minutiæ E G, F G simul, æquales sunt minutiæ L G cum ergo eisdem minutiis E G, F G æquales sint minutiæ A B, C D: erunt etiam duæ minutiæ A B, C D simul æquales minutiæ L G. Ergo tradita methodo rectè simul additæ sunt duæ fractiones A B, C D. Quod erat præstandum.

Quod si plures quàm duæ fractiones adderentur eadem texeretur demonstratio, sicut & additionis ratio. Si etiam integri numeri cum fractis adhærentibus addi deberent: integri simul, & fracti simul adderentur: nisi integros in modum fractionis designari luberet, vt ex integris simul, & fractis vnica fractio per additionem colligeretur omnibus æqualis. Vt, si integer H cum fracto A B: & integer K cum fracto C D addendi forent: reducerentur primo loco integri ad denominationem adhærentis sibi fractionis per Prop. 21 huius. Atque ita H in modum fractionis M B exprimeretur: integer vero K, in modum fractionis N D: quæ fractiones adderentur cum adhærentibus fractionibus eiusdem denominationis & ex M B, & A B fieret fractio vnica R B, ex duabus verò N D, C D vnica S D: quæ deinde simul iuxta tradita præcepta adderentur reductis fractionibus hisce R B, S D ad eandem denominationem, nempe ad fractiones T G, V G. Quæ demùm adderentur additis numeratoribus T & V, & producto, eodem subscripto denominatore G. Verùm breuior futura videtur operatio: si ipsi integri H & K simul seorsim à fractionibus, & ipsæ fractiones seorsim addantur: facilè

	A 3		C 4
H 4 —		K 3 —	
	B 5		D 7
M 20	A 3	N 21	C 4
—	—	—	—
B 5	B 5	D 7	D 7
R 23		S 25	
—		—	
B 5		D 7	
T 161		V 125	
	G 35		

cilè enim integer ex integrorum additione collectus ad fractionem reuocabitur eiusdem denominationis cum fractione ex fractionum additione collecta, & cum eadem, si lubet, addetur.

Scholium.

Hîc paulò apertiùs exponenda est ratio: cur quælibet addendæ fractiones ad eandem denominationem priùs reuocari postulent; quàm iniri possit additio. Quod idem in subtractione fractionis ab altera fractione contingit: nisi enim fractio vtraque, tam subtrahenda, quàm ea, à qua fit subtractio; eundem nactæ fuerint denominatorem: legitima nequit esse vlla vnius ab altera subductio. Huius ergo ad minutiarum additionem, & subtractionem necessariæ conditionis ratio euadet manifesta: si attendatur fractos quoslibet numeros, qui additioni vel subtractioni subiiciũtur, ad eãdẽ formaliter vnitatem pertinere: quæ in alias & alias particulas, plures & pauciores secari concipitur iuxta denominatoris determinationem. Vt,

A 3	C 9
B 5	D 20

quãdo minutiæ duæ A B, C D proponũtur addendæ: supponitur vnitas, quæ in fractione A B in partes quinque diuiditur, vt denominator B 5 indicat (denominatoris enim officium est, vt in quot partes totum aliquod vnum diuisum sit, exponat: sicut numeratoris, vt quot ex illis partibus assumantur, explicet) at in fractione C D, eadem vnitas censetur diuidi in partes 20: quas denominator D numerat. Vnitatis ergo illius hac duplici diuersa diuisione dissectæ partes inæquales esse necesse est. Quò enim plures vnius alicuius totius partes factæ fuerint: eò minores futuræ sunt singulæ: quo pauciores; eò maiores. Hoc ipsum in vnitate concreta, materiæque immersa clarissimè patet. Passus, verbi gratia, vnus diuiditur in pedes quinque & in palmos viginti. Longè ergo breuiores sunt palmi singuli singulis pedibus. Quibus suppositis.

Si duæ fractiones addendæ, sint diuersæ denominationis; inæquales sunt partes illarum omnes. Quomodo ergo simul additæ vnum aliquod totum componere poterunt? Vt in schemate proposito. Si duæ fractiones

A 3	C 9
B 5	D 20

A B, C D passûs vnius, addi debeant: quarum prior A B passum supponit in partes quinque, siue in pedes quinque sectum: quotum tres sumantur, vt numerator exigit. Posterior verò C D eundem passum in partes viginti, quæ sunt totidem palmi, diuisum designat: quarum nouem assumuntur iuxta numeratoris C munus: si ita, nullâ factâ reductione, adderentur; quatumnam partium colligeretur numerus? An pedum? An palmorum? Non pedum: quia plures, quàm par sit, pedes contineret conflatus numerus: nec etiam palmorum: quia iusto minor eorum nu-

merus colligeretur. Adde per huiusmodi additionẽ non numerum vnum, qui vnitates omnes, ex quibus coalescit, formaliter eiusdem rationis esse exigit; sed numerum per accidens, aut duos potiùs numeros ob duas diuersas vnitatum multitudines, conflatum iri. Quare necesse est, vt ambæ fractiones addendæ eiusdem sint denominationis: sint nimirum partes eiusdem vnitatis in particulas, & multitudine, & quantitate æquales: quarum numerum idem vtriúsque fractionis denominator enunciat. Tunc enim numerator vterque partibus constabit quantitate æqualibus, eiusdémque rationis, & ad vnum aliquem partium numerum per additionem conflandum aptis. Vt in allato exemplo concretarum fractionum A B, C D vnius passus. Duæ fractiones illæ reducentur ad eiusdem denominationis fractiones G D, C D; reductâ fractione A B sola ad denominationem alterius C D iuxta Scholium Propositionis 21. antecedentis: denominator enim B metitur denominatorem D. Atque ita, vt ibi ostensum est, si diuidatur D 20 per B 5, & per quotientem 4 multiplicetur A 3; fiet G 12 numerator fractionis G D æqualis fractioni A B, & eiusdem denominationis cum C D. His porrò fractionibus additis, gignetur fractio E D ipsis æqualis. Quæ autem hîc circa eosdem denominatores ad additionem ineundam necessarios obseruata sunt: ad subtractionem perinde debent applicari ob easdem allatas rationes.

A 3	G 12	C 9	E 21
---	----	----	----
B 5	D 20	D 20	D 20

PROP. XXIII. *Probl.*

Fractionem minorem ex maiori subtrahere.

Constructio

Nomen idem facito. Partes de Partibus aufer
Et numeratori nomen subscribe relicto.

Hîc primùm desiderari videretur, antequam subtractio ineatur, an renetà possit fieri. Dari siquidem fractiones possunt huiusmodi, vt ægrè discernas vtra maior existat: quod ad subtractionem præcognosci omninò necessarium est: cum fractio maior à minore subtrahi non possit. Verùm illud ipsum hîc imperata operatio definit ad subtractionis initium, vt statim apparebit: & ex Propositione 15. colligi potest.

Præceptum 1. *Nomen idem facito.* Reuoca ſcilicet vtrámque fractionem tam ſubtrahendam; quam eam, à qua fit ſubtractio, ad *idem nomen* hoc eſt, ad eandem denominationem. Vt ſi proponeretur fractio C D ſubducenda à fractione A B. Hæc ad fractionem E G; illa ad F G per Prop. 21. huius reuocabitur. Quod dum abſoluitur, patet quod paulò ante quærebatur; nimirum, vt dignoſceretur, vtra duarum fractionum A B, C D maior, vtra minor foret. Cum enim fractiones E G, F G fractionibus A B, C D ſint æquales earúmque idem ſit denominator G: Eadem erit ratio fractionis E G ad fractionem F G, hoc eſt, fractionis A B ad fractionem C D: quæ eſt numeratoris E ad numeratorem F per Prop. 10. huius. Quare ſi E maior, aut minor extiterit, quàm F: etiam fractio A B, maior aut minor exiſtet, quàm fractio C D.

E 26	F 18	
A 5	C 3	H 2
—	—	—
B 6	D 4	G 24
G 24		

Præceptum 2. *Partes de partibus aufer &c.* Deme ſcilicet numeratorem (qui partes fractionem conſtituentes indicat: eóque nomine *Partes* hic dicitur) fractionis ſubtrahendæ à numeratore fractionis maioris: & reliquo numero tanquam numeratori eundem denominatorem ſubſcribe. Hæc enim fractio, ea eſt quæ per ſubtractionem reliqua fit. Vt in adducto Paradigmate. Deme numeratorem F à numeratore E: & reliquo numero H, ſubſcribe communem denominatorem G, vt fiat minutia H G reliqua poſt ſubtractionem fractionis C D à fractione A B.

Demonſtratio.

Plana eſt huius ſolutionis ratio à præcedenti Propoſitione deducta. Si enim duæ fractiones F G, H G ſimul addantur: reſtituetur ipſa maior fractio E G: ita vt illius partes quædam ſint duæ fractiones F G, H G. Detracta igitur parte F G, altera H G ſupererit reliqua; quæ inquirebatur fractionem ergo minorem ex maiori ſubduximus. Quod præſtandum erat.

Scholium.

Occurrent interdum plures fractiones à fractione vnica, vel etiam à pluribus ſubducendæ. Tunc fractiones huiuſmodi ſubducendæ in vnicam colligentur ope additionis: quæ ſubducatur à fractionibus illis pluribus in vnicam etiam collectis. Vt vnica fiat reliqua fractio: quod tamen non omninò neceſſarium eſt. Poterunt enim fractiones omnes ſubtrahendæ, ſeorſim ſingulæ ſubtrahi, vel ab vnica, ſi ita patiatur eius quantitas, vel à pluribus; tot interim fractionibus reliquis factis: quot inſti-

tutæ ſunt ſubtractiones.

Quod ſi à numero integro fractio aliqua ſubduci debeat. Vt, ſi á numero A demenda ſit fractio C D. Tunc ſumpta vnitate ex numero A; ex ea fiet minutia E D, eiuſdem denominationis cum fractione C D ſubducenda; ita vt tam numerator eius E quàm denominator D ſint æquales inter ſe (ſic enim vnitas in fractionem ſibi æqualem conuertitur; vt patet ex Prop. 2. huius)

A 4	E 7	C 3	G 4
B 3	D 7	D 7	D 7

tum ab ea ſubducetur fractio C D; quæ ſemper minor erit quàm E D, cum hæc ſit vnitas; at C D vnitatis quædam tantùm pars: reliqua autem erit fractio C D, vna cum numero B, qui reliquus eſt à numero A poſt mutuatam ex eo vnitatem. Hinc patet quid demum præſtari poſſit aut debeat: cum à numero integro, cui adhæreat fractio; minutia, aut integer cum minutia ſubtrahi debet: aut ſi quis alius caſus occurrat; in quo plura fractionum membra verſare oporteat.

PROP. XXIV. *Prob.*

Minutiam per minutiam multiplicare.

Conſtructio.

Si partes quæras: per partes ducito partes.
Si quæras nomen, per nomen ducito nomen.

Præceptum vnicum. Hoc vnico ſeruato præcepto ratio multiplicationis fractionum continetur vniuerſa. *Ducito partes* multiplica inuicem numeratores duarum minutiarum, quæ multiplicandæ proponuntur: productus enim numerus erit numerator fractionis per multiplicationem generandæ. Cuius denominator, vt ſtatuatur, *per nomen ducito nomen.* multiplica ſcilicet duos denominatores duarum fractionum ſeſe multiplicantium: numerus enim ex ea multiplicatione productus, erit denominator fractionis per multiplicationem duarum fractionum producendæ: cuius numerator, ductis in ſe mutuò numeratoribus earundem fractionum iam eſt inuentus. Multiplicationis huius hoc eſto ſpecimen. Multiplicandæ ſunt duæ minutiæ A B & C D. Duc numeratores A & C in ſe mutuò, vt fiat E. Duc item in ſe mutuò denominatores B & D, vt fiat F. Erit fractio E F ea ipſa: quæ per multiplicationem duarum fractionum A B, C D producitur.

A 5	C 3	E 15
B 6	D 4	F 24

Demonſtratio

Demonstratio.

Fractionis C D multiplicantis numerator C, ducatur in denominatorem B multiplicatæ fractionis A B, & fiat numerus G. Erit fractio E G æqualis fractioni A B G. Nam numerus C multiplicās duos numeros A, B generat numeros duos E, G. Ergo E, G, in eadem sunt ratione cum A, B per Prop. 3. libri huius. Ergo fractionem æqualem constituunt per Prop. 5. Per quam fractio G F æqualis etiam erit fractioni C D eò quod denominator B multiplicans C & D, produxerit duos numeros G & F. Quibus positis.

A 5	C 3	G 18	E 15
B 6	D 4		F 24

Cum sit vt fractionis E G numerator E ad denominatorem G: ita numerator A fractionis A B fractioni E G æqualis, ad denominatorem suum B per Prop. 5. Vt autem A ad B; ita per Prop. 12. est fractio A B ad totum suum, quod est vnitas. Ergo ita erit E ad G, vt fractio A B ad vnitatem. Sed vt E ad G; ita est fractio E F, ad fractionem G F, per 10. huius. Ergo vt fractio A B ad vnitatem; ita est fractio E F ad fractionem G F. Sed fractio G F æqualis ostensa est fractioni C D. Ergo vt fractio A B est ad vnitatem: ita est fractio E F ad fractionem C D. Et inuertendo. Vt vnitas ad fractionem A B multiplicantem: ita erit fractio C D multiplicata ad fractionem E F. Ergo fractio E F per Prop. 28. libri prioris, vel Prop. 6. huius ea est, quæ produci debet ducta fractione A B in fractionem C D. Rectè igitur inuenta est fractio E F quod erat faciendum.

Scholium

Hoc scholio varias obseruationes complectar: quæ non tantum fractorum multiplicationem, de qua nunc agitur; sed etiam diuisionem, de qua haud multò post agendum erit, Imò & doctrinam minutiarum vniuersam non mediocriter illustrabunt. Inter quas occurrit hæc primo loco.

Prima obseruatio. Si numerus integer, & minutia in se mutuò duci debeant: integro subscribatur vnitas, vel fiat quædam quasi fractio. Tum traditum præceptum obseruetur. Multiplicentur scilicet numeratores inter se, & similiter denominatores: ex illorum enim multiplicatione, numerator; ex istorum, denominator fractionis producetur; quæ ductâ fractione in numerum integrum generare debet. Vt si integer A multiplicandus sit per fractionem C D: vnitate B integro A subscriptâ; vt fiat quasi fractio A B; ducentur in se nume-

A 4	C 3	E 12
B 1	D 5	F 5

ratores A, C & B, D denominatores: vt habeantur termini E, F, qui fractionem continent ex multiplicatione fractionum A B, C D productam.

$$\frac{A\,4}{B\,1} \quad \frac{C\,3}{D\,5} \quad \frac{E\,12}{F\,5}$$

Nec alia est huius multiplicationis demonstratio; quam quæ allata est superiùs. Hîc porrò obiter obserua numerum quemlibet integrum, qualis est hîc A, fracti formam nullo valoris sui detrimento induere; quoties ei supponitur vnitas; quæ denominatoris officio fungatur: vt reuéra fungitur. Nam censetur totùm, non quidem in partes distributum; sed vnicum, per denominatorem B designari: quod totum vnicum, siue vnitatem; quater assumit numerator A; vt scilicet efficiatur numerus quatuor vnitatibus constans.

Secunda obseruatio. Si numerus integer, cui adhæreat quæpiam fractio; per fractionem multiplicandus sit: vt si integer A cum fractione K L multiplicari debeat per fractionem C D: ratio duplex iniri poterit. Poterit scilicet vel multiplicari integer seorsim, & seorsim fractio; vt fiant duæ fractiones E F, G H: quæ deinde per additionem colligantur in vnicum numerum fractum M N. Vel certè, primo loco duæ fractiones A B, k L simul addantur tum fractio P R per eam additionem collecta multiplicetur per fractum C D: idem enim, quî priùs, numerus fractus M N producetur.

$$\frac{A\,4}{B\,1}\ \frac{K\,2}{L\,3} \quad \frac{C\,3}{D\,5} \quad \frac{E\,12}{F\,5}\ \frac{G\,6}{H\,15}$$

$$\frac{P\,14}{R\,3} \qquad \frac{M\,42}{N\,15}$$

Ex iis percipias quid præstari debeat: quando minutiarum sese multiplicantium vtraque pluribus membris constat. Vel enim vtriúsque membra primo loco in fractionem vnicam colligentur per additionem, & sic collectæ mutuò in se ducentur, vt vnica generetur fractio. Vel singula membra per singula multiplicabuntur; singulíque hoc modo producti numeri fracti addentur simul; vt habeatur numerus vnicus ex multiplicatione productus. Quæ per partes inita multiplicatio demonstratur per Prop. 1. lib. 2. Elem. Vel per Coroll. ex ea deductum. Constat enim ex Propositione illa, sicut etiam in multiplicatione integrorum memini, eundem numerum generari ex numero insecto in insectum numerum ducto, qui ex insecto in alterius partes omnes, quotquot extiterint, ducto producitur. Constat item eundem numerum produci ex insecto in insectum; qui producitur, si vtriúsque in partes quotcunque distributi partes singulæ vnius, in partes omnes, & singulas alterius multiplicentur. Consule Propositionis 38. lib. 1. scholium. Industria secunda.

Tertia obseruatio. Ad calcem expositionis Propositionis 6. huius libri 2. obseruaui obiter non rarò contingere; vt productus ex mutua duarum fractionum

fractionum multiplicatione numerus, vtráque, vel alterutra earum minor comperiatur: idque hoc loco, qui difficultatis illius explanationi debetur, me iterum expositurum clariùs, fidem dedi: quam cumulatè præſto. Itaque exempli loco ſit multiplicatio fractionum A B, C D quæ in ſe ductæ producunt minutiam E F: quæ vtraque ſeſe multiplicantium fractionum minor eſt. Quod ex natura multiplicationis ita fieri neceſſarium eſt, vt loco citato memini, & expoſui. Si enim vnitas in modum fractionis G H

G 4	A 3	C 2	E 6
H 4	B 4	D 5	F 20

deſignetur: ita ſe debet habere per 6. huius. Fractio G H ad fractionem A B multiplicantem: vt ſe habet fractio C D multiplicata ad fractionem E F genitam per multiplicationem, Sed fractio G H maior eſt fractione A B (hæc enim vnitatis G H pars quædam tantùm eſt.) Ergo & fractio C D fractione E F maior eſt per Prop. 14. lib. 5. Elem. Eodem modo probabitur fractio A B maior, quàm E F. Nam vt vnitas ad fractionem C D multiplicantem; ita eſt fractio A B multiplicata ad E F productam per multiplicationem. Sed vnitas ſemper maior eſt vnitatis fractione C D. Ergo & fractio A B maior eſt fractione E F. Ita vt quoties duæ veræ minutiæ, hoc eſt, vnitate minores in ſe multiplicantur, ſemper producatur fractio minor, quàm earum vtraque. Atque ea quidem certiſſima eſſe conuincit hæc ratiocinatio. Verùm, id quomodo fiat, vix ſatis planè mens aſſequatur. Conſulenda igitur hîc eſt, vt ſæpe aliàs in huiuſmodi obſcuritate, Geometrica: quæ rem totam ipſis oculis expoſitura eſt, & Paradoxum hoc ſolutura.

In primis ergo memineris, quod ad Propoſitionem 29. lib. 1. declaratum eſt, duos quoſlibet numeros ſeſe mutuò multiplicantes numerum planum producere; cuius latera ſint ipſi numeri in ſe ducti. Quod idem

in fractionum multiplicatione fieri existima. Itaque in linea quapiam recta I M designa partes quatuor æquales, tot scilicet quot vnitates continet denominator B fractionis A B: ex quibus tres M O distingues exprimentes eiusdem fractionis numeratorem A. In altera deinde recta linea M T ad priorem perpendiculari particulas quinque, vt exigit fractionis C D denominator, assume: quarũ duæ M S numeratorem eiusdem fractionis C D exprimentur. Denique rectangulum I T constitue lateribus M I, M T compræhẽsum: quod per singulas partes ductæ cancellatim lineæ rectæ in quadratula distinguant. Habes in hac delineatione minutiarum sese multiplicantium formam vniuersam.

A 3	C 2	E 6
B 4	D 5	F 20



Ecce enim. Duo denominatores M I, M T siue B 4, & D 5 in se ducti generant rectangulum I T, siue denominatorem F: quot enim quadratulis constat rectangulum I T, tot constat vnitatibus denominator F. Rursus rectangulum O S; quod comprehenditur duobus numeratoribus M O, M S, siue A & C; exhibet suis quadratulis numeratorem E: tot enim quadratulis constat, quot constat vnitatibus numerator E. his declaratis rectangulum O S ad rectangulum I T comparatum, exhibet absolutissimè fractionem E F ex multiplicatione fractionum A B, C D generatam. Attendamus iam quænam intercedat ratio inter rectangulum, O S, & rectangulum I T; maiorne, an minor sit, quam ratio numeratoris A ad denominatorem B; aut numeratoris C ad denominatorem D: ex eo enim sequetur per Prop. 5. huius. Maiorem, vel minorem esse fractionem E F, fractionibus A B, C D; ex quarum multiplicatione orta est. Age itaque. Ratio rectanguli O T ad rectangulum I T eadem est per 1. lib. 6. Elem. quæ basis O M ad basim I M. Sed ratio O M ad I M eadem est cum ratione numeratoris A ad denominatorem suum B. Ergo ratio A ad B eadem

dem est, quæ rectanguli O T ad rectangulum I T. Sed rectangulum O S ad rectangulum I T minorem habet rationem quàm rectangulum I S ad idem rectangulum I T per Prop. 8. lib. 5. Elem. Ergo rectangulum O S ad rectangulum I T minorem habet rationem, quam numerator A ad denominatorem B. Sed ratio rectanguli O S ad I T eadem est cum ratione E ad F. Ergo ratio E ad F minor est ratione A ad B. Ergo per Prop. 5. huius. Fractio E F minor est fractione A B. Eadem ratiocinatione demonstrabitur altera fractio C D maior eadem fractione E F.

Nam rectangulum I S ita est ad rectangulum I T, vt M S ad M T, siue vt numerator C ad denominatorem D. Rectangulum autem O S ad rectangulum I T, siue numerator E ad denominatorem F; minorem habet rationem per Prop. 8. lib. 5. Eucl. quam I S ad I T, siue quàm C ad D. Ergo fractio C D per Prop. 5. huius. Maior est fractione E F. Quæ demonstratio, cum semper eodem modo institui possit quoties veræ fractiones duæ, hoc est, vnitate minores in se mutuò ducentur: concludendum est fractionem ex earum multiplicatione productam, minorem semper fore vtráque earum sigillatim sumpta.

Iam vero si fractio quæpiam vera & propriè dicta per vnitatem in modum fractionis expressam multiplicetur: producetur vera fractio, atque adeò minor vnitate multiplicata: æqualis verò fractioni multiplicanti. Vt si vnitas A B in modum fractionis expressa & fractio C D inter se mutuò multiplicentur: producetur fractio E F æqualis fractioni ipsi C D, sed minor quàm fractio A B; siue quàm vnitas. Nam cum numerator A æqualis sit denominatori B: dum A multiplicat C, & producit E, & denominator B multiplicat denominatorem D, & producit F: ita erit E ad F, vt C est ad D per Prop. 3. huius. Idem enim numerus ducitur & in C, & in D. Ergo per Prop. 5 huius. Fractio E F æqualis est fractioni C D. Quod cum ita sit. Fractio E F erit minor vnitate A B: nam minutia C D, cũ supponatur vera & propriè dicta fractio, est vnitate minor. Sed minutia E F æqualis est fractioni C D. Ergo E F minor est quam A B, hoc est quàm vnitas. Quod sanè eleganter ac euidenter ostendit diagramma Geometricum.

A 5	C 3	E 15
B 5	D 4	F 20

Ecce enim vnitatis siue fractionis A B numerator A est tota linea recta M T. Denominator autem B, est ipsa etiam linea M T. Fractionis autem C D numerator C exhibetur linea M O. Denominator autẽ D, lineà M I Ducantur in se mutuò numeratores M T, M O; producetur rectangulum O T: quod exprimit fractionis E F numeratorem E. Ducantur etiam in se denominatores M T, M I: gignetur rectangulum I T, siue denominator F, fractionis eiusdem E F. Quibus positis. Constat rectangulum O T ad rectangulum I T ita se habere; vt basis M O, se habet ad basim M I per Prop. 1. lib. 6. Elem. Ergo etiam ita se habet E ad F, vt C ad D. Ergo per Prop.

5. huius. Fractiones C D, & E F sunt æquales: & fractio E F minor est quàm vnitas, siue fractio A B. Vt habet hic obseruationis casus.

Sed esto denique alterutra fractio maior vnitate, & impropriè dicta fractio: altera verò vnitate minor. Hæ, si in se ducantur, quam habitudinem habitura est fractio per hanc multiplicationem genita ad singulas mutuò in se ductas fractiones? Respondeo in primis fractionem ex ea multiplicatione productam, siue ea integro futura sit maior, siue minor; maiorem semper fore ea fractione, quæ vnitate minor est; alterà verò, quæ vnitate maior est, semper minorem. En exemplum.

A 8	C 3	E 24
—	—	—
B 5	D 4	F 20

Fractio A B maior est vnitate, & C D vnitate minor: quibus in se mutuò ductis producitur minutia E F. Minutia hæc E F; maior quidem est quàm C D; at minor quam A B. Ratio eadem est, quæ superiùs est allata ex natura multiplicationis. Est siquidem vnitas ad fractionem A B multiplicantem; ita fractio C D multiplicata ad E F per multiplicationem productam. Sed vnitas ex hypothesi minor est quàm minutia A B. Ergo per Prop. 14. lib. 5. Eucl. minutia C D minor est quàm E F. Quod est primò assertum, at è conuerso. Cum vnitas sit ad fractionem C D multiplicantem; vt fractio A B multiplicata, ad E F per multiplicationem, genitam: sit autem vnitas ex suppositione maior quàm fractio C D: erit & A B maior quàm E F per citatam Euclidis Prop. 14 lib. 5.

Respondeo secũdò. Si fractionis vnitate maioris numerator eandem habeat rationem ad denominatorem suum quam denominator fractionis vnitate minoris ad suum numeratorem: tunc huiusmodi fractiones, si in se ducantur, generare fractionem vnitati æqualem. Vt, numerator

A 8	C 3	E 24
—	—	—
B 6	D 4	F 24

A fractionis A B, ita est ad denominatorem B; vt denominator D fractionis C D, est ad numeratorem C. Hæ fractiones in se ductæ fractionem generant E F, vnitati necessariò æqualem. Clara est ratio. Nam cum sit A ad B, vt D ad C. Planus numerus E ex primo A in quartum C ducto genitus; æqualis est numero F, qui ex secundo B in tertium D ducto producitur per Prop. 48. lib. prioris. Cum ergo fractionis E F numerator & denominator sint æquales: æqualis erit vnitati fractio E F per Prop. 2. libri huius 2. Ex qua conclusione sequitur etiam responsio proxima huiusmodi.

Respondeo itaque tertiò. Minutias illas duas, quarum vna maior est vnitate, altera vnitate minor; illiúsque numerator ad denominatorem suum maiorem rationem habet: quàm huius denominator ad suum numeratorem: si in se mutuò ducantur, genituras fractionem vnitate maiorem vt, si fractionis A B vnitate maioris numerator A maiorem ratio-

nem

nem habet ad denominatorem B : quàm fractionis C D denominator D ad suum numeratorem C : si in se ducantur mutuò, fractionem producturas E F vnitate maiorem. Nam si à numeratore A quantitas aliqua demeretur ; huiusmodi, vt reliqua ad denominatorem ita se haberet, vt se habet denominator B ad numeratorem C. Tunc, vt paulò ante ostensum est, multiplicatio earum, minutiam produceret vnitati æqualem. Ergo ante illam à numeratore detractionem, fracta minutiæ multiplicatione, vnitate maior minutia nasci debet. Cum enim hæc multiplicatio absoluatur ductis denominatoribus B & D in se mutuò : ductis item numeratoribus A & C : si eorum alterutor augeatur, vel minuatur : maior vel minor ex eorum multiplicatione nascetur numerator minutiæ per multiplicationem producendæ ; maiore autem vel minore numeratore posito, eodem posito denominatore ; maior vel minor existit fractio per Prop. 10. libri huius 2. qua constat fractiones quaslibet ; quarum idem est denominator, ita se habere inter se, vt se habent inter se earum numeratores. Cum ergo harum duarum minutiarum vna, ea scilicet, cuius numerator æqualis est denominatori, sit vnitati æqualis ; altera, cuius numerator denominatore maior est, vnitate maior erit.

A 10	C 3	E 30
B 6	D 4	F 24

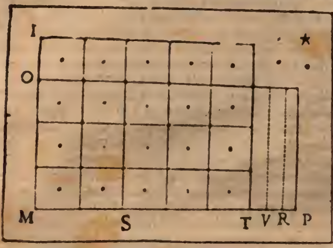
At verò si duarum fractionum A B, C D, quarum illa vnitate maior est, hæc vnitate minor. Numerator A ad denominatorem B, minorem rationem habeat, quàm denominator D ad suum numeratorem C. Si in se ducantur hæ fractiones, fractio producetur E F vnitate minor. Nam si augeatur ita numerator A, vt eadem sit ratio A ad B ; quæ est D ad C : tum demum, si fractiones A B, C D multiplicentur : fractionem producent vnitati æqualem, vt probatum est paulò ante. Ergo numeratore A existente minore, quàm vt eius ratio ad B sit eadem cum ratione D ad C : eisdem multiplicatis minutiis : minor producetur fractio E F, vnitate. Quod hic asserebatur.

A 7	C 3	E 21
B 6	D 4	F 24

Hoc ipſum in Geometrico diagrammate intueri licet euidentiſſimè.

A 2	C 3	E 6
B 5	D 4	F 20

Deſignetur enim fractionis A B vnitate maioris numerator A, linea M R; denominator autem linea M T. fractionis autem C D vnitate minoris numerator ſit M O, denominator M I. Sitque primò numerator M R ad denominatorem M T. Vt denominator M I ad numeratorẽ M O. rectangulum ergo O R a numeratoribus M R, M O, ſiue A & C, comprehenſum (quod exhibet fractionis E F numeratorem E) æquale eſt per 16. lib. 6. Eucl. rectangulo I T comprehenſo à denominatoribus M T, M O; ſiue B & D (quod eſt fractionis E F, denominator F.) Ergo tunc fractio illa O R, O T ſiue E F vnitati eſt æqualis per Prop. 2. huius libri 2. quod ſi ponatur M P maior quàm M R; ita vt ſit maior ratio M P ad M T quàm M I ad M O, hoc eſt, maior ſit ratio numeratoris A ad denominatorem B; quàm denominatoris D ad numeratorem C: maius erit rectangulum O P, quàm rectangulum I T, hoc eſt, E quàm F. Ergo fractio E F in eo caſu maior eſt vnitate. At verò ſi ponatur M V. Siue numerator A, minor quàm M R; ita vt minor ſit ratio M V ad M T; quàm ſit M I ad M O, hoc eſt, A ad B, quàm D ad C; minus erit rectangulum O V rectangulo I T, hoc eſt, planus numerus E ex numeratoribus A & C in ſe ductis genitus; plano numero F, ex denominatoribus B & D mutuò multiplicatis producto. Ergo fractio E F minor eſt vnitate per Prop. 2. libri huius 2. Determinata ergo eſt, & apertè definita habitudo fractionum quæ ex multiplicatione duarum quarumlibet fractionum producuntur.



Nam ſi vtraque fractio A B, C D ſit vera fractio, hoc eſt, vnitate minor, ſi in ſe ducantur, producent fractionem E F vnitate, & vtraque fractione A B, C D minorem. At verò ſi fractio A B ſit vnitate maior: producetur

producetur quidem ex fractione A B, C D fractio E F minor fractione A B, maior autem fractione C D. Poterit tamen minutia illa E F producta per multiplicationem fractionum A B, C D. Vnitati æqualis esse, & vnitate maior, aut vnitate minor. Æqualis erit E F vnitati: si eadem fuerit ratio numeratoris A ad denominatorem B; quæ est denominatoris D ad numeratorem C. Vnitate autem maior erit E F: si maior sit ratio A ad B; quam D ad C: contrà verò, si minor sit ratio A ad B; quàm D ad C: vnitate minor erit fractio E F per multiplicationem genita quarta obseruatio. Quemadmodum, vt lib. 1. Prop. 29. declaratum est, ex integrorum numerorum, ita etiam ex fractorum multiplicatione mutua planus nascitur numerus ex duobus planis terminis, numeratore scilicet & denominatore constans: vt ex proxima obseruatione tertia patet euidenter. In qua propositæ fractiones A B, C D sese multiplicantes, fractionem E F producunt: quam apprimè repræsentant rectangula O S, I T; vel rectangula alia eiusdem diagrammatis, prout aliæ in exemplum assumptæ sunt minutiæ. Ac proinde quamuis in generica & absoluta ratione numeri, tam productus fractus numerus E F, quam fracti duo A B, C D; ex quorum multiplicatione ille producitur, maximè conueniant, & sic inter se comparati dici possit E F maior, vel minor alterutro numerorum A B, C D, vt paulò ante explicatum est: &, vt sic, æquo iure tam E F, quàm A B, C D, & lineares, & plani, & solidi nuncupari queant: tamen habita ratione multiplicationis duorum A B, C D; ex qua pendet generatio numeri E F; erit hîc naturæ ab illis longè diuersæ. Illi enim lineares, hîc planus censeri debet: eiúsque totum rationis longè diuersæ est à toto; cuius A B, & C D sunt fractiones. Illud enim planum est, nempe in apposito exemplo, rectangulum I T; hoc verò lineare, vt M I, M T. Quare, vt sic, parùm aptè quæreretur an numerus E F maior sit, vel minor, quàm A B aut C D: sic enim diuersæ sunt speciei, nec magis possunt inter se comparari, quàm linea & superficies: quarum quantitatum neutra potest altera maior dici vel minor. Vnde euadat apertiùs illud initio propositum paradoxum, qui scilicet fieri possit: vt duo numeri sese multiplicantes numerum producant multiplicatis minorem: vt enim multiplicatio interuenit, eorum mutat speciem, nec possunt, vt sic, dici maiores, vel minores. Quod sequens obseruatio confirmatura est.

Quinta obſeruatio. Cum fractus numerus E F, vt proximè declaratum eſt, planus ſit, duobus planis terminis numeratore E & denominatore F conſtans. Vnius ad alterum ratio (quæ eſt iuxta Prop. 5. ipſa fractionis E F quantitas) componetur ex ratione laterum ipſa rectangula conſtituentium per Prop. 23. lib. 6. Elem.

A 2	C 3	E 6
B 5	D 4	F 20



Nempe ex ratione A ad B, & ratione C ad D (ſunt enim A & C latera plani E: & B, D latera plani F.) Quod clariùs cōſtat ex Geometrico diagrāmate; in quo rectangulum O S eſt, Numerator E; eiúſque latera ſunt M A, M O hoc eſt S & C Rectangulum verò I T eſt denominator F: cuius latera ſunt M I, M T; ſiue B & D. Conſtat ergo per citatam Euclidis Propoſitionem rationem rectanguli O S ad rectangulum I T componi ex ratione lateris M S ad M T, ſiue A ad B: & ex ratione lateris M O ad M I, ſiue C ad D. Vnde non mirum ſi ratio E ad F, longè diuerſa ſit ab vtráque ratione A ad B, & C ad D, & quod ex ea diuerſitate ſequitur, fractio E F. Diuerſiſſima ſit à fractionibus A B, C D ſeſe multiplicantibus. Ex quibus ſequitur ſingularis obſeruatio huiuſmodi.

Sexta obſeruatio. Ergo ſi componatur ratio, ex duabus rationibus A B, C D: ea erit æqualis rationi E F; atque adeo fractio ex illius terminis. Antecedente & conſequente, tanquam numeratore & denominatore conflata, æqualis erit fractioni E F. Vnde habetur nouus fractiones duas multiplicandi modus. Si enim continuentur duæ rationes A B, C D communi medio termino: fiat ſcilicet, vt C ad D ſiue M O ad M I; ita B ſiue M T ad aliud G I. Erit terminus hîc quartus conſequens rationis, cuius antecedens eſt A: quæ componitur ex rationibus A B, C D. Nam cum ſit vt C ad D; ita B ad G: duæ rationes A ad B, & B ad G eædem ſunt cum duabus rationibus A ad B; & C ad D. Ergo ratio primæ quantitatis

$\frac{A\,2}{B\,5}$	$\frac{C\,3}{D\,4}$	$\frac{E\,6}{F\,20}$
G $6\frac{2}{3}$	H 10	

titatis A ad tertium G componitur ex duabus rationibus A ad B, & C D: componitur enim ratio A ad G, inter quas interponitur media quantitas B, ex ratione A ad B, & ratione B ad G; vt fusè explicatum, & demonſtratum eſt à me libro primo Examinis quadraturæ Circuli à R.P. Gregorio à ſancto Vincentio propoſitæ. Ita vt ratio A ad G eadem ſit cum ratione E ad F: quæ conſtituitur multiplicatis in ſe mutuò antecedentibus A & C, vt fiat E, & conſequentibus B & D, vt fiat F. Quod verum eſſe comperies; ſi tam integer A 2, quàm integer G 6 reducatur ad denominationem fractionis integro G 6 adhærentis: ex integro enim A 2 fient ſex tertiæ partes; ex integro autem G 6 fient octodecim tertiæ: quibus ſi addideris fractionem adhærentem, duas ſcilicet tertias fiet G, viginti tertiæ. Cum ergo fractio, ſex, tertiæ, & fractio viginti, tertiæ eodem denominatore 3 conſtent: ita ſe habent duæ illæ fractiones, vt ſe habent earum numeratores 6 & 20. per Prop. 10. huius libri 2. Ergo expunctis denominatoribus æqualibus (qui ſunt 3) ita erit numerator 6 ad alterum numeratorem 20, ſiue E ad F; vt numerus A, ad numerum G. Ergo fractio A G æqualis eſt fractioni E F. Sed fractio E F producitur ductis in ſe mutuò fractionibus A B, C D. Ergo etiam fractio A G ex eiſdem fractionibus in ſe ductis, producitur. Atque adeo fractio A G & E F ſunt æquales. Patet ergo quomodo, ſi duæ rationes A B, C D communi termino medio continuentur; vt continuantur A, B, G: eandem fieri fractionem ex primo termino A, vt numeratore, & tertio G denominatore: quæ fit ductis in ſe tam numeratoribus A, C quàm denominatoribus B, D. Nec alia futura eſt ratio, ſi continuentur termini fractionis alterius C D. Si nimirum fiat vt A ad B ita D ad H: erit enim ratio C ad H compoſita ex ratione C ad D, & ratione D ad H, ſiue A ad B: ex quibus componitur ratio plani numeri E, ad planum numerum F: atque adeo fractio C H, æqualis erit per Prop. 5. lib. huius 2. fractioni E F. Quare hoc modo habetur nouus fractiones, ſiue propriè dictas, & vnitate minores; ſiue impropriè, & vnitate maiores multiplicandi modus, ſi non expeditior, at elegantior, & ad totius huius ad fractionum multiplicationem ſpectantis negotij declarationem conducens non mediocriter. Vnde ſicut è reliquis allatis obſeruationibus lux accedet non exigua ad diuiſionem, quam aggredior, illuſtrandam.

PROP.

PROP. XXV. *Probl.*

Minutiam per minutiam diuidere.

Constructio.

In partes secti, sectoris ducito nomen
In nomen secti, sectoris ducito partes
Hic nomen; partes illic quotientis habentur.

Problema non solùm ad minutiarum vnitate minorum siue minutiarum verarum diuisionem pertinet; sed omnium etiam numerorum, qui minutiæ formam induunt, & per numeratorem & denominatorem designantur: esto alioqui sint numeri integri, & vnitate maiores. Vnico autem præcepto hisce versiculis contento tota huius diuisionis ars traditur.

Præceptum vnicum. *In partes secti &c.* Multiplica fracti numeri *secti partes* hoc est, numeratorem fractionis diuidendæ, per *sectoris nomen*, hoc est, per denominatorem minutiæ, quæ diuisoris munere fungitur: sic enim *partes quotientis habentur*. Habebitur scilicet numerator futuræ per diuisionem minutiæ, quotientis locum obtinentis. Deinde multiplica. *Nomen secti per partes sectoris*, id est denominatorem minutiæ diuidendæ per numeratorem diuisoris: sic enim habebitur denominator quotientis: qui numeratori iam inuento subscriptus, exhibebit institutæ diuisionis quotientem quæsitum. Hæc methodus paulò planiùs exerceretur, & ad memoriam aptiùs; si minutiæ diuidentis termini loca sua permutent: ita scilicet, vt eius numerator in locum denominatoris, denominator autem in numeratoris locum transeat: tum seruetur ratio multiplicationis tradita. Ducantur nimirum in se mutuò tum numeratores inter se, tum inter se denominatores: fiet enim fractio, quæ erit diuisionis quotiens quæsitus. Exemplum adducam illud ipsum, quod suprà in multiplicatione propositum est: in quo ductis in se mutuò fractionibus A B, C D genita est fractio E F: hîc ergo contrà. Si diuidatur fractio E F per A B; fractio altera C D futura est quotiens huius diuisionis: aut si fractio C D diuisor statuatur; ad quotientem produci debeat fractio A B. Vt hic etiam se prodat oppositio illa quæ multiplicationem inter &

$\frac{E\,6}{F\,20}$ $\frac{C\,3}{D\,4}$ $\frac{A\,24}{B\,60}$ vel $\frac{A\,2}{B\,5}$	$\frac{E\,6}{F\,20}$ $\frac{D\,4}{C\,3}$ $\frac{A\,24}{B\,60}$ vel $\frac{A\,2}{B\,5}$

& diuiſionem reperiri ſolet. Sit ergo minutia E F diuidenda per minutiam C D. Ducatur denominator D diuiſoris C D in numeratorem E, diuidendæ fractionis E F iuxta traditum præceptum: vt fiat A numerator quotientis futuri. Tum ducatur diuiſoris numerator C in denominatorem F diuidendi; vt fiat B denominator quotientis. Erit ergo fractio A B, quotiens diuiſionis huius. Qui idem habetur in ſchemate poſteriori in quo diuiſoris termini C, D loca permutarunt, vt multiplicationis methodus ſeruari poſſet. Porrò productæ ad quotientem minutiæ A B termini reduci debent ad terminos minimos per Prop. 20. huius libri 2. vt hîc reductos habes. Quod ſi eadem minutia E F diuidi debeat per minutiam A B. Inuerſis huius terminis, duc numeratores E B in ſe, vt fiat quotientis numerator C. Duc item in ſe mutuò denominatores F & A: vt fiat D, eiuſdem quotientis denominator. Erit ergo fractio C D quotiens huius diuiſionis: cuius termini ad minimos reducti, illi ipſi ſunt, qui ſuperiùs fractionem C D conſtituebant; vt vel ex hoc iam pateat minutiarum diuiſionem tradita methodo rectè inſtitui: quandoquidem fractus numerus E F productus per multiplicationem fractorum A B, C D, ſi per alterutrum diuidatur, generetur alter. Verùm aliam à priori demonſtrationem potiorem affero huiuſmodi.

E 6	B 5	C 30		C 3
---	---	---	vel	---
F 20	A 2	D 40		D 4

Demonſtratio.

Repetatur ſchema ſuperius: in quo diuiſa eſt minutia E F per minutiam C D, genitáque eſt ad quotientem fractio A B. Ducatur numerator C minutiæ diuidentis in numeratorem E minutiæ diuidendæ: & ex ea multiplicatione oriatur numerus G. Hoc poſito. Quia E multiplicans C & D, produxit G & A: erit G ad A, vt C ad D per Prop. 3. huius libri 2. Ergo per eiuſdem Prop. 5. æquales ſunt fractiones C D & G A. Rursùs. Quia C multiplicat E & F; & producit G B: erit minutia G B æqualis minutiæ E F per proximè allatam rationem. Iam, cum minutiæ duæ G A, G B eundem habeant numeratorem G: ita ſe habebit minutia G A ad minutiam G B; vt reciprocè denominator B poſterioris, ſe habet ad prioris denominatorem A per Prop. 11. huius. Ergo etiam ita ſe habet minutia C D oſtenſa æqualis minutiæ G A, ad minutiam E F; vt B ſe habet ad A. Ergo inuertendo. Ita ſe habet minutia E F ad minutiam C D; vt A ſe habet ad B. Sed vt A ad B, ita eſt per Prop. 12. libri huius 2. fractio A B ad vnitatem. Ergo fractio E F diuidenda ad fractionem C D diuidentem ita ſe habet; vt fractio

E 6	C 3		A 24
---	---	G 18	---
F 20	D 4		B 60

A B ad vnitatem. Quare per Prop. 7. huius libri 2. diuisâ fractione E F per fractionem C D: rectè inuentus est quotiens numerus fractus A B. Quod erat faciendum.

Alia minutiarum diuisionis methodus.

Aliam propono minutias diuidendi rationem: tunc præsertim commodam: quando diuidentis termini, metiuntur præcisè terminos diuidendæ. Quæ sic habet. Sit eadem fractio, quæ suprà, E F diuidenda per C D. diuide numeratorem E per numeratorem C, & fiat quotiens A: diuide item denominatorem F per denominatorem D: & fiat B: Dico fractionem A B esse quotientem huius diuisionis. Nunquid enim non restituentur termini E & F diuisæ fractionis; si tam duo numeri C, A; quàm duo D, B in se ducantur, hoc est, iuxta modum minutias multiplicandi; minutiarum C D, A B numeratores C & A simul, simúlque earundem denominatores D & B multiplicentur? Cum ergo multiplicatio totum restituat: quod dissoluerat diuisio: patet rectè institutam esse diuisionem minutiæ E F (quæ totum est diuisum) per minutiam C D; dum tradita ratione inuentus est quotiens A B.

$$\frac{E\;6}{F\;20}\qquad \frac{C\;3}{D\;4}\qquad \frac{A\;2}{B\;5}$$

Quod si termini minutiæ diuidentis terminos diuidendæ minimè præcisè metiantur, minùs commoda futura est hæc diuidendi ratio. Quotiens enim terminis simplicibus non constabit, & quædam nascetur fractionis fractio; quam ad simplicem reduci oportebit non leuiori sanè opera quàm qua prima ipsa diuisionis operatio iuxta priorem modum institueretur. Verùm, quia non tantùm ea, quæ ad praxim; sed quæ ad pleniorem numerorum cognitionem spectant; hîc tradi debent: accipe huiusmodi casus paradigma. Esto minutia E F diuidenda per minutiam C D iuxta hunc diuidendi modum: quotiens erit A B: ita vt singuli termini, tam numerator A, quàm denominator B numero integro vnà cum adiunctâ fractione constent: qui ad terminos simpliciores G, H, fractos tamen, reducti efferentur: si dicas esse octo tertias partes (ecce numerator G) nouem partium quartarum (ecce denominator H) ita vt denuò fractio G, quæ numeratoris munere fungitur erga denominatorem H, diuidenda sit per fractionem H. Ex qua diuisione nascetur quotiens L K, idem planè qui genitus fuisset; si iuxta priorem modum

$$\frac{E\;8}{F\;9}\qquad \frac{C\;3}{D\;4}\qquad \frac{A\;2\,\frac{2}{3}}{B\;2\,\frac{1}{4}}\ \ \text{vel}\ \ \frac{G\;\frac{8}{3}}{H\;\frac{9}{4}}$$

$$G\,\frac{8}{3}\qquad H\,\frac{9}{4}\qquad \frac{L\;32}{K\;27}$$

modum diuisio institueretur: ducto scilicet denominatore 4 diuisoris H in numeratorem 8 diuidendi G; vt fiat quotientis numerator L. Ducto item numeratore 9 eiusdem diuisoris H, in eiusdem diuidendi G denominatorem 3; vt fiat K quotientis denominatot. Vbi cernis eosdem planè numeros multiplicari, licet longè aliter collocatos; qui multiplicantur iuxta priorem methodum: In qua D duceretur in E; & fieret numerator L quotientis; at C duceretur in F; vnde nasceretur denominator K quotientis eiusdem. Atque ita in eo casu, si sola praxis spectetur, omittenda est hæc secunda methodus prolixior. Verùm, si præter praxim, cognitionis etiam ratio habeatur, vt haberi par est; secunda hæc methodus in vtroque casu, & cum diuisoris termini terminos diuidendi præcisè metiuntur, & cum non metiuntur; fundamentum est, cui methodus prior innitatur. Quod explicatione dignum est: vtpotè ex quo toti huic minutiarum negotio accessura est lux non mediocris.

Itaque si proximum exemplum repetatur: in quo proponitur fractio E F diuidenda per fractionē CD. Si priore methodo diuisio absoluatur: ducitur diuisoris C D denominatot D in numeratorem E diuidendi EF: vt fiat A numeratot quotientis futuri; cuius denominator B fit ex numeratore C in denominatorem F. Quod dum ita fit; assero ipsam secundam methodum diuisionis vsurpari. Expono. Ducantur in se duo denominatores F & D; vt fiat G. Ecce vt eo modo reductæ sint duæ minutiæ EF, CD ad alias duas æquales eiusdem denominationis A G & B G, vt constat ex Prop. 21. huius libri 2. Quia verò duæ minutiæ A G, B G eundem habent denominatorem G: ita se habent inter se duæ minutiæ A G, B G; vt se habent inter se duo numeratores A & B per Prop. 10. huius libri 2. deleto ergo communi illo denominarore G. Duo numeri A & B ita sunt inter se, vt inter se sunt duæ minutiæ E F, C D. Si ergo diuidatur A per B; idem quotiens gigni debet; qui gignitur diuisâ fractione E F per fractionem C D: ille siquidem quotiens indicare debet habitudinem, quam habent numeri A & B; & numeri E F, & C D: quæ cum sit ostensa eadem; idem quotiens necessariò futurus est. Est autem quotiens diuisionis numeri A per B, fractio; cuius numerator est A, denominatot autem B. Quæ fractio illa ipsa est, quam exhibet primus diuisionis modus: qui ex secundo ortum habet. Nam dum A diuiditur per B, diuidi censeri debet fractio A G per fractionem B G. Sed reticetur communis ille denominator G tanquam inutilis; eò quod numeratores ipsi A & B rationem per se exprimant; quam habent inter se minutiæ AG, B G siue ipsis æquales E F, C D. Cum ergò diuiditur A per B, patet secundam vsurpari methodum: numerator enim A, fractionis A G diuidendæ, diuiditur per

A 32			B 27
E 8			C 3
---		X	----
F 9			D 4
	G 36		

numeratorem B, fractionis B G diuidentis. Fit verò per hanc diuisionem fractio, cuius numerator est A denominator B tacito denominatore G: qui est ipse prior diuisionis modus: atque ita hic supponit posteriorem, vnde reuerà deriuatur: vt euidentiùs etiam constabit ex sequentis scholij obseruationibus.

Scholium.

Obseruationes aliquot circa minutiarum diuisionem complectens.

Prima. Vterque hîc traditus minutiam per alteram minutiam diuidendi modus adhiberi tutò potest (eadem enim est demonstratio) siue numerus integer per fractum, siue fractus per integrum diuidendus proponatur: modò integer tanquam foret numerator fractionis alicuius, vnitatem sibi adsciscat; quæ ei, velut denominatores solent, subscribatur, & reliqua obseruentur: quæ circa fractos veros & propriè dictos præcepta sunt. Quod si numero diuidendo, vel diuidenti, vel vtrique adhæreat minutia aliqua: reduci primùm debebit integer in fractionem eiusdem denominationis cum adhærente fractione per Prop. 21. huius. Debebit scilicet per fractionis denominatorē multiplicari, genitóque idem denominator subscribi: tum ad fractionem ipsam addi; vt vnicus fiat fractus numerus tam diuidendus quam diuidens: qui, vt fracti solent, deinceps tractentur iuxta traditam methodum.

Secunda. Non secùs hîc, quàm suprà in multiplicatione, occurrit exponendum paradoxum. Quomodo scilicet diuisa minutia minutiam, minutia producatur maior, quàm sit ipsa minutia diuisa. Verùm illud soluitur ex diuisionis definitione Prop. 7. huius, allata. Cum enim diuisio numeri per numerum sit inuestigatio numeri; qui ad vnitatem eandem habeat rationem; quam numerus diuisus ad diuisorem: permutando. Ita debet esse inuestigatus ille numerus, siue diuisionis quotiens ad diuisum numerum, vt vnitas ad numerum diuidentem. Sed vnitas numero diuidente maior est ex hypothesi: diuidens enim fractus supponitur, hoc est pars aliqua vnitatis. Ergo etiā quotiens maior erit numero diuiso. Quicunque tandem existat diuisus numerus siue fractus, siue integer, siue integer cum fracto. Quod vt euadat manifestius, cum momenti sit hac in se non exigui, exemplum appono. Diuiditur fractus numerus, E F (alius quilibet fracti formam indutus eius loco proponi posset) per fractum C D; sitque quotiens fractus A B. Debet A B maior esse, quàm E F. Demonstratur. Ponatur vnitas G H in modum fractionis. Quia igitur

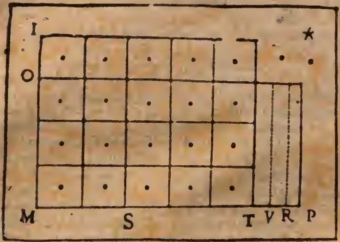
ex

E 8	C 3
---	---
F 9	D 4
A 32	G 1
---	---
B 27	H 1

ex definitione citata, ita est E F ad C D diuisus ad diuisorem; vt A B ad G H, quotiens ad vnitatem. Permutando, ita erit E F ad A B; vt C D ad G H. Sed C D minor est ex hypothesi quàm vnitas G H. Ergo etiam per Prop. 14. lib. 5. Elem. E F diuisus numerus, quicunque fuerit, minor est quàm A B quotiens per diuisionem genitus. Hoc ipsum patet manifestissimè ex diuisionis methodo. Cum enim producatur quotiens A B, ducto D in E, & C in F: ponatur autem C minor quàm D: maior erit ratio A ad B, quàm E ad F. Ergo per Prop. 5. huius libri 2. maior est fractio A B, quàm fractio E F. Probatur antec. Si C foret æqualis denominatori D, aut contrà, denominator D numeratori C: tunc D multiplicans E, & C multiplicans F; numeros producerent A, B eandem habentes rationem; q uam habent E, F per Prop. 3. Idem enim numerus duceretur in E & F. Ergo cum C ponatur minor, quàm D; dum ducitur in F numerum B minorem gignit, quàm vt ad eum numerus A possit eandem rationem habere, quam E habet ad F. Maiórque est ratio A ad B quàm E ad F. Quod idem concluderetur; si D ponatur æqualis numeratori C. Tunc enim D multiplicans E numerum A produceret minorem, quàm qui producitur nunc ex D maiore quàm C. Ergo nunc maior est ratio numeri maioris A ad B, quàm foret numeri minoris A ad eundem B per Prop. 8. lib. 5. Elem. Sed positis æqualibus C & D eadem foret ratio A ad B cum ratione E ad F. Ergo nunc C & D positis inæqualibus, maior est ratio A ad B, quàm E ad F. Ergo maior est quotiens A B, quàm diuisus numerus E F. Quod etsi iam ex iis clarissimum euaserit: iuuat tamen rem ipsam oculis subiicere allato diagrammate Geometrico eodem, quod supra ad multiplicationem propositum fuit.

In eo itaque ductis inter se fractionibus A B, C D producta fuerat fractio E F. Fractio A B designabatur lineis M S, M T; fractio autem C D, lineis M O, M I: ac denique E F, rectangulis O S, I T. quorum illud, genitum erat ex numeratoribus M S, M O; istud verò ex denominatoribus M T, M I inter se ductis.

E 6	C 3	A 2
F 20	D 4	B 5



Nunc autem conuersa operatione, proponitur fractio E F diuidenda per C D. Hoc est, fractio O S, I T planis constans proponitur applicanda ad latera M O, M I; vt habeatur fractio linearis quæ sit latitudo planæ fractionis O S, I T: cuius numerator est rectangulum O S; denominator autem, rectangulum I T. Patet ergo per hanc applicationem, siue diuisionem haberi pro quotiente, fractionem M S, M T, siue A B. Applicato enim numeratore O S, ad latus M O latitudinem facit M S, hoc est, numeratore E 6 diuiso per numeratorem C 3, generat quotientem A similiter applicato denominatore I T ad latus M I, latitudinem facit M T, hoc est, diuiso F 20 per D 4; quotiens est B 5. Vnde.

Colligitur primò. Methodum diuidendi fractiones secundo loco allatam: quâ numerator diuidendæ per numeratorem diuidentis, & denominator per denominatorem diuidi iubetur; verum esse prioris methodi fundamentum, vt superiùs monebam. Colligitur secundo, fractionem diuisam E F, minorem esse quotiente A B: eo quod rectangulum O S ad I T, minorem habeat rationem quam rectam M S ad rectam M T; atque adeò fractio O S, I T minor sit fractione M S, M T per Prop. 5. huius libri 2. Nam ratio rectanguli I S ad rectangulum I T eadem est per Prop. 1. lib. 6. Elem. cum ratione basium M S, ad M T. Sed ratio O S rectanguli minoris, ad rectangulum I T; minor est ratione maioris rectanguli I S ad idem rectangulum I T per Prop. 8. lib. 5. Elem. Ergo etiam ratio O S ad I T minor est ratione M S ad M T. Ergo per Prop. 5. huius

huius lib. 2. fractio O S, I T minor est fractione M S, M T. Sed fractio E F æqualis est fractioni O S; I T; & fractio A B æqualis fractioni M S, M T. Ergo fractio E F minor est fractione A B. Sed fractio E F est diuisus numerus; & fractio A B est illius diuisionis quotiens. Ergo quotiens diuisionis; quâ numerus fractus per fractum diuiditur, maior est ipso numero diuiso: Quod semper verum esse eodem modo concludetur: quoties diuisor fractus numerus, verè & propriè fractus, hoc est, vnitate minor supponetur, vt hactenus, & Arithmeticè & Geometricè probatum est.

Eodem modo ostendetur maior quotiens numero diuiso: si eadem fractio E F diuidatur per A B. Simulque quotiens fore, fractio altera C D. Si enim applicetur rectangulum O S ad latus M S: fiet latitudo M O. hoc est, si numerator E 6 diuidatur per diuisoris A B numeratorem A 2; fiet quotientis futuri numerator C 3 (hi enim numeri designantur dictis diagrammatis lineis) similiter: si applicetur denominator I T ad latus M T, orietur latitudo M I. Hoc est, diuiso denominatore F 20 per denominatorem B 5 nascetur quotientis denominator D 4. Quod autem fractio C D quotiens, maior sit diuiso numero E F demonstratur, demonstratâ ratione rectanguli O S ad rectangulum I T minore; quam sit ratio lineæ M O ad lineam M I: sic enim per Prop. 5. huius lib. 2. fractio O S, I T minor erit fractione M O, M I: hoc est, fractio E F fractione C D. Illud autem ita probatur. Rectangulum O T ad rectangulum I T eandem habet rationem, quam basis M O ad basim M I per Prop. 1. lib. 6 Elem. Sed ratio rectanguli O T maioris rectangulo O S, ad idem rectangulum I T, maior est per Prop. 8. lib. 5. Elem. quam ratio rectanguli O S ad rectangulum I T. Ergo etiam ratio M O ad M I maior est, quam ratio rectanguli O S ad rectangulum I T Ergo per citatam Propositionem 5. fractio M O, M I maior est fractione O S, I T. Hoc est. Fractio C D quotiens, maior est fractione E F diuisa per A C.

Hic etiam illud obserues; quod in scholio præcedentis Propositionis obseruatum fuit. Nimirum. fractionem diuisam, vt diuisam, specie differre à fractione, quæ diuisionis quotiens est, vt quotiens est. Nam diuisus numerus semper planus censeri debet: quotiens autem eius est vnum latus: atque ita secundum hanc rationem vnus altero nec maior, nec minor dici deberet; vt sic enim comparari non possunt: deposita autem hac formalitate, cum in ratione discretæ quantitatis conueniant: dici possunt ad inuicem maiores, vel minores, & aliis potiri quantitatis facultatibus.

Tertia obseruatio. Si fractio vnitati æqualis per quamlibet fractionem diuidatur. Quotiens est fractio: cuius termini sunt terminis diuisoris reciprocè

E 10	A 2	C 10
—	—	—
F 20	B 5	D 4

ciprocè proportionales, id eſt, vt numerator diuiſoris ad ſuum denominatorem; ita eſt denominator quotientis, ad numeratorem ſuum. Vt E F fractio eſt vnitati æqualis: cuius ſcilicet numerator & denominator ſunt æquales: diuiditur autem per minutiam A B; ſitque quotiens C D. Dico ita eſſe A ad B; vt eſt D ad C. Nam ſi diuiſor A B ducatur in quotientem C D; reſtitui debet ipſa fractio E F. Hæc autem multiplicatio fit ductis inter ſe numeratoribus A, C & inter ſe denominatoribus B, D. Cum ergo fiant numeri E, F æquales, duobus in ſe ductis numeratoribus A & C; & in ſe ductis denominatoribus B & D: Ita eſt per Prop. 19. lib. 7. Eucl. vel per Prop. 48. Lib. 1. huius. A ad B, vt D ad C. Quod aſſertum eſt. hinc.

Quarta obſeruatio. Si eadem fractio E F vnitati æqualis diuidatur per fractionem C D, vnitate maiorem (eſt enim fractio C D vnitate maior eò quod eius numerator C maior ſit denominatore D; ſicut fractionis A B vnitate minoris denominator B maior eſt numeratore A; quibus C, D ſunt proportionales) naſcetur quotiens A B, vnitate minor. Nam cum ex diuiſione fracti numeri E F per fractum A B, gignatur quotiens C D: viciſſim, ſi idem E F diuidatur per C D, quotiens, erit fractus A B. Quotiens enim multiplicans diuiſorem, diuiſum debet reſtituere: ita vt ſibi mutuò ſemper reſpondeant hoc in munere duo illi numeri, vt lib. 1. Prop. 43. declaratum eſt.

Quinta obſeruatio. Si numerus maior vnitate in modum fracti deſignetur; & per fractum vnitate minorem diuidatur; per diuiſionem producetur quotiens vnitate maior. Nam ſi fractus E F vnitati æqualis diuiſus per A B vnitate minorem producit quotientem C D vnitate maiorem: ſi vnitati æqualis E F augeatur, & fiat vnitate maior; ac per eundem diuiſorem A B diuidatur: multò potiori ratione quotiens C D erit vnitate maior.

Sexta, obſeru. Quando diuidendi fracti numeri numerator ad denominatorem ſuum eandem habet rationem; quam numerator diuiſoris ad ſuum denominatorem: gignitur per diuiſionem fractus quotiens vnitati æqualis. Ecce. Fractus E F diuidendus eſt per fractum C D: cuius numerator C ad denominatorem D eam habet rationem; quam numerator E

E 8	C 2	A 40
—	—	—
F 20	D 5	B 40

ad denominatorem F; producetur ex ea diuiſione fractus quotiens A B æqualis vnitati. Id eſt. Eius numerator A æqualis erit denominatori B. Nam cum termini E, F diuidendi numeri, proportionales ſint terminis C, D diuiſoris: idem fiet numerus ex primo E in quartum D ducto; qui fit ex ſecundo F in tertium C. Per Prop. 19. lib. 7. Eucl. Sed dum ducitur diuiſoris denominator D in diuidendi

diuidendi numeratorem E, fit quotientis numerator A iuxta primum diuidendi modum; per quem denominator B quotientis generatur per multiplicationem numeratoris C in denominatorem F. Ergo quotientis numerator A æqualis est denominatori suo B. Ergo in eo casu quotiens diuisionis, vnitati fit æqualis per Prop. 5. huius lib. 2. Quod asserebatur. Quod idem diuisione per secundam methodum inita probari etiam potest. Nam, cum sit E ad F, vt C ad D ex hypothesi: erit permutando, E ad C; vt F ad D. Ergo diuiso Antecedente E, per consequentem C nasci debet A denominator rationis E ad C per Prop. 2. libri 1. examinis mei Quadraturæ circuli. Qui idem denominator B esse debet, diuiso F per D: quandoquidem eadem est ratio F ad D; quæ E ad C: Ergo quotiens A B æqualis est vnitati per Prop. 5. huius lib. 2.

Septima obser. Ex obseruatione præcedendi concluditur quotientem vnitate semper minorem fore, quando minor erit numeri diuidendi numeratoris ratio ad denominatorem; quam diuisoris numeratoris ad suum denominatorem: contrà verò vnitate maiorem fore eundem quotientem quando maior erit ratio numeratoris minutiæ diuidendæ ad eiusdem denominatorem; quàm ratio numeratoris minutiæ diuidentis ad denominatorem suum. Vt si diuidendus sit fractus numerus E F per fractum C D: sitque minor ratio numeratoris E ad denominatorem F, quàm numeratoris C ad suum denominatorem D: quotiens A B minor est vnitate, id est, numerator A minor est denominatore B: sic enim fractio ipsa A B minor erit vnitate per Prop. 2. huius.

E 7	C 2	A 35
—	—	—
F 20	D 5	B 40

Ratio clara est. Si enim sit, vt E ad F, ita C ad D: quotiens A B æqualis est vnitati. Æqualis scilicet est numerator A denominatori B. At si numerator E minuatur; vt per hanc diminutionem minor sit eius ratio ad F; quàm sit C ad D: quotientis numerator A, qui gignitur ducto diuisoris C D denominatore D in numeratorem E, minor erit, quàm denominator B Ergo minutia A B tunc erit vnitate minor; vt asserui. Ex qua ratiocinatione constat etiam quotientem A B fore semper vnitate maiorem cum maior erit ratio E ad F, quàm C ad D. Definitum ergo esto, ac determinatum: quoties minutia diuidenda E F æqualis erit minutiæ C D diuidendæ, hoc est, quoties ita erit numerator E ad denominatorem suum F; vt numerator C ad suum denominatorem D (sic enim duæ minutiæ E F, C D sunt æquales per Prop. 5. huius lib. 2.) toties per diuisionem producit quotientem æqualem vnitati. At si minor sit ratio E ad F; quàm C ad D, vel, quod idem est minutia E F minor sit, quàm C D, minorem quoque vnitate fore quotientem A B; qui vnitate maior erit; si minutia E F maior fuerit quàm C D, vel maior fuerit ratio E ad F, quam C ad D.

LIBRI SECVNDI
PARS SECVNDA.

MINVTIAS DECIMARVM, SIVE decadicas complectens.

PRIORE libri huius secundi parte, minutiarum, siue fractorum numerorum facultates & praxim, satis, vt mihi videor, cumulatè prosecutus sum: vnde cuilibet colligere liceat numerorum huiusmodi tractationem tum ob duplicem, quo constant, terminum; tum ob variam eiusdem numeri, quæ sæpius occurrit, designationem, haud paulò impeditiorem esse, quàm integrorum numerorum calculum. Huius leuandæ difficultatis rationes variæ tentatæ sunt à Logistis. Astronomi quidem & Cosmographi minutias omnes, quibus sæpissime vti, ipsis incumberet, ad terminos sexagenariam rationem seruantes non sine compendio maximo reuocarunt: eóque omnes tum veteres, tum recentiores harum facultatum authores vsi sunt hactenùs: Posterisque iisdem vtendi necessitatem imposuerunt non minorem: quam primi characterum Alphabeticorum institutores lecturientibus, eos admittendi. Compendium tamen longè maius haud ita pridem obseruatum: quo breuius reperire non sit: cum eius ope fractu perinde ac integris numeris vtaris. Atque vtinam priscis illis matheseos luminibus venisset in mentem hac industria egregios illos tot partus suos tradidisse & absolutiores, & expeditiores. Sed non omnia vna fert ætas: quæque fauentibus Superis ferre contingit: non statim in ipso primo eorum exortu suis omnibus numeris tam absoluta producit, quin in dies possint euadere cultiora, vt in re, de qua initius est sermo, velut ad has institutiones maximè vtili & necessariâ, licet obseruare. Quanquam autem tam hæ per decimas minutiæ, quàm illæ per sexagesimas, quæ etiam Astronomicæ dicuntur, species quædam sint communium minutiarum, eísque apprimè conueniant omnia, quæ de fractis numeris hactenùs tradita sunt: tamen præter hæc, non pauca occurrunt, quæ, dum ad vsum adhibentur, ipsis sunt singularia: non pauca item, etsi in plurimis concordent, quæ alterum duplicis huius numeri fracti genus sibi vendicet, alterum respuat: vt propterea de vtroque, (quando neutrum tum ob necessitatem tum ob frequentem vsum omittere fas est) sigillatim sermo sit instituendus, ineundus tamen à decadicis, vt vniuersalioribus, planioribus & excepto solius antiquitatis nomine, commendatioribus.

PROP. XXVI. *Defin.*

Progreſſio numerorum Geometrica eſt quædam numerorum ſeries ſecundum eandem rationem continuatorum.

Expoſitio.

Sint numeri A, B, C, D, ea habitudine inter ſe; vt ſequens ad proximè antecedentem eandem rationem ſemper obſeruet; vt hîc, di plam.

A	B	C	D
4	8	16	32

Sit nimirum numerus B duplus numeri A; & C duplus numeri B; ipſiúſque C, duplus D: & ſic, quoad libuerit, plures adiungãtur numeri præcedentium ſemper dupli: dicitur ſeries huiuſmodi numerorum ſecundum illam rationem duplam continuatorum; ita vt idem terminus, verbi gratia B, ſit & antecedens rationis duplæ, dum refertur ad A, & conſequens, dum ad ipſum terminus C refertur: dicitur, inquam, numerorum ſic concatenatorum illa ſeries, progreſſio numerorum geometrica quæcunque ratio inter terminos obſeruetur: à quocunque numero inchoëtur; ad quemcunque deſignat: & quotcunque denique terminis conſtet, modò tribus non pauciores; ne deſit ratio illius medij vinculi communis, quo duo termini carent.

PROP. XXVII. *Theor.*

Omnis progreſſio continuari poteſt ab aliquo termino tam per multiplicationem denominatoris rationis, quàm per diuiſionem.

Expoſitio.

Sit datus terminus A; datúſque rationis denominator, ſiue quantitas,

					F	H	G
C	B	A	D	E	1	1	1
16	8	4	2	1	---	---	---
					2	4	8
	R 2	S 1					

R. Quæ multiplicet datum terminum A vt fiat B: quem rurſus R multiplicet & fiat C. Dico A, B, C veram eſſe. Progreſſionem geometricam. Cum enim idem numerus R multiplicet A & producat B: ita erit, B ad A, vt R ad vnitatem S. Per Prop. 23. lib. 1. huius. Rursùs. Quia idem R multiplicans B gene-

rat C ; ita etiam erit C ad B ; vt R ad eandem vnitatem S. Ergo ita eſt B ad A , vt C ad B tres ergo termini C, B, A ſunt continuè proportionales in ratione R ad S. Quod ſi rurſus R multiplicaret C : quartus terminus produceretur ; qui ad C , eandem haberet rationem ; quam R habet ad vnitatem S ; & ſic in infinitum. Poteſt ergo quælibet Progreſſio geometrica ab aliquo termino inchoata in infinitum continuari per continuam multiplicationem denominatoris cuiuſvis rationis : vt prior Propoſitionis pars exigit.

					F	G	H
C	B	A	D	E	1	1	1
16	8	4	2	1	--	---	--
				2	1	4	8
		R2 S1					

Poſterior eiuſdem Propoſitionis pars non minùs certa eſt. Nimirum, ſi terminus A diuidatur per rationis denominatorem,ſiue quantitatem R, continuari poſſe in infinitū progreſſioné. Factà enim termini A diuiſione per rationis denominatorem R, fiet quotiens terminus D. Ergo per Prop. 40. lib. 1. Ita eſt diuiſus numerus A ad diuiſorem R , vt quotiens D ad vnitatem S. Et permutando. Ita eſt diuiſus A ad quotientem D ; vt diuiſor R ad vnitatem S. Eodem modo diuiſo termino D per eundem diuiſorem R , genitóque quotiente E ; probabitur ita eſſe D ad E ; vt denominator R eſt ad vnitatem S. Nam vt diuidendus D eſt ad diuiſorem R, ita eſt quotiens E ad vnitatem S. & permutando. Vt diuidendus D ad E quotientem ; ita eſt diuiſor R ad vnitatem S. Sed vt R ad S , ita etiam erat A ad D. Ergo ita eſt A ad D , vt D ad E : atque adeò tres termini A D , E ſunt continuè proportionales in ratione R ad S. Quod ſi terminus E rurſus diuidatur per R : vt fiat terminus F , fractus licet numerus ; eodem tamen modo probabitur ita eſſe E ad F , vt denominator R ad vnitatem S , & ſic deinceps probabitur progreſſionem in infinitum continuari aſſumpto diuiſore eodem R : qui ſit denominator rationis inter terminos progreſſionis , ſeruandæ. Quales ſunt G, H &c. Omnis ergo progreſſio continuari poteſt tam per diuiſionem quam multiplicationem, quæ per denominatorem rationis inter terminos ſeruandæ inſtituuntur. Quod probandum erat.

Corollarium.

Hinc colligitur vnicam progreſſionem continuam,cuius termini datam rationem obſeruent , ſemper componi:ſi per denominatorem rationis datæ vnitas multiplicetur , eadémque diuidatur. Vt ſi per rationis decuplæ denominatorem Z multiplicetur vnitas A ; vt fiat B : hîc rurſus ducatur in

in eundem denominatorem, vt fiat C. Tum D &c. Tum eadem vnitas A per eundem denominatorem 10 diuidatur, vt fiat fractio E N iuxta Prop. 1. huius lib. 2. Quæ & ipsa diuidatur iterùm per eandem Propositionem, vt fiat fractus F P: & sic deinceps constituetur ex iis

			Z 10			
D	C	B	A	E	F	G
1000	100	10	1	1	1	1
—	—	—	—	—	—	—
1	1	1	1	10	100	1000
M	L	K	H	N	P	R

omnibus terminis tam maioribus, quàm minoribus vnitate; vnica geometrica progressio continua. Vt patet ex huius Propositionis demonstratione. Quod idem colligitur etiam ex Propositionibus 2. & 21. huius lib. 2. Si vnitati A & singulis vnitate maioribus terminis B, C, D per multiplicationem denominatoris Z genitis, subscribatur in modum fractionum, vnitas H, K, L, M; quia enim fractiones E N, F P, G R vnitate minores eundem habent numeratorem scilicet vnitatem E, F, G: ita erunt inter se reciprocè. Vt earum denominatores, N, P, R. Ita scilicet erit A H ad E N, vt reciprocè denominator N est ad denominatorem H: fractio autem E N ita erit ad fractionem F P, vt reciprocè huius denominator P est ad denominatorem N: & ita de cæteris insequentibus dicendum est per Prop. 11. huius lib. 2. Sunt autem harum fractionum denominatores H, N, P, R. Continuè proportionales in ratione minoris inæqualitatis. Ergo & ipsæ fractiones A H, E N, &c. Continuè sunt proportionales, sed reciprocè; in ratione scilicet maioris inæqualitatis. Rursus. Quia minutiæ A H, B k &c. eodem constant denominatore, scilicet vnitate: ita se habent inter se per Prop. 10. huius lib. 2. vt se habent numeratores A, B, C, &c. qui cum sint continuè proportionales: erunt & ipsæ fractiones A H, B K, C L continuè proportionales. Quia verò media fractio A H vnitati æqualis, eo quod constet denominatore H æquali denominatori K fractionis B K; ita est ad ipsam fractionem B k: vt numerator illius A est ad numeratorem B huius: Et quia eadem fractio A H eodem constat numeratore, quo fractio E N: ita erit per Propositionem citatam fractio E N ad fractionem A H, vt denominator N ad denominatorem H siue ipsi æqualem numeratorem A. Sed denominator N fractionis E N, æqualis est numeratori B, fractionis B K. Ergo minutia E N ita est ad minutiam A H, vt A H ad B K in ratione scilicet A ad B, vel H ad N. Ergo tota illa series minutiarum; quarum media, inter maiores vnitate, eáque minores, est vnitas A H; continua est progressio geometrica: nec interest siue vnitate minorum numerator, maiorúmque denomitor sit vnitas, vt in allato paradigmate, siue alius quiuis numerus: eadem enim omnium est demonstratio.

PROP. XXVIII. *Defin.*

Exponentes terminorum ſuperioris Geometricæ Progreſſionis ſunt numeri ordinis vulgaris numerorum; qui quotus ſit ab vnitate quilibet terminus indicat.

Expoſitio.

Sit Geometrica Progreſſio ei ſimilis, quæ præcedentis Propoſitionis Paradigmate allata eſt, terminis conſtans vnitate A H tam maioribus, quàm minoribus: illi ſunt B, C, D. Iſti E, F, G. Excluſo vtrique cõmuni, termino A H. Iis ergo terminis characteres

D	C	B	A	E	F	G
1000	100	10	1	1	1	1
1	1	1	1	10	100	1000
M	L	K	H	N	P	R
3	2	1	0	1	2	3

appone numerales initio facto à medio termino A H, ſiue vnitate; cui nihili figura O adſcribatur: reliquæ vero Arithmeticæ figuræ, reliquis deinceps terminis apponantur tum ad dextram, vt N, P, R: tum ad læuam, vt K, L, M. Hi ergo vtrique numeri indicant quotus quiſque ſi terminus progreſſionis ab vnitate. Vt, exempli causâ, numerus R 3, indicat terminum G progreſſionis eſſe tertium illius terminum: qualis etiam eſt terminus D, progreſſionis terminorum vnitate maiorum ad læuam conſtitutorum, vt exponens M 3 appoſitus deſignat, & ſic de cæteris hinc hauritur ſingulorum illorum terminorum vnitate ſiue minorum, ſiue maiorum diſtincta nuncupatio: qua termini illi dicuntur minuta prima, ſecunda, tertia &c. vel abſolutè prima, ſecunda &c. prout exigunt ipſis appoſiti exponentes 1, 2, 3, &c. Atque hoc eſt exponentium hac in materia (alia enim ſunt aliis in caſibus eorum officia) præcipuum munus: de quo pluribus dicendum erit inferiùs.

PROP.

PROP. XXIX. *Defin.*

Minutiæ ſiue minuta decimarum ſunt fracti numeri : quorum denominator eſt terminus aliquis Geometricæ progreſſionis : quæ ab vnitate per rationem decuplam protenditur.

Expoſitio.

Sit progreſſio Geometrica terminis conſtans A, B, C, D, &c. quorum primus ſit vnitas A. Secundus verò B, qui præcedentis A ſit decuplus. Tertius C eandem decuplam rationem ſeruet ad proximè antecedentem B. Quartus D eodem modo ſe habeat ad C : & ita in infinitum progreſſio

A	B	C	D	$\frac{H\ 7}{B\ 10}$	$\frac{K\ 32}{C\ 100}$	$\frac{L\ 324}{D\ 1000}$	&c.
1	10	100	1000				

decuplæ rationis extendatur ducto rationis decuplæ denominatore 10, in terminum quemlibet proximè conſtitutum. Erunr omnes huius progreſſionis termini, apti : vt cuiuſvis minutiæ decadicæ denominatores exiſtant. Nec alij vlli numeri hoc in genere minutiarum decadicarum fungi poſſunt officio denominatoris. Tales ſunt minutiæ H B, K C, L D : quarum denominatores B, C, D, &c. ſunt termini Progreſſionis Geometricæ ab vnitate naſcentis, & decuplâ ratione deinceps creſcentis : vt propter hanc decuplam rationem, quâ huiuſmodi minutiarum denominatores generari neceſſe eſt ; merito hæ minutiæ dicantur, minutiæ decimarum. (Scilicet partium) ſiue minutiæ decadicæ, aut etiam, minuta decadica eòque nomine à cæteris genericè ſumptis fractionibus diſtinguantur.

Cum ergò cuiuſvis fractionis denominator eo munere fungatur : vt numerum partium, in quas vnum aliquod totum diuiſum eſt, exprimat : quarum aliquot eiuſdem fractionis numerator aſſumendas ſignificat, vt Prop. 1. libri huius 2. declaratum eſt : concipi debet vnum aliquod, ſiue vnitas in abſtracto in partes primum 10 ſecari. Deinde harum 10 partium quælibet in 10 rursùs particulas diſtribui : per quam diuiſionem vnitas illa prima, iam in partes 100 diſtributa reperitur. Quod ſi tertio quælibet harum 100 partium, in particulas 10 diuidatur : vnitas in partes 1000 diſtracta eſt : atque ita multiplicatur partium vnitatis numerus in infinitum per decuplam rationem. Dum ergo harum partium aliquot aſſumuntur ; quas numerator iudicat, vera fractio decadica conſtituitur ; & vt fractiones

fractiones efferri mos est, efferri debet. Ita fractio H B schematis dicetur Septem decimæ partes vnitatis. Fractio vero k C, triginta duæ centesimæ, & ita de cæteris in modum fractionum communium porrò hoc in genere decadicarum fractionum obserues idem contingere quod in communibus fractionibus fieri obseruatum est, nimirum earum quasdam esse propriè dictas fractiones: quarum numerator denominatore minor est; atque adeo vnitate minores sunt: quasdam verò impropriè dictas: quæ numeratorem denominatore maiorem sibi vendicant; & vnitate maiores euadunt: quales forent A B, C D &c. quarum A B dicetur quindecim decimæ: posterior verò C D tercentæ quadraginta quinque centesimæ: plures scilicet partes assumunt, quàm eas, in quas vnitas diuisa est iuxta denominatoris determinationem; atque vnitate maiores euadunt. Vt propterea minutiæ maiores ritè vocentur: dum minutiæ propriè dictæ, minutiæ, absolutè dicuntur.

A 15	C 345
B 10	D 100

PROP. XXX. *Postulatum*

Quaslibet decimarum minutias, siue decadica minuta per exponentem denominatoris exprimere concedi debet.

Expositio.

Propositione proximè antecedente exposui quamlibet decadicam minutiam nancisci denominatorem; qui sit terminus aliquis geometricæ progressionis ab vnitate inchoatæ, & per decuplam rationem in infinitum propagatæ, siue ea fractio sit, vt ibidem monui; vnitate minor, siue vnitate maior, & impropriè dicta. Propositione autem penultimâ declaraui, quemlibet terminum eiusdem progressionis exponentem sibi proprium vendicare ex numeris naturalis numerorum seriei assumptum; quo quasi charactere demonstretur quotum locum terminus quilibet dictæ progressionis occupet ab vnitate. Hac verò Propositione, quæ postulati formam obseruat, ostendo quamlibet decadicam fractionem loco termini progressionis illius, qui denominatoris officio fungitur, substitui commodè posse exponentem eidem termino debitum in ea progressione; atque adeo exponentis ope non minùs aptè exprimi minutiæ propositæ valorem quàm per ipsum terminum progressionis, qui ex ipsa rei natura, fractionis est denominator explicitus, & distinctus. Quod etsi verum sit in vniuersum in omni progressione Geometrica per quamcunque rationem extensâ; qualis inter cæteras Astronomica foret; quæ per rationem sexagecuplam

ſexagecuplam procedit, & de qua alius erit diſſerendi locus : tamen quia in decadicâ nunc verſamur; de ea ſola mentionem feci, quo clariùs explicetur, vt præ cæteris neceſſaria. Quamquam etiam quæcumque de hoc minutiarum decadicarum genere dici continget, cuilibet poſſint leui operâ applicari.

Repetatur ergo progreſſio Geometrica decuplæ rationis cuius termini ſint A, B, C, D &c. cuius exponentes ſint E, F, G, H, vt Prop. 28. huius declaratum eſt. Sint autem fractiones decadicæ KB, LC, MD, denominatoribus propriis & explicitis conſtantes : ita

A	B	C	D	$\frac{K\,7}{B\,10}$	$\frac{L\,9}{C\,100}$	$\frac{M\,324}{D\,1000}$
1	10	100	1000			
0	1	2	3	$\frac{K\,7}{F\,1}$	$\frac{L\,9}{G\,2}$	$\frac{M\,324}{H\,3}$
E	F	C	H			

vt fractio k B, enuncietur ſeptem decimæ : L, C, nouem centeſimæ : ac denique MD, tercentæ viginti quatuor, milleſimæ. Dico igitur earundem fractionum denominatores B, C, D mutari poſſe in ipſorum exponentes F, G, H. Atque ex eis nomen aſſumere nullo modo earum fractionum valore læſo : ita vt fractio k F æqualis ſit fractioni K B, at L G, æqualis fractioni L C : ac denique M H æqualis M D, & ſic de cæteris. Tum vero longè alia futura eſt à communi, enunciationis ratio. Fractio enim K F. Dicetur ſeptem prima minuta, ſiue abſolutè ſeptem prima : ſecunda vero L G efferetur nouem ſecunda : ac tertia M H, tercenta viginti quatuor tertia, cum igitur fractio K F dicitur ſeptem prima minuta. Senſus eſt : minutiam K F continere ſeptem partes ex partibus 10 quibus conſtat terminus B progreſſionis decadicæ, primus ab vnitate A & cuius exponens eſt F 1. Atque eo ſenſu idem eſt vtriuſque harum fractionum K B, K F, valor. Prior enim K B effertur ſeptem partes decimæ alicuius vnitatis : poſterioris vero K F ſenſus eſt, vt ſumantur ſeptem partes ex iis quas primus, terminus Geometricæ progreſſionis continet, quæ ſunt 10. Idem reliquarum eſt ſenſus. Et verò non minori iure dici poſſunt hi progreſſionis decadicæ termini B 10, C 100, D 1000 minuta prima, ſecunda tertia ab exponentibus, F 1, G 2, H 3 ſumptâ appellatione : quam in progreſſione Aſtronomica per rationem ſexa gecuplam extenſâ primus terminus ab vnitate (quæ eſt gradus vnus) dicitur prima minuta, vnius ſcilicet gradus in particulas 60 diuiſi : ſecundus verò dicitur ſecunda, eiuſdem illius gradus diuiſi in partes 3600, vel etiam vnius primi minuti diuiſi in partes 60 & ſic deinceps tertia, quarta, &c. iuxta quam appellationem dici etiam poſſunt primæ, ſecundæ, tertiæ &c. nempe partes vt in allato ſchemate. Fractio K F efferetur his verbs, *ſeptem prima* : altera L C, *nouem ſecunda*

&c. ſynominæ ſiquidem ſunt hæ voces, minuta, & partes, quibus ad-
venit denominatio eadem prima, vel primæ, ſecunda, vel ſecundæ &c.

PROP. XXXI. *Theor.*

In decadicis fractionibus non ſecùs ac in numeris integris figurarum valor ratione gradus ſiue claſſis augetur ſecundum decuplam rationem.

Demonſtratio.

A 222		B 222
		C 1000
D 200	E 20	F 2
C 1000	C 1000	C 1000

In numero integro A figura 2 in primo gradu poſita ſe ipſam tantùm, hoc eſt duas vnitates integras deſignat. At in ſecundo gradu collocata vnitates decuplo plures & plures cẽtuplo in tertio ad læuã cõſtituta ſignificat vt lib. 1. Prop. 16. explicatũ eſt. Dico igitur in fractionibus decadicis idem contingere, vt in fractione B C figura vltima 2 duas, non vnitates; ſed duas vnitatis in partes 1000 diuiſæ particulas. Altera verò figurà 2 penultima decuplo plures ex particulis illis 1000 deſignat: at eadem figura 2 in tertio gradu, particulas centuplo plures, hoc eſt, centũ ſignificat, ita vt fractio illa BC in tres fractiones DC, E C, F C diſtrahi poſſit: quæ ſimul ſunt æquales fractioni ipſi B C. Quia verò harum triũ fractionũ idẽ eſt denominator C; ita ſe habebũt inter ſe vt inter ſe ſunt numeratores D, E, F. At hi ſunt in decupla ratione, ergo & in decupla ratione ſunt ipſæ fractiones D C, E C, F C. quæ ipſam fractionem B C componunt, ſi ſimul addentur; additis numeratoribus: quorum figuræ ſignificatiuæ, figurarum O locum occupant, eaſque expungunt, ſuúmque valorem quem diuiſæ habebant retinent. Quamquam verò eadem figura 2 in ſingulis illis gradibus claritatis gratià aſſumatur: eadem tamen ratio foret: ſi figuræ inter ſe diuerſæ conſtituerentur, vt in integris declaratum eſt: quælibet enim figura in gradu quouis ſtatuta, valorem decuplò maiorem ſibi vendicat quam ſi in proximè antecedenti gradu collocaretur: quem valorem obtinet non ratione figuræ in illo priore gradu exiſtentis, ſed ratione ipſius gradûs; quæcunque alioqui figura illum occupet, ſiue ea ſignificatiua fuerit, ſiue non. Conſtat igitur quomodo in fractis decadicis, ſicut in integris; figurarum valor ſecundum decuplam rationem augeatur ratione graduum, quos occupant.

PROP. XXXII. *Theor.*

Cum integris adhæret decadica fractio : illud figurarum ad fractionem pertinentium incrementum per decuplam rationem ad integri figuras diuersæ classis continuari potest.

Expositio.

Numero integro A adhæreat fractio decadica B C. Dico figurarum 52 ad numeratorem B fractionis pertinentium valorem; qui ratione gradus per rationem decuplam continuè augetur; pertinere etiam deinceps ad valorem figurarum integri numeri : Ita scilicet, vt quemadmodum numeratoris B, figura 5 seipsam significat decuplò maiorem propter gradum priorem in quo figura 2 collocatur : ita etiam figura 4 numeri integri 24 seipsam decuplò maiorem designet, si ad figuram 5 præcedentis gradus comparetur, & assumatur tanquam ad fractionem pertineret; fietétque numerator B 452, eodem denominatore C 100 perseuerante. Atque ita fractio constitueretur D F, maiorquidem vnitate, formam tamen fractionis obseruans, & efferetur in hæc verba iuxta enunciandi modum communem, quadringentæ quinquaginta duæ centesimæ. Nec tantùm postrema numeri integri figura illa 4 fractioni B C potest alligari; sed etiam præcedens figura 2; imò & quotquot figuræ extiterint ad numerum integrum pertinentes : atque ita ex hoc numero toto, ex integro 24 & fracto B C composito vnica fiet fractio F G : & per modum fractionis exprimetur. Cuius hanc habeto rationem.

	B	D
A 24.	52	452
	100	100
	C	E
F 2452		
G 100		

Demonstratio.

A 2400		B
———		52
C 100		—
		100
F 2452		C
———		
G 100		

Si numerus integer A 24 reducatur in fractionis formam eiusdem denominationis cum fractione B C: multiplicari debet integer A per denominatorem C, fractionis B C, & producto 2400 idem denominator C subscribi iuxta Prop. 21. lib. huius 2. Fiet enim fractio A C æqualis numero 24 integro. Sed cum denominator C sit semper vnus aliquis terminus geometricæ progressionis ab vnitate inchoatæ per rationem decuplam propagatæ, quæ terminis omnibus constat: quorum figura prima est 1; reliquæ verò sunt figuræ O: ea multiplicatio absoluitur, si numero integro 24 apponantur figuræ O denominatoris C, vt lib. 1. Prop. 38. in Schol. declaratum est: quod si ad hanc fractionem A C, æqualem numero integro 24 addatur fractio B C, eiusdem denominationis cum A C: numeratoris B 52, figuræ 5 & 2, occupabunt locum figurarum illarum O. Atque ita vnica fractio F G maior quidam vnitate, conflabitur ex numero integro 24, & fractione, B C: cuius numerator F continet vnicum continuum numerum qui figuris 2, 4, integri numeri, & 5, 2, fracti, deinceps positis. Constat ergo figuræ omnes duorum numerorum 24, & 52 deinceps positæ, & velut vnicum numerum F constituentes, pertinent ad eundem denominatorem C, eique alligantur; ac proinde continuata enunciatione debent exprimi. Ita vt dicas fractionem F G esse, bis mille, quadringentæ quinquagintæ duæ centesimæ. Nec minus continua futura est eiusdem numeri enunciatio: si reiecto denominatore C, eius exponens, qui est 2, & secunda significat (scilicet minuta) assumatur iuxta Prop. 30. superiorem. Atque ita valor fractionis F G, ritè exprimetur: si dicatur esse, *bis mille quadringenta quinquaginta duo, secunda.* Vel, *ducenta quadraginta quinque prima & duo secunda.* Vel etiam, *duo integra. Quadraginta quinque prima & duo secunda.* Continuatur ergo cum integris incrementum figurarum cuiuslibet fractionis, integro adhærentis per decuplam rationem continuam ex diuersis gradibus sese immediatè consequentibus petitum, & quoad valorem, & quoad expressionem; siue ea fiat iuxta communem minutiarum modum, quo denominator exprimitur; siue tacito denominatore, eius loco exponens adhibeatur. Patet ergo propositum.

PROP.

PROP. XXXIII. *Theor.*

Fractio quælibet decadica in tot fractiones resolui potest: quot figuras continet eius numerator: quæ eædem sint singulæ singularum fractionum numeratores: denominatores autem sint termini progressionis subgraduales ipsis singulis figuris debiti.

Expositio.

Sit fractio decadica A B tribus figuris constans: cuius denominator B terminos subgraduales progressionis per decuplam rationem extensæ continua serie vsque ad vnitatem nanciscatur C, D, E, B: qui singuli singularum fractionum denominatores statuantur: quarum numeratores sint figuræ singulæ numeratoris totius A: ita vt figura vltima 2 tribuatur toti ipsi denominatori B: reliquæ verò reliquis terminis subgradualibus deinceps, ita vt constituantur fractiones G D, H E, K B omnes decadicæ. Quarum prima G D dicatur iuxta communem minutiarum modum, *quatuor decimæ*: secunda H E, *quinque centesimæ*. Tertia denique k B, *duæ millesimæ*. Vel, ab exponentibus terminorum progressionis P, R, S. sumpta appellatione, G D dicatur *quatuor prima*.; H E *quinque secunda*. K B *duo tertia*. Dico igitur hasce minutias G D. H E, k B simul sumptas minutiæ A B æquales esse.

A 452				
——		G 4	H 5	k 2
B 1000		—	—	——
	C 1	D 10	E 100	B 1000
		P 1.	R 2.	S 3

Demonstratio.

Resoluatur numerator A 452 in numeros M, N, T, qui singularum figurarum valorem exprimant iuxta gradum, quem in numero A singulæ obtinent: & fiant ex ipsis fractiones M B, N B, T B. Eodem omnes denominatore B constantes. Certum est hasce tres fractiones simul sumptas esse æquales toti fractioni A B. Numeri enim M, N, T tot vnitates continent quot vnitates continet solus numerus A: nec verò etiam aliter efferas illos, quàm solum hunc A, vt patet. Iam verò si fractionis M B, tam numeratorem M, quàm denominatorem B diuidas per eundem numerum 100: quæ diuisio non aliter absoluitur; quàm expun-

ctis duabus figuris O, tam ex numeratore M, vt fiat numerator nouus G, quam ex denominatore B, vt fiat D, iuxta annotata Prop. 46 lib. 1. in schol. 2. indust. 7. erit fractio G D æqualis fractioni M B per Prop. 5 huius lib. 2. eadem enim est ratio per Prop. 4. lib. 2. inter numeros G, D; & numeros M B. Eodem modo si à fractionis N B numeratore N 50, & simul à denominatore B 1000 reiiciatur figura O vnica; quæ ad numeratorem N pertinet: remanebit

A 452	B 400	N 50	T 2
B 1000	B 1000	B 1000	B 1000
	G 4	H 5	K 2
	D 10	E 100	B 1000

fractio H E æqualis fractioni N B ob rationem proximè allatam. Denique, quia vltimæ fractionis T B numerator T nullâ constat figura O: iidem termini fractionis T B, constituent fractionem tertiam K B absque vlla mutatione, nullam enim admittit numerator T, vel k; ita vt denominator sit terminus aliquis Progressionis decupla ratione crescentis. Cum ergo minutiæ G D, H E, k B æquales sint singulæ singulis M B, N B, T B: quæ æquales sunt simul sumptæ, vt ostensum est, toti minutiæ A B: eidem A B æquales etiam erunt minutiæ G D, H E, k B. Præterea. Cum ex denominatore B 1000, reiiciantur figuræ aliquot O; vt habeantur denominatores D, E, B singularum fractionum; ita vt figurarum O reiectarum multitudo vnitate sensim decrescat: termini D, E, B pertinebunt ad progressionem per decuplam rationem ab vnitate extensam: omnis enim numerus; qui vnitate præfixâ, & appositis quotcunque figuris O constat, non potest non esse terminus aliquis dictæ progressionis: cum omnes huiusmodi numeros nullo excepto complectatur. Vnitas enim per numerum 10 multiplicata, quæ multiplicatio fit per appositionem figuræ O, ad 1: terminum primum ab vnitate constituit; nempe 10: Hic multiplicetur per 10. id est, ei apponatur figura O, vt fiat 100: erit 100 secundus terminus. & ita tertius habebitur per appositionem vnius adhuc figuræ O, ac proinde nullus numerus, cuius prima figura sit 1, & reliquæ sint O, non potest non esse terminus quispiam progressionis; quæ ab vnitate per decuplam rationem extenditur. Quod cum ita sit: termini D, E, B; qui sunt denominatores fractionum G D, H E, k B, ad progressionem decuplæ rationis ab vnitate pertinentes; non solum sunt termini illius progressionis, sed etiam sibi sunt immediati: crescunt enim per appositionem vnius tantùm figuræ O, vt ex dictis patet: dum singuli termini multiplicantur per rationis denominatorem 10, id est, dum ipsis apponitur noua figura O: sic enim absoluitur cuiusuis numeri multiplicatio per numerum 10, vt nuper monui. Quare cum fractio A B in fractiones

nes reſoluatur G D, H E, K B; quarum numeratores ſunt ipſæ numeratoris A figuræ: & denominatores ſunt D, E, B ſubgraduales termini progreſſionis ab vnitate per decuplam rationem extenſæ: ſint autem hæ fractiones G D, H E, K B ſimul ſumptæ, æquales oſtenſæ, fractioni toti A B, oſtenſum eſt quod proponebatur. Nimirum quod fractio quælibet decadica in tot fractiones &c.

Scholium.

Quod ſi propoſita fractio ſit vnitate maior. Id eſt, decadica fractio numero cuiuis integro adhæreat. Nihilominus vera futura eſt eadem Propoſitio. Sit enim numerus integer Z; cui adhæreat fractio A B. Oſtendi ſuperiùs numerum Z 36 integrum reuocari in fractum V B eiuſdem denominationis cum fracto A B ſi ad numeratorem A præfigatur vt fiat numerus V: cui ſubſcribatur idem denominator B. Reuocaretur enim integer Z 36 ad denominationem B 1000, appoſita ad Z triplici illa figura O, vt fieret numerator 36000. At huic ſi addatur numerator A452: occupabunt hæ tres figuræ 452 locum trium illarum figurarum O: atque ita fiet totus numerator V 36452. cui debeatur idem denominator B, vt fiat fractio V B æqualis integro Z, & fracto A B. ſimul ſumptis.

	A 452		V 36452
Z 36	B 1000		B 1000
Y 36	G 4	H 5	K 2
C 1	D 10	F 100	B 1000

Iam ſi diſſoluatur hæc fractio V B in varias fractiones; quarum numeratores ſint ſingulæ figuræ numeratoris V. Et denominatores ſint termini ſubgraduales progreſſionis Geometricæ per decuplam rationem ab vnitate propagatæ: erunt quidem duæ fractiones, H E, K B eædem quæ ſupra habentur in Propoſitionis demonſtratione: at verò loco fractionis G D, cuius numerator erat tantùm figura 4, nunc habetur numerator 364 (figuræ enim 4 præfixus eſt numerus integer 36 (idem tamen denominator D 10 huic numeratori 364 debetur. Si igitur hic numerator 364 diuidatur per denominatorem D 10. quæ diuiſio abſoluitur abraſâ vltimâ figurâ 4, & in numeratorem G 4 aſſumptâ; cuius denominator ſit diuiſor D 10, vt lib. 1. Prop. 46. in ſchol. Annotatum eſt. Si, inquam, numerator 364 diuidatur per D 10: quotiens erit integer 36 cum fractione G D: At ſi integro 36 ſubſcribatur vnitas C quaſi denominator, vt fracti formam induat: is tunc erit fractus Y C: cuius denominator C 1 eſt primus terminus progreſſionis Geometricæ ab vnitate per decuplam rationem extenſæ. Atque ita compoſitus totus numerus ex integro Z 36, & fracto AB, reſolutus

eſt in varia membra fracta Y C, G D, H E, k B: quorum denominatores C, D, E, B, ſunt termini continui dictæ progreſſionis: ac eorum numeratores ſunt, primò numerus integer, quantuſcunque ille fuerit; cuilibet enim integro, vt in modum fracti deſignetur; ſemper ſubſcribitur vnitas, denominatoris munere fungens: deinde, ſingulæ figuræ, ex quibus numerator A fractionis totius A B componitur: denominatores autem ſunt termini continui ab vnitate progreſſionis rationis decuplæ.

PROP. XXXIV. *Theor.*

Fractio quælibet decadica in varias fractiones item decadicas tanquam in partes, ex quibus componitur, diſſolui poteſt: quarum numeratores pluribus figuris, totius numeratoris connexis conſtent. Denominatores autem ſunt ipſi denominatores, qui poſtremæ figuræ connexarum debentur.

Expoſitio.

Propoſitione antecedenti oſtenſum eſt, fractum quemlibet decadicum numerum diſſolui poſſe in varias decadicas fractiones: quarum numeratores ſint ipſius totalis fractionis figuræ ſingulæ. Denominatores autem ſint termini progreſſionis debiti, vt explicatum eſt, ſingulis illis figuris. Nunc verò aſſeritur eundem numerum fractum diſſolui etiam poſſe in fractos. quorum numeratores pluribus figuris conſtent: Denominatores autem ſint iidem; qui vltimæ ſingulorum figuræ competit. Quod de fractis vnitate tam maioribus quàm minoribus æquè aſſeri poteſt. Vt, ſi fractus vnitate maior V B proponatur: qui in ſuperiore Propoſitione in fractos plures ſectus eſt; ita vt eorum numeratores ſint figuræ ſingulæ totius numeratoris V. Diuidi etiam poterit, primò, in fractos duos A C, D B: quorum numeratores A, D ſimul, continent omnes figuras totius numeratoris V. Denominator autem C eſt denominator characteris vltimi 4 (ſi ſolus foret) numeratoris A. Similiter: denominator B fractionis poſterioris D B, eſt denominator characteris ſolius 2; qui poſtremus eſt numeratoris *D*; eique deberetur iuxta diſſolutionem præcedenti Propoſitione initam. Quod probatur.

V 36452	A 364	D 52
B 1000	C 10	B 1000

Demonſtratio

Demonstratio.

Postrema figura 4 numeratoris A; si fractio V B iuxta præcedentem Propositionem solueretur; sibi adsciscerct denominatorem C 10, vt ibidem declaratum est; addatur iam tam ad numeratorem A quàm ad denominatorem C, duplex nota O: quot scilicet figuras continet alterius fractionis D B numerator D; vt fiat noua fractio E F: ea erit æqualis fractioni A C per Prop. 5. huius libri 2. Est enim eadem ratio E ad F, quæ est A ad C per 3. Prop. lib. 2. eo quod per additionem duplicis illius notæ O, tam ad numeratorem A, vt fieret E; quàm ad denominatorem C, vt fieret F, multiplicentur A & C per eundem numerum 100. Iam verò si minutia D B addatur ad minutiam E F; cuius denominator F, æqualis est denominatori B, & numerator D tot constat figuris significatiuis: quot figuris non significatiuis O constat numerator F: absoluetur additio; si in locum duplicis notæ O substituantur duæ figuræ 5, & 2, numeratoris D. At verò substitutis duabus figuris 5, & 2, in locum duplicis notæ O postremæ numeratoris E; producitur fractionis V B numerator V: cuius fractionis denominator B æqualis est denominatori F. Ergo minutiæ duæ E F, D B æquales sunt minutiæ V B. Sed fractioni E F æqualis est fractio A C. Ergo duæ fractiones A C, D B æquales sunt fractioni V B: Ergo fractio V B diuisa est in duas fractiones, A C, D B: quarum numeratores simul continent omnes figuras numeratoris V. Denominatores autem C, B; sunt termini progressionis decuplæ rationis, tot figuris O singuli constantes: quot debentur postremæ figuræ singularum partium, siue partialium minutiarum A C, D B. Quare. Si fractio qualibet &c. Quod erat probandum.

V 36452	A 364	D 52
	C 10	B 1000
	E 36400	
	F 1000	

Alterum paradigma.

Expositio.

Eadem fractio V B, quæ superiùs, distribuatur in tres fractiones A C D F, E B. Quarum numeratores simul, figuras omnes totalis numeratoris V continent. Denominatores autem C, F, B sunt termini progressionis secundum rationem decuplam excurrentis, etsi continui non

V 36452	A 36	D 45	E 2
B 1000	C 1	F 100	B 1000

sint, & sibi immediati termini illi: sed eiusmodi, vt singuli debeantur postremæ figuræ singulorum numeratorum. Vt, fractionis, A C denominator C 1, debetur figuræ 6 posteriori numeratoris A 36: qui in hoc paradigmate integer est numerus. Fractionis autem D F denominator F 100 debetur ex præcedenti Propositione figuræ 5 postremæ numeratoris D 45. Denique denominator B, minutiæ E B, cuius numerator E vnica constat figurâ 2; ipsi conuenit figuræ 2 iuxta eandem Propositionem. Dico igitur hac statuta hypothesi, hasce tres fractiones simul sumptas æquales esse fractioni V B.

Demonstratio.

Si fractionis A C, tam numerator A, quàm denominator C, multi-

V 36452	A 36	D 45	E 2	
B 1000	C 1	F 100	B 1000	
	G 3600	k 3645	L 36450	P 36452
	H 100	H 100	B 1000	B 1000

plicetur per fractionis D F denominatorem F 100: fiet noua fractio G H æqualis fractioni A C per Prop. 5. libri huius 2. & initam in præcedenti exemplo ratiocinationem: eritque eius denominator H, idem qui F fractionis D F. Si ergo addantur fractiones duæ D F, G H (quæ additio absoluetur duabus figuris 4 & 5 numeratoris D in locum substitutis duplicis illius notæ O numeratoris G) fiet fractus K H æqualis fractis duobus G H, D F. Sed G H æqualis est ostensus fracto A C. Ergo fractus k H æqualis est duobus fractis A C, D F: quorum numeratores figuras totius minutiæ V B, aliquot assumpserunt; ita vt sola restet fractio E B. Reducatur fractio k H ad denominationem fractionis E B: per Prop. 21. huius lib. 2. quæ reductio hîc absoluitur, multiplicatis tam numuratore k, quàm denominatore H, per eundem numerum 10. Fiet ergo noua fractio L B æqualis fractioni k H. Quod si ad fractionem L B addatur fractio E B: addito scilicet numeratore E ad numeratorem L, cuius vltima figura O occupabitur à superueniente figura E 2: fiet fractio P B æqualis omnibus fractionibus A C, D F, E B. At fractio P B non potest non esse æqualis fractioni V B. Vtriusque enim denominator idem est. Numerator autem P, cum collegerit omnes figuras immutatas numeratorum minutiarum A C, D F, E B. Quæ eædem ex suppositione sunt

ſunt omnes figuræ ad numeratorem V fractionis V B, pertinentes: luce clarius euadit numeratorem P æqualem eſſe numeratori V: atque adeo (cum denominator idem vtriuſque ſit) fractionem P B æqualem eſſe fractioni V B. Ergo etiam in hoc caſu verum eſt fractionem decadicam, vt V B, in varias decadicas fractiones A C, D F, E B diſſolui poſſe: ita vt aſſumantur à numeratoribus illarum figuræ omnes totalis numeratoris V: ipſique numeratores pluribus figuris conſtent. Et denominatores ſint termini quidam progreſſionis ex decupla ratione ab vnitate inſtitutæ, licet minimè continua ſerie ſeſe conſequentes: ſed quales exigit ſingularum fractionum partialium figura poſtrema ex propoſitionis præcedentis ſtatuto fundamento. Quare etiam in hoc caſu fractio quælibet decadica &c. Quod probandum erat.

PROP. XXXV. *Theor.*

Si fractio quælibet decadica in plures decadicas fractiones diſtribuatur: quarum numeratores figuris vnâ pluribus conſtent ſecundum proximam Propoſitionem: ſingularum denominatores, qui termini ſunt progreſſionis rationis decuplæ, conuerti poterunt in exponentes terminorum ſingulorum.

Expoſitio.

Fractus, etſi vnitate maior, V B ſecari poteſt in tot fractos: quot ſunt numeratoris V figuræ: ita vt ſingulæ euadant numeratores; quibus reſpondentes denominatores ſint termini continui ab vnitate, progreſſionis decadicæ, iuxta propoſitionem 33. eiuſque ſcholium: cuiuſmodi ſunt hîc minutiæ A C, G D, HE, k B. Quarum ſingularum denominatores conuerti poſſunt in exponentes ſuos, & ex eis earum fractionum valor æſtimàri. Vt declaratum eſt propoſitione 30. Quia verò proximâ Propoſitione 34 oſtenſum eſt eandem fractionem V B ita poſſe in varias fractiones diſtribui; vt ſingularum numeratores pluribus figuris conſtent; eiſque nihilominùs reſpon-

V 36452	A 36	G 4	H 5	K 2
B 1000	C 1	D 10	E 100	B 1000
	A 36		M 45	K 2
	C 1		N 100	B 1000
	P 0.		Q 2.	R 3

deant denominatorum loco termini progressionis decadicæ, etsi minimè continui; cuiusmodi sunt hîc minutiæ A C, M N, k B. Quarum denominatores C, N, B sunt quidem semper termini progressionis decadicæ; sed minimè, vt priùs contingebat, in continua Analogia. Iure ergo dubitari poterat. An horum denominatorum C, N, B loco substitui fas esset eorum exponentes P, Q, R iuxta explicationem Propositionis 30. Ita vt fractio A C, cuius denominatori C 1 debetur exponens P O per Prop. 28. huius lib. 2 efferatur absolutè *Triginta sex*, scilicet vnitates. Secunda verò fractio M N: cuius denominatori N 100 in serie progressionis debetur exponens Q 2, dici queat *quadraginta quinque secunda*: & ita de cæteris quotquot extiterint similes? Asserit igitur hæc Propositio rectè æstimari harum partialium fractionum valorem iuxta exponentes denominatorum ad eas pertinentium, vt explicatum est; & probatur.

Demonstratio

Quoad fractionem A C, quæ numerus est integer in fracti modum designatus, dubium esse nequit. Clarum enim est eam ritè efferri siue dicatur, triginta sex vnitates, habitâ ratione denominatoris C 1: siue absolutè dicatur *triginta sex* ob exponentem Po; qui cum sit nota nihili, nihilum addi debere indicat ad verba *triginta sex*. At verò si de altera fractione M N quæstio sit, quæ vera est fractio, siue vnitate minor: rectè eius valor æstimari efferríque probatur: si dicatur *quadraginta quinque, secunda*, sumptâ denominatione ab exponente Q 2: nullâque habita ratione exponentis figuræ 4 seorsim sumptæ, qui foret 1. Si enim prior illa figura 4 fractionis M N seorsim spectetur vnà cum ipsi debito denominatore decadico, mutabitur in fractionem R S, eritque T exponens denominatoris S, vt habetur

M 45	R 4	Y 40
N 100	S 10	Z 100
Q 2	T 1	Q 2

Prop. 28. huius lib. 2 Si ergo tam numerator R, quàm denominator S multiplicentur per numerum 10: fiet noua fractio Y Z æqualis fractioni R S per Prop. 3 & 5. huius lib. 2. Eius autem denominatoris Z exponens erit Q 2, idem cum exponente denominatoris N fractionis M N. erunt enim N & Z æquales, vt patet, atque adeò termini eiusdem gradus decadicæ progressionis: quem gradum indicant exponentes. Ergo si addatur ad fractionis Y Z numeratorem Y figura 5, quæ est figura secunda numeratoris M: ea succedet in locum figuræ O numeratoris Y: atque ita fiet numerator M, fractionis M N, cuius denominatori N debetur exponens Q 2. Atque ita loco denominatoris N; secundum quem fractio M N, dicetur. *quadraginta quinque centesima*: assumi potest exponens eius Q, vt dicatur eadem fractio 2. *quadraginta quinque secunda*, eadem ratione; si

eiusdem

eiusdem fractionis V B figuræ aliter copulentur; vt fractiones A C, D B exhibent. Quarum denominatores C & B pertinent ad postremas figuras 4 & 2, numeratorem A & D iuxta Propositionem 34.: poterunt eorum denominatorum loco assumi exponentes eorum F & G; & secundum huiusmodi exponentes efferri earum minutiarum valor.

V 36452	A 364	D 52
B 1000	C 10	B 1000
G 3	F 1	G 3

Dicetur ergo fractio A C *tercenta sexaginta quatuor prima* fractio verò D B *quinquaginta duo, tertia.* Eodem iure tota ipsa fractio V B; cuius denominator B, idem est ac denominator fractionis D B; ob eandem postremam vtriusque figuram 2: ex qua determinatur fractionũ harum terminus progressionis decadicæ in denominatorem assumendus iuxta Prop. 33. huius lib. 2. eodem inquam, iure fractio V B tota simul spectata absque vlla diuisione; nomen tertiorum obtinebit ab exponente G, vltimæ figuræ 2 debito: dicetúrque *trigesies sexies. Mille. Quadringenta quinquaginta duo, tertia.* Atque is est fractionis totius valor. Quouis ergo modo secetur numerator fractionis cuiusvis decadicæ: poterunt partiales fractiones per exponentes denominatorum ipsis debitorum æstimari, & secundum eos efferri, vt asserit Propositio. Quod ostendendum erat.

PROP. XXXVI. *Probl.*

Quaslibet fractiones decadicas aptè per compendium designare.

Constructio & demonstratio.

Ex dictis hactenus habetur huius generis minutiarum non tantum vera, & secundum cæterarum minutiarum communem formam inita designatio: sed etiam compendiaria: qua reiectis earum denominatoribus, qui termini semper sunt aliqui progressionis ab vnitate per decuplam rationem crescentis; eorum exponentes assumuntur: qui vt ex superioribus patet, characteribus constant, longè, quàm ipsi denominatores, paucioribus. Verùm hi etiam exponentes compendium admittunt non mediocre, eóque præsertim nomine singulare: quòd minutias huiusmodi, quas numero duplici, numeratore scilicet & denominatore constare necesse est, vnde earum tractatio euadit difficilior, longiorque; ad vnicum numerum simplicem reuocet, simplicísque numeri legibus subiiciat. Sit ergo fractus

numerus propoſitus, exempli cauſa, A B: hîc ex communi fractionum lege deſignabitur, vt A B; ſuo numeratore A, & denominatore B preditus. Deinde abiecto denominatore B, in eius locum ſubſtituti ſunt exponentes, vt cernitur in fractione C D eiuſdem valoris cum priore A B; ſed cuius numerator C diſtribuitur, in tot partiales numeratores quot figuras continet: quibus denominatorum loco ſunt exponentes 1, 2, 3, ſinguli ſingulis figuris 4, 5, 2 reſpondentes. Ita vt fractio C D in hæc verba efferri debeat. *Quatuor prima, quinque ſecunda. Duo tertia.* vt Prop. 35. huius declaratum eſt. Sed longior adhuc eſt hæc deſignatio. Breuior foret; ſi exhiberetur eadem fractio, vt eſt in E F: ita vt vnico exponente 3 poſtremæ figuræ 2 numeratoris E debito, loco denominatoris conſtet: efferatúrque *Quadringenta quinquaginta duo, tertia* iuxta Propoſitionem 30. huius. Ea tamen deſignatio etſi breuiore denominatore, exponente ſcilicet vnico, abſoluatur; non expeditur omninò ab omni denominatore, duplexque neceſſarius eſt numerus: quæ operationes efficiat grauiores; & longiores. Alia ergo via magis compendiaria ineunda eſt. Sunt ergo qui fractionem A B exprimunt more fractionum Aſtronomicarum per accentulos quoſdam ſingulis figuris numeratoris C impoſitos, vt habet ſchema. In quo prima figura 4 vnico accentu inſignitur: ſecunda 5, duobus tertia 2, tribus: nec aliter differt hæc deſignatio à ſuperiore C D; quam conuerſione exponentium 1, 2, 3. in accentus illos. Sunt etiam, quibus ſatis eſt, ſi figura vltima 2, numeratoris fractionis A B, accentibus tribus inſigniatur, reliquis figuris antecedentibus ab omni accentu immunibus: vt habetur in numeratore E, reliquæ enim figuræ anteriores inuri cenſentur accentibus vno ſemper paucioribus: quemadmodum non cogitatione ſed reuerà deſignantur in numeratore C. Hæc tamen deſignatio etſi ſatis, vt videtur, breuis; illud patitur incommodum, præſertim graue, cum pluribus figuris numerator E conſtat: quod numerus & accentuum, & figurarum, quibus deinceps debentur, ineundus ſit. Præterea: ſi minutia integro cuipiam numero adhæreat: non ſatis ſeſe prodit diſtinctio fracti ab integro; quæ tamen maximi momenti cenſeri debet, ob valorem longè diuerſum vtriuſque. Aliud ergo compendium inquirendum videtur totius, & ſi fas fuerit, breuius.

A 452	C 4.5.2.	E 452
B 1000	D 1.2.3.	F 3

A 452.	C $4' 5'' 2'''$.	E $452'''$
B 1000		

Aliud mihi non contigit obſeruaſſe commodius, quam quod lib 3. examinis quadraturæ Prop. 18. expoſui. Illud enim & breuitate præſtat: cum accentus vnicus aſſumatur, & operandi certitudine; cum per ipſum integri à fractis clariſſimè diſtinguantur quoties fractos integris adhære-

rete

rere caſus feret. Proponatur ergo fractio decadica A B: cuius ſcilicet denominator B exprimitur termino aliquo progreſſionis ex ratione decupla creſcentis; quique ſemper conſtat præfixa vnitate; quam ſequantur aliquot figuræ O: talis enim numerus non poterit non eſſe terminus aliquis dictæ progreſſionis; vt pote per continuam multiplicationem ab vnitate inchoatam per Articulum 10 genitus.

A 3254 / B 10000 — C 3′254

Afficiatur primus numeratoris A character 3 ipſi imminente accentulo, vt refert numerus C; reliquæ verò deinceps conſequentes eiuſdem numeri figuræ, omni nota careant; non carere tamen concipiendæ ſunt: ſed ſingulæ vno ſemper pluribus affici cenſeri debent. Atque ita figura 2 poſt primum 3 ſecunda, duos accentus; tertia 5, tres; quatuor, quarta 4 ſibi adſciſcunt. Dico igitur fractionem decadicam A B aptiſſimè exprimi per numerum C eo modo, vnico accentu inuſtum, omiſſis reliquis

Nam accentus ille vnicus primæ numeratoris C figuræ 3 impoſitus, ad eam figuram iuxta methodos paulò ante expoſitas, reuerà pertinet: quia verò figura ſecunda 2. accentus duos; tertia 5, tres &c. ſibi depoſcunt: ita vt ea ratione creſcat accentuum ſingulis figuris debitorum multitudo, quâ figuræ ſingulæ à prima recedunt ordine perpetuo: etſi accentus ipſi minimè deſignentur; ipſe figuræ cuiuſvis ordo numeralis à prima figura inchoatus clariſſimè indicat; quot quæque ſibi vendicet; vt fruſtrà alia præter ipſius figuræ locum, ſiue ordinem nota apponatur, vt patet. Atque ita & expungetur fractionis A B denominator B & accentulorum varia illa & confuſa multitudo figuris Arithmeticis debita, ab ipſis abſtergetur abſque vllo valoris ipſarum diſpendio. Quamquam verò ſi vltima figura 4 numeratoris C debitis accentibus inſignita, vt hic apparet, cæteras anteriores figuras liberaret: dum ſingulæ vno ſemper paucioribus ad primam vſque, affici conciperentur: ea tamen ratio, etſi quibuſdam placuit, nunc minimè placet: tum quia ipſa vltima figura, ſi magna præſertim fuerit anteriorum copia, pluribus accentibus opprimenda erit: tum quia ipſi primùm accentus, ac deinde figuræ anteriores numeri propoſiti, numerandæ erunt, vt ſuperiùs monui, vt prima figura, ad quam primus & vnicus accentus pertinet determinetur, præſertim cùm integris adhærebit fractio. Vt, ſi proponatur numerus D ex integro & fracto de-

C 3254′′′′

cadico

D 354764''''' | E 35'764

...cadico compositus; qui fractus figuris quinque constet; ac propterea figura eius vltima, 4 accentibus quinque debeat affici: hærendum sanè fuerit; dum & accentus, & figuræ retrogrado ordine ab ipsa figura 4 inito numerantur; vt tandem prima ad fractionem pertinens figura 5 dignoscatur. Quæ incommoda omnia euaseris; si, vt refert numerus E primam fracti numeri figuram suo inusseris accentu, reliquis, non nisi mente, affectis.

Quod si hæc vnius tantùm accentuli appositio eo nomine non probetur, quod facile possit excidere, non nisi cum magna numerorum perturbatione: nullum promptius quàm huic incommodo remedium. Accentum omitte: eiúsque loco, figuræ, quæ eo insignienda foret, præfige lineolam rectam integrum inter & fractum interiectam vel certè, quod non minuùs tantum futurum est, fractum lineola curua, quasi parenthesi, ab integro distingue. Hunc vtrumque modum in numeris A, & B expressum cernis. Quo imposterum, cum libuerit, vsurus sum.

A 3 – 54764 | B 3 (54764

Hactenùs tradita est fracti illius numeri designatio: qui minutis primis, secundi, tertiis &c. Ordine continuo, constat. At si primis careat; si post prima, alia quædam intermedia desint minuta: qua ratione mancus huiusmodi numerus exprimetur? Ecce. Proponitur numerus integer cum fractio notis Arithmeticis designandus huiusmodi. Viginti quatuor (hic est numerus integer) quinque tertia, & sex quinta (en fractum) integrum, integrorum more designa, vt in schemate apposito designatur A 24. Huic adiunge lineolam rectam, siue curuam ab integro separaturam fractum.

A 24 – 00506 | A 24 (00506 | A 24 0'0506

Tum quia, dum fractus verbis enunciatur, nulla fit primorum, vel secundorum mentio; vtriúsque eorum loco figura O reponi debet, vt series texatur continua huiusmodi minutorum decadicorum: quam interrumpere non magis licet; quàm integris: cum ex gradu quem figuræ Arithmeticæ occupant, singularum valor tam in integris, quàm in hisce fractis perpendatur. Hac etiam de causa in eodem exemplo, post illa quinque tertia, quia quartorum nulla fit mentio, sed, quartis omissis, quinta nominantur: quartorum locum occupabit nihili nota O, post quam sequetur figura 6 ad quintam pertinens, vt quintus eius locus à prima minutiæ figura primis deputata indicat. Quod obseruari debet non tántùm cùm fracto præponitur integer, cui adhæreat: sed etiam cum fractus solus exprimendus est: licet figuræ O primum locum occupent: Etsi enim in integris, eò loci constitutæ cæterarum sequentium valorem nec augere, nec minuere natæ sint: in hisce tamen fractis, quorum figuræ valorem sortiuntur à locis, quæ occupant, à primo numeratis:

meratis: necessariæ omninò sunt, vt locorum singulis debitorum numerus ineatur. In quo, integros inter & fractos discrimen obserues eximium. Integri enim vltimis figuris O non rarò constant: quæ cæteris præcedentibus valorem definiunt ratione loci siue gradûs ab vltima numeri figura computati: quæque ad numeri caput statutæ inutiles omnino forent. Contra verò in fractis decadicis ad eorum calcem inutiles planè sunt reiicique sine iactura possunt: at verò ad initium numerorum, quoties aliæ figuræ significatiuæ illud non occupant, figuræ O necessariæ sunt: vt cæterarum locus, atque adeo valor, agnoscatur. Exemplum vtriusque hoc esto. Numerus integer A valorem acquirit longè diuersum cum apponitur, vel remouetur figura O ad dextram: quæ ad læuam posita, vt in numero B, inutilis omnino foret, etiam centies repetita Contra verò si numerus A fractus decadicus supponatur, nullam valoris mutationem patitur ab adiecta ad calcem figura O. Semper enim eius valor exprimetur, nullâ, vel illius figuræ O, vel plurium quotlibet sequentium habita ratione: dicetúrque, *quinque prima. Duo secunda. Nulla tertia, quarta nulla &c.* At si fractus supponatur B: figura illa O primorum locum occupat; figuræ verò significatiuæ 5 & 2 in secundum & tertium locum reiiciuntur, ita vt si exprimendus sit numerus B, dicetur *prima nulla, secunda quinque. Tertia, duo.* Vel complexè iuxta Propositionem 30. Huius. *Quinquaginta duo tertia.* Atque ita de cæteris eius generis numeris.

A	520
B	052

Constat ergo tum ex iis, quæ hac Propositione, tum ex, iis quæ superioribus ostensa sunt: quomodo fractus quilibet numerus decadicus Arithmeticis characteribus designatus verbis exprimi debeat. Et contrà. Quomodo verbis expressus, per Arithmeticas notas accentibus insignitas debeat aptissimè designari. Quod est duplex numerationis ad fractos decadicos pertinentis officium. Quod hac maximè propositione declarandum erat.

PROP. XXXVII. *Defin.*

Decadicæ cuiusvis minutiæ exponens dicitur nota illa, quæ denominatoris ad minutiam pertinentis loco substituitur; siue ea fuerit accentus, siue recta, aut curua linea, primam minutiæ figuram afficiens.

Expositio.

Ex dictis patet quomodo fractus quilibet numerus decadicus per com-

pendium exprimatur; dum eius denominatoris loco assumitur vna aliqua ex tribus superiùs adductis notis: quæ primam numeratoris figuram afficiens, valorem exponat ipsius fractionis: vnde exponentis nomen iure mereatur. Vt si fractus A B proponatur; eius abiecto denominatore B; designari potest vel vt C, per accentum impositum; vel, vt D, per præfixam figuræ 3 rectam lineam; vel vt E per curuam; quæ notæ primam ipsam figuram 3, totius numeri afficere censeantur; vnde ad singulas deinceps consequentes pro suo quamque ordine valor deriuetur; dum singulas afficere concipitur, vt suprà est explicatum, nota peculiaris per ipsum ordinem singularum figurarum determinata.

A 352	C 3́52
B 1000	
D −352	E (352

Hic porrò venit obseruandum præter hactenùs explicata, quamlibet decadicam minutiam denominatore constare: qui tot nihili figuras O sibi vendicet: quot numerator figuras siue significatiuas siue non: atque ita dum denominatoris figuris illis O, adhuc vnitatis figura 1 præfigitur: figurarum ad denominatorem pertinentium multitudo, numeratoris figuras superabit figurâ illâ 1 præfixâ. Vt in apposita fractione A B cernere est: cui æqualis est decadicè designata minutia C: cuius valor exprimitur dum prima eius figura accentu afficitur: eo enim apposito signo indicatur denominatorem huius fractionis, totidem figuris O constare; quot sunt figuræ numeratoris C; eisque figuris O præfigi prætetea figuram 1: ita vt denominatoris figuræ vnâ illâ figurâ 1 plures sint quam numeratoris C figuræ, quæ habentur expressæ. Quod idem verum etiam est quamvis nihili notæ O primum locum occupent; vt in minutia D cernitur: cuius verus denominator foret E, quinque figuris constans; dum numerator D quatuor tantùm continet. Cum ergo notæ illæ numeratoris figuram primam afficientes tam euidenter fractionis cuiusvis decadicæ quantitatem exhibeant; eas non ineptè dixeris exponentes huius generis minutiarum.

A 352	C 3́52
B 1000	D 0́052
	E 10000

PROP. XXXVIII. *Probl.*

Quamlibet minutiam vulgarem in decadicam præcisam, vel præcisæ, quantùm libuerit, propinquam conuertere.

Constructio prioris casus.

Contingct non rarò (quando autem contingat paulò post exponetur

tur aptiùs) vt fractio vulgaris in decadicam conuerti nequeat; ita vt illi præcisè sit æqualis: vnde determinatio illa fuit adhibenda. Nunc in exemplum afferam huiusmodi minutiam vulgarem vt decadicam sibi præcisè æqualem sortiri possit vt fert casus prior. Sit ergo communis fractio A B in decadicam conuertenda, id est, in aliam æqualem: cuius denominator sit terminus aliquis progressionis decadicæ, siue per decuplam rationem extensæ. Ad fractionis A B numeratorem A adscribe figuras O, quotcunque interim libuerit (quot autem adscribi debeant, constabit ex dicendis) tum hunc ita auctum figuris O numeratorem diuide per denominatorem B; & fiat quotiens D: cuius primam figuram 7 exponente decadico propositione proximâ definito inure. Dico decadicam minutiam D minutiæ vulgari datæ A B æqualem esse.

$\frac{A\;3}{B\;4}$	$\frac{A\;3000}{B\;4}$	D 7́50
B 4. 1000. A 3 ?		$\frac{E\;750}{F\;1000}$
	E 7́50	

Demonstratio.

Dum numeratori A 3 apposita est triplex illa figura O: multiplicatus est per numerum 1000, vt prop. 38. lib. 1 scholio declaratum est. Cum ergo numerus A 3000 diuiditur per denominatorem B, & quotientem D producit: quotiens D eam habet rationem ad quotientem, qui producitur ex diuisione simplicis numeratoris A 3 per eundem denominatorem B 4. quam habet numerus A 3000 diuisus ad diuisum A 3 per Prop. 4. huius lib. 2. Sed dum diuiditur A 3 per B 4 producitur fractio A B tanquam quotiens. Ergo, quotiens D ad fractionem A B ita est; vt A 3000 ad A 3. Sed A 3000 ad A 3, ita est per Prop. 40. lib. 1. vt 1000 ad 1. Ductus enim est 1000 in A 3, & genitus est A 3000. Ergo quotiens D ita est ad fractionem A B; vt 1000 ad 1. Et permuttando, ita est quotiens D ad 1000: vt fractio A B ad 1. Si ergo quotiens D diuidatur per 1000; idem numerus producitur: qui producitur si fractio A B diuidatur per 1. siquidem diuiso antecedente per consequentem rationis generatur rationis denominator: quæ cum eadem sit; eundem denominatorem produci necesse est, hac vtraque instituta diuisione. Quod cum ita sit; & ex diuisione fractionis A B per vnitatem, ipsa fractio A B generetur eadem fractio A B generabitur etiam diuiso quotiente D per 1000. Sed quotiens D 7́50 diuiditur per 1000, qui terminus est quispiam progressionis decadicæ, dum exponens adhibetur ad primam figuram 7 quotientis D. Ergo apposito huiusmodi exponente ad quotientem D; reducta est minutia vulgaris A B ad decadicam D. Quod erat præstandum.

Quod idem hoc etiam modo & fortasse planiori concludi potest per

auream regulam proportionum lib. 1. Prop. 50. traditam: quæ ex datis terminis ſic inſtituetur. Si denominator B fractionis A B foret 1000 (qui terminus eſt progreſſionis decadicæ; quem fieri denominatorem placet) numerator A 3 quiſnam foret numerus? Tunc iuxta regulæ illius leges lib. 1. Prop. 50. traditas, duo poſteriores numeri 1000 & 3 in ſe mutuò ducerentur & productus 3000 per primum B 4 diuideretur. Quotiens autem, qui eſt numerator quæſitus denominatori decadico 1000 aſſignato debitus, foret E (ſchema conſule) Atque fieret fractio E F æqualis fractioni A B. Quia verò denominator F decadicus eſt terminus, omitti poterit; eiúſque loco ſymbolicus exponens aſſumi, ſiue is accentus fuerit primæ figuræ numeratoris E impoſitus, ſiue linea recta, curuáue præfixa eidem figuræ E. Atque ita planiori, methodóque aptiori, ratione, data fractio vulgaris in decadicam conuertetur.

Obſeruandum hîc porrò eſt. Cur terminum hunc 1000 decadicum ſingularem potiùs, quam alium quemlibet in denominatorem futuræ fractionis decadicæ, datæ fractioni A B æqualis elegerim: Cum Propoſitio vniuerſaliter loquatur. Dico igitur hunc terminum ſingularem ita à me aſſumptum, vt ad arbitrium aſſumptus ſit, & in alium, ſi res ferat, mutari; vel alius ex eo elici poſſit. Et vero in allato paradigmate fractio decadica D; cuius vltima figura eſt nihili figura O, multari poterit figura illa O: quam propoſitione antecedente expungi poſſe docui abſque vlla minutiæ D valoris iactura. Tunc ergo perinde foret, ac ſi aſſumptus fuiſſet loco termini decadici 1000, terminus decadicus 100: hoc enim ſtatuto termino; quotiens D fuiſſet tantum numerus 75, iſque problemati feciſſet ſatis: Ideo ergo deſignatur terminus figuris O paulò pluribus conſtans: quia ignoratur, dum initio operatio inſtituitur, quod opus futuræ ſint, vt numerus ſuperpoſitus ſiue diuidendus exhauriatur nullo poſt aliquot diuiſionis iteratas operationes facto reliquo numero. Imò nec ſi aliquando exhauriendus ſit, notum planè interdum fuerit; ſæpiùs enim exhauriri non poſſe, vt mox dicam, continget. Poſſet ergo, dum initur diuiſio numeratoris per denominatorem, vt in allato exemplo, dum diuiditur numerator A per denominatorem B, addi primum vnica ſola figura O: vt fieret diuidendus A 30, ita vt in eo caſu terminus decadicorum primus 10 aſſumeretur ad multiplicandum numeratorem A 3, vt fiat A 30. Quia verò diuiſo A 30 per 4, reliqua ſupereſt figura 2: huic addetur alia figura O: vt fiat 20, qui diuidetur per promotum diuiſorem 4: & ad quotientem ſtatueretur figura 5: quæ, nullo facto reliquo, diuiſionem abſoluit.

$$\frac{A\ 3}{B\ 4} \qquad \frac{A\ 20}{B\ 4} \qquad D\ 7\acute{5}$$

$$\frac{\acute{E}\ 7}{F\ 10}$$

Quod ſi quid adhuc ſuperfuiſſet, alia ei adſcripta fuiſſet figura O, & ſic deinceps

deinceps aliæ, & aliæ adderentur huiusmodi figuræ O. figura autem quotientis D prima 7, quia ex numeratore A 3 aucto figurâ O, profecta est, exponente inuri ipsa debet, & decadicè enunciari; vt, *septem prima*, vel, *septem decima*: eò quod per 10 multiplicatus fuerit numerator 3, & genitus A 30 diuidendus per B 4. quo fit, vt quotientis D figura 7, non sit integra & absoluta, sed sit numerator fractionis; cuius denominator est 10; vt refert fractio E F: cuius denominator F designatur; eius loco, exponente decadico substituto: vt paulò ante declaratum est.

Constructio secundi casus.

Posterior problematis casus est: cum datæ vulgari minutiæ decadicam præcisè æqualem exhibere non licet: licet tamen ad æqualem propiùs & propius in infinitũ accedere. Quod quando & quomodo cõtingat accipe. Scito ergo eam fractionem communem in decadicam præcisè æqualem euasuram numquam: cuius denominator primus est numerus & ad numeratorem suum, & ad primum terminum 10 progressionis decadicæ. Exemplum esto. Fractionis A B denominator B primus est tam ad numeratorem A, quam ad terminum C 10. Dico nullam decadicam fractionem fractioni A B præcisè æqualem reperiri posse. Quod ostendo. numerus B primus ad A & C, primus est ad numerum D; quem A & C in se mutuò ducti producunt, per Prop. 26. lib. 7. Elem. Rursùs, quia idem B primus est ad numeros C & D, primus etiam erit ad numerum ex C ducto in D genitum, qualis est numerus F. Atque ita ad numeros quosuis ex multiplicatione termini C in productos deinceps in infinitum (quæ multiplicatio fit iuxta annotata lib. 1. Prop. 38. per appositionem continuam figuræ O ad numeratorem A.) profectos denominator B semper primus erit. Hoc est, denominator B nullum numerum, qui componitur ex numeratore A, & figuris O quodlibet ei adiunctis, præcisè metietur, siue ita diuidet; vt per diuisionem illum ita exhauriat, vt nihil supersit reliquum. Quod cum ita sit: fractióque decadica fractioni communi A B æqualis inueniatur iuxta traditam in priori casu methodum, diuiso numeratore A quotcumque figuris O aucto, hoc est, multiplicato per terminum quemcumque decadicum, ita vt quotiens diuisionis illius sit numerator fractionis; denominator autem sit terminus ille progressionis decadicæ, qui in numeratorem ductus est, qui decadicè per exponentem, vel etiam vulgarium more minutiarum, exprimatur: patet nullam dari in hoc casu proposito minutiam decadicam datæ communi minutiæ A B præcisè æqualem: eo quod reliquus post diuisionem numerus negligatur, minórque iusto quotiens diuisionis assumatur in nu-

A 3	C 10
B 7	D 30
	F 300

meratorem fractionis: quæ propterea minor semper erit, datâ fractione A B.

Restat ergo ostendendum eâ methodo haberi fractionem decadicam datę fractioni in infinitum propiorem, si numerator fractionis per maiorem & maiorem terminum progressionis decadicæ multiplicetur. Quod ita planum fiet. Superioris fractionis A B, numerator A multiplicetur per primum terminum C decadicum; & productus D 30 diuidatur per denominatorem B 7: fiet quotiens E 4′ decadicus, & reliquus fiet F 2; qui cum diuisore B constituet fractionem F B.

A 3	C 10	D 30	F 2
—		—	—
E 7		B 7 (E 4′	B 7
G 20		K 6	
—		—	M 42
B 7 (H 2		B 7	

Iam verò si huius fractionis F B numerator F multiplicetur iterum per C 10, vt fiat diuidendus G per B: quotiens erit H 2. Qui ad figuram E 4′ prioris quotientis addendus est: vt fiat vnicus decadicus numerus M (omittitur autem fractio K L ex hac diuisione posteriori genita) est enim numerus M ille idem; qui ex diuisione numeratoris A 3 aucti duabus figuris O, hoc est, multiplicati per terminum 100 secundum progressionis decadicæ, per denominatorem B 7 produceretur: siue enim numerator A sensim per terminum C 10 augeatur, addita post singulas diuisionis operationes figurâ vnicâ O, vt hîc factum est, siue simul & plures figuræ O eidem numeratori A 3 addãtur, vt duæ, hoc est, multiplicetur A 3 per terminum 100 secundum progressionis decadicæ, vt fiat diuidendus 300 per denominatorem B 7; quæ ratio in priori casu obseruata est: idem quotiens M ex diuisione nascetur, & idem reliquus fiet numerus k 6; qui fractionem k B (quæ negligitur) constituat. Constat autem quotientem hunc M 4′2 maiorem esse quotiente priore E 4′. Nam ex fractione priore F B, quæ omittebatur, aliquid desumptum est in hac secunda diuisionis operatione, & ad quotientem E 4′ accessit vt fiat M 4′2; accesśere scilicet duo secunda, siue duæ centesimæ, quas quotiens H exhibuit: quibúsque fractio decadica M superat priorem E 4′, magísque accedit ad datam fractionem communem A B: ab ea tamen deficit: quia fractionis reliquæ k B nulla habetur ratio. Quod si rursùs reliquus numerus k 6 augeretur figurâ O vnicâ, & producti 60 diuisio per eundem denominatorem B 7 iniretur: vel certè, si ab initio ipsi numeratori A 3 triplex figura O apponeretur: atque ita auctus diuideretur per denominatorem B: fieret adhuc propior datæ fractioni A B, decadica noua fractio, & ita in infinitum. Vulgarem ergo fractionem in decadicam conuertimus vel præcisè æqualem; vel ei, quantùm libuerit, propinquam quod præstandum erat.

Sholium

Scholium.

Non tantùm fractus propriè dictus numerus, & vnitate minor, de quo proximè actum; ſed etiam integer & vnitate maior in decadicum conuerti poteſt. Poteſt enim integer quilibet numerus formam fracti induere; eámque indutus, vt verè & propriè dictus fractus tractari. Duplex autem fracti vnitate maioris genus poteſt occurrere. Primum eſt. Cum numerus abſolutus ab omni adhærente fractione proponitur. Alterum. Cum integro adhæret quiſpiam fractus. Quoad primum, expedita eſt eius conuerſio in decadicam fractionem cuiuſcunque libuerit denominationis. Sit enim integer in modum fracti A B deſignatus (ſic enim integer numerus, fracti formam induit, ſuppoſitâ loco denominatoris, vnitate) quem in decadicum conuertere placeat, cuius denominatio data ſit 100. Multiplicetur tam numerator A per 100, vt fiat C; quàm denominator B 1, vt fiat D. Erit fractio C D æqualis fractioni A B per Prop. 5. huius lib. 2. eadem enim eſt ratio C ad D, quæ eſt A ad B; cum C & D producantur multiplicatis A & B per eundem numerum 100. Qui cum ſit terminus decadicus, quemcunque elegeris: Patet integrum huiuſmodi A in decadicum C D cuiuſvis denominationis expeditè conuerti. Huius autem fractionis C D denominator D deleri poteſt ope exponentis, figuræ O numeratoris C impoſiti. Numerus enim C ita affectus ipſi numero A planè æqualis eſt. Nam ſi numerus A 7 multiplicetur per numerum 100, vt fiat C: & productus per eundem numerum 100 diuidatur; reſtitui neceſſe eſt numerum A 7. Patet autem cum numerum diuidi per 100; ſiue ei ſupponatur. D 100: ſiue exponens huius decadici D 100, adhibeatur ad priorem figuram O numeri C 700. Illi enim figuræ debetur exponens; cum ea reſpondeat primo decadico termino 10 denominatoris D 100: vnde ad ſequentem figuram O eiuſdem numeri C denominatio deriuetur.

A 7	C 70́0
B 1	D 100

Alterum verò fracti numeri genus. Cum ſcilicet integro adhæret fractio aliqua communis. Vel cum integer in modum fracti proponitur, cuius denominator non eſt vnitas: methodo haud admodum à ſuperiore diuersâ ad fractionem decadicam reuocabitur, vel præciſam, vel præciſæ propinquam. Sit enim primò integer A cum fracto B C ad fractum decadicum reuocandus. Reducatur fractus B C ad decadicum D 7′5 tum hic decadicus D apponatur ad integrum A 4: vt fiat numerus E. Factum erit; quod faciendum proponebatur: quacunque ratione numeri E valorem exprimere lubeat, vt ſi dicatur quatuor integra. Septem, prima.

A 4	B 3	D 7′5
	C 4	
E 47′5		

Quinque

quinque secunda. vel complexè, quadraginta septem prima. Quinque, secunda: aut etiam quadringenta septuaginta quinque secunda. Connecti siquidem possunt fracti decadici cum integris, quibus adhærent vt propositione 32. huius lib. 2. ostensum est.

Proponatur secundo integer in modum fracti; sed cuius denominator non sit vnitas. Vt si reducendus foret numerus A B vnitate maior: quia numerator A denominatore B maior est. Diuidatur A per B: quotiens erit integer C cum fractione D E: qui casus est proximè expositus. Reducetur scilicet fractus D E in decadicum F 5', qui Integro C 3 adiunctus efficiet numerum G decadicum æqualem numero A B

A 7	D 1	F 5'	G 3 5'
—G 3	—		
B 2	E 2		

Hinc colligis quomodo, quouis numero diuiso per alium, qui ipsum non metiatur, habeatur fractio decadica reliquo, vel præcisè æqualis, vel ei propiùs accedens in infinitum. Diuide A 354 per B 25. appone duas figuras O ad numerum A: sed ad primam earum adhibe exponentem: vt scilicet numerus A idem permaneat: Si enim numerus A 354 multiplicetur per 100. Vt fiat numerus D: qui per eundem numerum E 100 diuidatur (quæ diuisio facta censetur; dum E velut denominator) numero D velut numeratori subscribitur in minutiæ modum) restituitur A 354; nec enim augetur multiplicatione per E 100, dum productus 35400 diuisione per eundem E 100 minuitur. Sed diuisio illa adhibito exponente; qui debetur diuisori E 100, absoluitur. Diuide ergo A ita auctum duplici figura O, & exponente insignitum, per diuisorem B: fiet quotiens C 1 4 1' 6 integer cum fracto decadico; qui duabus figuris constat ob duas appositas figuras O ad numerum A diuidendum. De qua diuisione aliquid præterea dicendum occurret propositione 47. Vbi de diuisione decadicorum agi debet.

A 354'00	C 141'6
B 25	
D 35400	
E 100	

PROP.

PROP. XXXIX. *Probl.*

Decadicam fractionem in fractionem vulgarem datæ denominationis; quando, & quomodo fieri poterit, conuertere.

Constructio.

Problema hoc methodo non potest absolui planiori, quàm ea, quæ à Proportionum regula petitur: vnde præterea colligetur quando proposita conuersio impossibilis futura est. Sit ergo decadica fractio A 3′2 conuertenda in fractionem communem: cuius denominator datus sit B 25. ducantur in se mutuò numeri duo A & B; vt producatur C. Tum à producto numero C abiiciatur duplex figura O; vt reliquus fiat numerus D. Hic ergo esto numerator fractionis: cuius denominator sit datus numerus B. Dico factum esse, quod proponitur, fractionem scilicet D B æqualem esse datæ fractioni decadicæ A.

A 3′2	B 25	C 800
D 8	E 32	
B 25	F 100	B 25

Demonstratio.

Exprimatur fractio decadica A, fractionis communis more qualis est fractio E F (exponens enim fractionis A duas figuras afficit; & secundum progressionis decadicæ terminum F 100 designat, vt ex dictis superiùs constat) Si ergo reperiatur numerus, ad quem ita se habeat denominator B datus, vt se habet denominator F ad numeratorem E: haud dubium, quin fractio illa æqualis sit fractioni E F, siue fractioni decadicæ A per Prop. 5. lib. 2. Sed ita se habet denominator B ad numerum D; vt F se habet ad E. Ergo fractio D B æqualis est decadicæ fractioni E F. Probatur minor. Ducti sunt in se inuicem duo numeri A & B; genitúsque est ex ea multiplicatione numerus C: qui diuisus est per numerum F. dum ex ipso numero C reiecta est duplex illa figura O (sic enim C per D diuiditur, vt propositionis 46. scholio declaratum est) & factus est quotiens D per illam diuisionem. Si ergo quotiens D ducatur in diuisorem F; producetur numerus C. Ergo idem numerus C producitur per multiplicationem mutuam numerorũ F, D: qui productus fuerat per multiplicationem numerorum A, B. Quare cum idem numerus C fiat ex F in D: & ex A in B. ita erit F primus, ad A, siue E secundum; vt B tertius ad D quartum

per Prop. 49. lib. 1. Ergo per Prop. 5. lib. 2. æquales sunt fractiones E F (siue decadica A) & D B. reuocata ergo est fractio decadica A in fractionem vulgarem D B. Quod faciendum erat.

Corollarium.

Ex solutione eiúsque proxima demonstratione haud ægrè coniicias: quando absolui non poterit huiusmodi conuersio. Quoties enim per multiplicationem duorum numerorum A & B. numerorum scilicet fractionis decadicæ, & dati denominatoris: gignetur numerus; qui diuidi nequeat per denominatorem F ab exponente fractionis A conuertendæ designatum; toties impossibilis erit illa conuersio, vt euidens est illius enim diuisionis quotiens numerator esse debet fractionis, cuius denominator datus est B. At quomodo quotiens, numerator esse queat: cum simplex non sit numerus, sed sibi annexam quandam fractionem contineat? Euidens præterea est numerum illum, qui ex numero A fractionis conuertendæ, & numero B denominationis datæ in se mutuo ductis generatur: tot figuris O postremis constare debere: quot exponens decadicus numerum A afficiens indicat, hoc est, quot denominator F fractionis E F fractioni A decadicæ æqualis continet. Numeri enim C, ex A in B producti diuisio per F, aliter præcisa & adæquata esse non potest: cum diuisio huiusmodi absoluatur abiectis solum tot figuris postremis à numero diuidendò: quot figuris O postremis constat diuisor F. Si ergo postremæ diuidendi figuræ forent significatiuæ, non autem figuræ O: eas reliquas fieri post diuisionem necesse esset: atque adeò præcisa & adæquata diuisio minimè foret; sed quotiens integro & fracto constaret. Atque ex iis patet quomodo & quando decadica minutia in vulgarem conuerti nequeat.

Scholium.

Ex huius propositionis 39 demonstratione eiusque proximo corollario colligi potest, quàm rarò contingat decadicam minutiam in communem datæ denominationis conuerti posse. Quam raro enim continget ex multiplicatione numeratoris decadici in datum denominatorem gigni numerum, qui figuris O postremis totidem saltem constet: quot exponens, numeratorem illum decadicum afficiens, indicat; vt possit absolui diuisio illa ad solutionem necessaria; quæ diuidendum præcisè exhauriat nullo facto reliquo numero? Verum tamen cum decadicæ minutiæ adhibeantur communium loco, vt harum operationes (quæ longiores & intricatiores esse solent) iniri cum compendio possint: necesse erit, vt plurimum, absoluto calculo decadicas ad communes reuocari: vt scilicet mensuræ

rerum

rerum materialium ex instituto definitæ : quæ rarò decadicis terminis conueniunt, innotescant. Hoc ergo in scholio aptè ad Propositionem superiorem explicari debet, quomodo, etsi non præcisè conuersio decadicæ fractionis in vulgarem fieri queat; possit tamen accedere quàm proximè, ita vt proposita quæstio soluta censeatur. Quod quidem exemplis aliquot infra clariùs exponam: sed hic ea priùs, vnde posteà lux petatur, proponenda sunt.

Dico igitur fractionem quamlibet decadicam, in aliam vulgarem cuiuslibet denominationis, conuersionem quandam admittere, non quidem simplicem : qualis hac Propositione 39. explicata est; sed complexam, & pluribus quàm duobus membris constitutam. Quæ, vt se habeant, hoc exemplo declaro. Sit fractio A decadica in communem mutanda, cuius denominator datus sit C. Ducatur numerus A in numerum C, vt in constructione superiori præstitum est, & ex ea multiplicatione nascatur D: qui iuxta eandem constructionem diuidi debet per terminum B progressionis decadicæ per exponentem numeri A designatum, hoc est, per secundum, qui est 100. Quotiens ergo erit, vel fractio D B fractionum communium more; numeratore scilicet D, & denominatore B expressis designata, vel decadica fractio D, adscito in locum denominatoris B 100 decadici, eius exponente: qui duas postremas figuras 7, 5, numeri D afficiat.

A 7′5 C 45
D 3375 D 337′5
B 100 C 45
C 45 E 33 G 7′5
E 33 F 75 C 45 C 45
C 45 B 100
G 45

Vtrouis autem modo quotiens huiusmodi exprimatur; numerator statui debet fractionis, cuius denominator sit numerus datus C iuxta eandem constructionem superiorem, eiúsque adductam demonstrationem: Ita vt tota ipsa fractio D B suo & numeratore D, & denominatore B constituta, & absoluta, censeatur numeratoris tantùm munere fungi, cuius denominator sit numerus C datus: atque hoc modo fractio huiusmodi tribus numeris constat; quorum duo D & B numeratorem constituunt; tertius verò C denominatorem: quem distinctionis gratiâ duabus interiectis lineolis à suo illo complexo numeratore D B seiunxi. Eodem modo. Si fractio D B decadicè exprimatur assumpto Exponente, loco termini B 100: ei adiungi debet idem denominator C 45; vt fiat fractio D C; sed cuius numerator D simplex non est; sed compositus ex integro 33, & fracto decadicè expresso 7′5. Poterit autem vterque fractus hic numerus aliter designari: prior quidem D B, C: vt habet numerus E C cum F B, C; posterior autem, vt est E C cum G C: si nimirum diuidatur. Numerator D, quia maior est denominatoribus suis, per ipsos denominatores: sensúsque

prioris exprimetur; si dicas. *Triginta tres, quadragesima quinta cum septuaginta quinque centesimis diuisis per quadraginta quinque.* ofterior verò dicetur, *Triginta tres quadragesima quinta & septem prima & quinque secunda diuisa per quadraginta quinque.* Ex quibus patet decadicam minutiam nullam non posse conuerti in minutiam communem datæ denominationis: cuius numerator simplex non sit numerus; sed sit ipse iam constitutus fractus numerus per numeratorem & denominatorem hoc est, sit fractio, quæ diuidatur per datum denominatorem vt asserui.

Quare si prior fractio D B diuidatur iuxta priorem modum fractiones diuidendi Prop. 25. traditum, per numerum C (hoc est, numero C supposita vnitate H, vt fiat fractio C H) si multiplicetur D per H, vt fiat idem D numerator quotientis futuri: & numerator C ducatur in denominatorem B, vt fiat eiusdem quotientis denominator L, exprimet fractio D L simplex valorem fractionis complexæ: cuius numerator est fractio D B, & C denominator: atque adeò, cum hæc æqualis sit decadicæ fractioni A superioris exempli; erit & fractio D L æqualis eidem fractioni A. Quod verum esse ostendetur si numero A, loco exponentis, supponatur verus denominator B, & iuxta Propositionem 15. ducatur A in L, & D in B: fiet enim vtrimque numerus G. Quod certissimum signum est, vt citata Propositione demonstratur, fractiones duas A B, D L æquales esse. Vnde colligere licet confirmationem conuersionis decadicæ fractionis A in fractionem complexam D B, C; cuius denominator C datus erat. Quæ eadem confirmatio fractioni D C decadicarum more expressæ æquè conuenit.

D 3375	C 45	D 3375
B 100	H 1	L 4500

A 7'5'	
A 75	D 3375
B 100	L 4500
	G 337500

PROP. XXXX. *Probl.*

minutiam decadicam in aliam decadicam minutiam reuocare: cuius data sit denominatio, quando fieri potest.

Constructio prior.

Data sit decadica minutia A; prima, & secunda continens, reuocanda

A 2'8	B 28
	C 100
D 2'800	E 2800
	F 10000

da in aliam minutiam decadicam æqualem, cuius data sit denominatio: quæ primo quidem maior sit denominatione minutiæ A conuertendæ: vt, si præter prima & secunda. Continere etiam debeat tertia & quarta. Id dicto citiùs expedieris, si ad datam fractionem A figuras duas O apposueris, vt fiat fractio decadica D.

Demonstratio.

Loco exponentium tam fractionis A, quàm fractionis D, ipsi termini decadicæ progressionis ab exponentibus designati substituantur tanquam denominatores: vt fiant fractiones, fractionum communium more, B C, & E F. Constat ergo fractum E F fracto B C æqualem esse. Nam fracti B C tam numerator B, quàm denominator C multiplicatus est per eundem numerum 100; dum vtrique apposita est duplex figura O; vt fieret fracti E F numerator E, & denominator F: eadem ergo est ratio E ad F, & B ad C per Proposit. 3. libri 2. Ergo etiam fractus E F æqualis est fracto B C per Proposit. 5. lib. 2. Sed E F æqualis est decadico D, & B C æqualis decadico A. Ergo, & ipsi D & A sunt æquales. Sed D per constructionem, vt exponens indicat præter prima & secunda continet tertia & quarta. Ergo fractus A reductus est ad decadicum D datæ denominationis.

Constructio secunda.

Sit iam fractio decadica reuocanda ad decadicam: cuius data denominatio minor sit ipsius conuertendi denominatione. Vel ergo diuidi potest conuertendæ fractionis denominator per terminum quempiam progressionis decadicæ, ita vt quotiens generetur; cuius denominatio sit ea, quæ postulatur, vel ita non potest diuidi. Si primum, solutio possibilis est, si secundum, secùs. Detur ergo fractio D ad quarta vsque perueniens: quæ reuocanda sit ad fractionem prima tantum & secunda continentem. Itaque quia denominatio fracti D diuidi potest per terminum decadicum 100 (quæ diuisio absoluitur abiectis ex numero D duabus figuris O postremis, vt sæpiùs iam dictum, & factitatum est) ita vt quotiens; qui est A, contineat prima tantùm, & secunda; vt data denominatio postulat: non solum possibilis est solutio problematis, verùm etiam per

D 2'800	E	2800
	F	10000
A 2'8	B 28	
	C 100	

illam diuisionem, siue abiectionem figurarum O ex numero D, tot, quot diuisor 100, constat inuenta est: Ita vt quotiens A sit fractio quæsita decadica æqualis decadicæ fractionis D. Patet. Nam si D more cōsueto minutiarum vulgarium designetur, vt E F: cuius numerator E, simul & denominator F diuidatur per 100: fiet quotiens fractio B C æqualis per Prop. 5. lib. 2. fractioni E F: sunt enim per Prop. 4. proportionales E F, & B C. Sed B C, & A, sicut E F, & D æquales sunt ex suppositione. Ergo æquales etiam sunt A & D decadicè expressæ. Reuocatus est ergo fractus decadicus D ad fractum decadicum A, datam denominationem primorum & secundorum obtinentem.

At vero si proponatur fractus D decadicus: qui nullam admittit diuisionem per vllum progressionis decadicæ terminum: constat enim figura postrema significatiua: quæ superfit necesse est, diuiso numero D per quemnis terminum progressionis decadicæ: omnes enim huiusmodi termini figuris O omnibus præter primam constant; quæ sibi superpositas numeri cuiusuis diuidendi figuras significatiuas immutare non sunt aptæ. Hoc, inquam, in casu quæstio solutionem nullam admittit; & impossibilis est. Impossibilis item erit, & ob eandem rationem; si numerus decadicus diuidi quidem possit per terminum quempiam progressionis decadicæ: sed tamen facta diuisione quotiens datam denominationem non obtinet. Ecce in eodem schemate, fractus decadicus C ad quartam vsque porrectus proponatur in fractum reducendus: qui secunda tantum contineat. Quia numerus C ob vnicam postremam figuram O, per terminum vnicum decadicum 10 præcisè diuidi potest, abiecta scilicet sua illa figura O postrema quotiens autem E continet non tantum secunda, vt postulatur; sed etiam tertia: etiam in hoc casu quæstio impossibilis censeri debet. Quare fractum decadicum in fractum item decadicum datæ denominationis reuocauimus, quando fieri potest; & quando fieri non possit, ostendimus. Quod præstandum erat.

D	2'804
C	2'860
E	2'86

Scholium

Ex Propositionis huius allata probatione constat; appositam illam determinationem vniuersalem (*quando fieri potest*) in hanc particularem, & explicariorem conuerti posse: ita vt in hæc verba efferatur Propositio. Minutiam decadicam in aliam reuocare datæ denominationis: *oportet autem denominationem datam maiorem esse denominatione reuocandæ minutiæ.* Ostensum enim est reuocationem illam semper esse impossibilem; si data denominatio, ad quam reductio fieri postulatur, maior non sit denominatione minutiæ conuertendæ. Id est non sit maior terminus progressionis decadicæ,

decadicæ, siue ab vnitate (quæ primus est terminus) remotior. Quod paulo apertius deducta ex ipsa decadicorum natura & procreatione, ratiocinatione in hunc modum expono. Cum primum quodlibet decadicum minutum (quod est pars decima vnitatis & cuius exponens, siue denominator est 10, siue primus post vnitatem terminus progressionis decadicæ) contineat decem secunda decadica minuta: nec possit secundorum multitudo numerum ipsum denarium attingere, sed eam denario minorem semper esse necesse sit: alioquin si denarium attingeret iam ad prima pertineret: quomodo fractio decadica primis & secundis constans ad primorum tantùm denominationem reuocari queat? vt in apposito exemplo.

A 2ʹ6	B 26
	C 100

Fractus numerus A per exponentem vel idem in modum fractionis B C designatus (continet prima duo, secunda sex: siue duas decimas, vnius alicuius partes) & sex centesimas: quomodo sex illa secunda siue sex centesimæ in numerum quempiam fractum æqualem reduci possunt: cuius denominator sit terminus 10, qui primorum exponens siue denominator est: cum decem ipsæ partes centesimæ, à quibus sex partes centesimæ deficiunt; vnicum primum, siue vnicam tantùm partem decimam constituunt? Multò minùs tertia, quarta, &c. ad prima reuocari possunt. Quod autem de secundis, tertiis &c. Ad prima conuertendis dictum est: idem dictum puta de tertiorum, quartorum, &c. ad secunda conuersione.

Dices. Numerus hîc fractus A, qui effertur, vel, *duo prima nulla secunda*; vel, vt propositione 30. explicatum est, *viginti secunda*: poterit ad prima reuocari: ita vt viginti secunda, abiecta figura O dicantur duo prima, nulla amplius secundorum facta mentione.

A 2ʹ0
B 2ʹ6

respondeo viginti illa secunda propriè non conuerti in duo prima, etsi expungatur figura illa O à numero A. Cum ipse numerus A, siue absit, siue adsit figura O propriè iam dicatur duo prima continere. Nec valorem mutat, si dixeris, duo prima, nulla secunda; quid enim nulla secunda ad duo prima addunt, nisi nihilum. At verò si proponatur fractus B 2ʹ6. haud quaquam sex illa secunda ad prima transire possunt ita vt valor numeri B, nulla secundorum facta mentione exprimi possit. Cum sex secunda primum vnicum, quod constat secundis decem, nequeant constituere.

PROP.

PROP. XLI. *Probl.*

Integrum quemlibet numerum, in decadicum cuiusvis datæ denominationis conuertere.

Constructio

Sit integer numerús A in fractum decadicum conuertendus: cuius denominatio data ad secunda pertineat: hoc est, exponens eius pertineat ad terminum progressionis decadicæ post vnitatem secundum vt Prop. 29. huius lib. 2. declaratum est, apponatur ad numerum A duplex figura O, quam terminus ille progressionis continet: quarum prior exponente afficiatur; cuiusmodi est numerus B. Dico B numerum esse decadicum, qui quæritur, æqualem scilicet esse numero dato A: & datam secundorum denominationem sibi vendicare. Præter scholium Propositionis 38. fit hæc.

A 24	B 240'0
	C 2400
	——
	D 100

Demonstratio.

Numerus fractus B decadicus in fractum communem C D conuertatur, adscito, loco exponentis, ipso vero termino D secundo progressionis decadicæ. Erit fractio C D æqualis numero integro A. Quod enim incrementum de nouo consequitur numerus A; si per terminum 100 multiplicetur; vt fiat C, & per eundem diuidatur productus C; vt fiat fractio C D? Vel etiam ita. Diuidantur duo numeri C, D per eundem numerum 100, quæ diuisio absoluitur reiectâ ex vtroque duplici illa figura O: erit fractio reliqua, cuius numerator est 24, & denominator 1, æqualis fractioni C D per Prop. 5. huius lib. 2. Sed reliqua illa fractio æqualis est numero A. Ergo & fractio C D, eidem A erit æqualis: Ergo & æqualis eidem erit fractio decadica B, æqualis ex constructione fractioni C D, Integrum ergo in decadicum datæ denominationis conuerti. Quod faciendum erat.

PROP. XXXXII. *Probl.*

Duas vel plures decadicas minutias diuersæ denominationis ad eandem denominationem reducere.

Constructio

Conſtructio & demonſtratio.

Expeditiſſima eſt huius generis minutiarum ad eandem denominationem reductio. Sint enim duæ diuerſæ minutiæ A & B diuerſæ denominationis ad eandem reducendæ. Quia prior A, tertia continet, quibus caret altera B: apponatur eidem B figura O; quæ tertiorum locum ſuppleat, vt fiat C: erit minutia C eiuſdem denominationis, cuius eſt minutia A: & verò vtriuſque denominator verus, cuius munere exponens fungitur, eſt progreſſionis decadicæ terminus 1000. Eſt præterea minutia C æqualis minutiæ B. Vtraque enim continet prima duo. Secunda quinque. Tertia nulla. Vel etiam, quia B multiplicatur per 10, & productus C per eundem terminum 10 diuiditur, vt eius exponens exigit. Ergo C æqualis eſt minutiæ B: qua ratiocinatione Propoſitione antecedenti vſus ſum. Duæ ergo minutiæ A & B reductæ ſunt ad eandem denominationem; vel potiùs, minutia B minoris denominationis in minutiam C datæ denominationis maioris, quæ ſit denominatio fractionis alterius A, conuerſa eſt per Prop. 40.

A	4′52
B	2′5
C	2′50

Quod ſi integer numerus, vel integer cum fracto decadico, & fractus decadicus reducendi proponerentur: nec alia praxis, nec alia probatio operationis à præcedenti caſu diuerſa adhiberetur.

Si quando vnam aliquam reducendarum fractionum conſtare figuris aliquot O, exponente affectis; eámque maioris denominationis eſſe contingat quam alteram: quales ſunt minutiæ A & B. Tunc quæſita reductio abſoluetur reiectis aliquot figuris O, ex minutia illa maioris denominationis: vt hic ex minutia A binæ reiiciuntur, vt fiat C eiuſdem denominationis cum minutia B; quæ prima & ſecunda continet. Conſtat autem fractionem C, fractioni A æqualem eſſe.

A	52′000
C	52′0
B	34′7

Nam per reiectionem duplicis illius figuræ O ex numero A; diuiditur non tantùm numerator A fractionis; cuius denominator verus, vt exponens definit, foret 1000, ſed etiam hic ipſe denominator, per eundem numerum 100; dum ex decadico A binæ figuræ O reiiciuntur. Vt fiat C: qui ad ſuum verum denominatorem 100 eandem rationem habet, quam A habet ad ſuum 10000 per Prop. 4. huius lib. 2. Ergo æquales ſunt duo fracti numeri A & C. Rectè igitur in eo caſu facta eſt reductio abiectis figuris O ex decadico A: quæ eadem abſolui potuiſſet iuxta modum paullò ante traditum: ſi ad fractum B duplex figura O fuiſſet appoſita: ſic enim eius denominatio denominationi fractionis A æqualis euaſiſſet.

Nec alia futura est ratio huius reductionis, si plures quàm duo fracti numeri diuersæ denominationis proponantur reducendi: siue fracti simplices, siue integri cum fractis adhærentibus, siue etiam integri soli fuerint. Additis enim vel reiectis, prout variæ illorum denominationes exigent, figuris O, ad æqualitatem denominationis reducentur omnes iuxta methodum expositam. Fracti ergo decadici numeri diuersæ denominationis ad eandem reducti sunt. Quod præstandum erat.

PROP. XXXXIII. *Probl.*

Minutiam decadicam ad minimos terminos decadicos reducere: quando fieri potest.

Constructio & demonstratio.

Datus sit fractus numerus decadicus A figuris aliquot O postremis constans. Abiiciantur omnes huiusmodi figuræ O, si in omnes cadat exponentis affectio, vt hîc; ex numero A; ita vt relinquatur fractus B figuris constans significatiuis. Dico A reductum esse ad minimum numerum decadicum B; nec ad minorem quàm B reduci posse. Quod enim fractus B fracto A sit æqualis constat vel ex ipsa Propositione antecedente: reductus siquidem est fractus A maioris denominationis ad fractum B minoris denominationis per abiectionem duplicis figuræ O, siue, vt ibidem declaratum est, per diuisionem tam numeratoris A veri, quàm veri denominatoris 10000 eiusdem per terminum 100 progressionis decadicæ. Ergo per Prop. 5. huius lib. 2. Fractus B æqualis est fracto A. Ostendendum ergo restat fractum B decadicum in minimis terminis decadicis esse constitutum Quod ita planum fiet.

A	4'500
B	4'5

Exponatur fractus B decadicus in modum minutiæ communis: cuius denominator verus sit C, vt exigit exponens. Vt igitur fractio communis B C ad minores terminos reducatur; ita vt denominator sit terminus aliquis progressionis decadicæ (hoc enim exigit apposita conditio: qua supponitur datus decadicus ad decadicum reduci, hoc est ad fractum; cuius denominator terminus quispiam sit progressionis decadicæ.) Diuidi debet tam numerator B, quàm denominator C, per terminum quempiam decadicæ progressionis: neque enim posset denominator C, qui est terminus progressionis decadicæ diuidi per diuisorem quempiam, ita vt quotiens decadicus sit terminus, nisi etiam ipse diuisor, decadicus sit terminus. Cum enim

B	45
C	100

enim quotiens, qui terminus quiſpiam eſt progreſſionis decadicæ ex ſuppoſitione, metiatur B eiuſdem progreſſionis terminum, per diuiſorem, id eſt, quotiens multiplicans diuiſorem producat terminum B) terminus autem progreſſionis cuiuſuis ab vnitate, alium terminum eiuſdem progreſſionis metiri non poſſit, niſi per terminum eiuſdemmet progreſſionis per prop. 11. lib. 9. Eucl. neceſſe eſt diuiſorem, qui terminum C diuidens terminum decadicum producit, eſſe etiam decadicum, atque adeò poſtremam ſaltem nanciſci figuram O. Quod cum ita ſit; non poterit diuiſor idem decadicus numerum B, cuius vltima figura eſt ex hypotheſi digitus ſiue ſignificatiua, adæquatè diuidere, ſiue metiri, ita vt B numerator exhauriatur, nihilque ſuperſit. Ergo non poterit huiuſmodi fractio in eo caſu ad minores terminos decadicos reduci. Quamuis enim denominator C ad minores terminos reduci poſſit per diuiſorem, qui vt oſtendi, decadicus eſt; tamen quia numerator B per eundem diuiſorem exhauriri non poteſt: non poterit fractio ipſa B C ad minores terminos decadicos reduci: ſed ipſa in minimis terminis conſiſtet. Vnde colligitur illum quemlibet fractum numerum decadicum in minimis terminis verſari, qui nulla conſtat figura O poſtrema. Reduximus ergo decadicam minutiam ad minimos terminos: quando eſt reductionis capax, quando verò capax non ſit, declarauimus: totique Propoſitioni ſatisfecimus. Quod præſtandum erat.

PROP. XLIV. *Probl.*

Decadicas plures minutias in minutiam vnam decadicam per additionem colligere.

Conſtructio.

Proponi poſſunt decadicæ minutiæ variam nactæ denominationem: quarum additio ineunda eſt. Imo & ipſæ non rarò integris adhærebunt. Vt ſi dentur minutiæ A, B, C, D, E: quarum duæ B & D præter minutias etiam integros numeros continent.

A 4′53, B 23—621. C 0′47. D 5—3′04. E 2′

Reducantur omnes ad eandem denominationem per Prop. 42. huius lib. 2. quæ neceſſario maxima erit omnium: quæ in his numeris occurrerit: ad quam reliqui euehentur iuxta methodum citatâ Propoſitione traditam. Vt, quia denominatio eorum maxima tertiis conſtare deprehenditur: quibus caret fractio E, quæ prima tantùm continet: ideo duplex illi figura O apponenda eſt.

quia item fractio C, prima nulla continet; sed tantùm secunda & tertia: ideo locum primorum occupare debet figura O. Quæ etiam figura O in fractione D secundorum, quibus caret, vices gerit. Quamquam reductio illa non omninò necessaria est: sed ipsa numerorum dispositio apta ad additionem, illam supplere possit. Ita ergo componantur numeri, vt prima omnia, omnia secunda, omnia tertia, eundem gradum occupent; rectamque seriem singula minuta eiusdem speciei constituant: siue series quælibet continua sit ope figurarum O, loca vacua replentium; vt vitetur errandi periculum, velut hîc factitatum est: siue vacua ipsa loca relinquantur, longè aliter quàm in additione integrorum contingat: In qua singuli numeri à dextra ad leuam continuato graduum ordine designantur. Dispositis ergo hunc in modum numeris, additio, vt in integris, absolui debet, initio facto à serie ad dextram vltima, quæ hoc in exemplo ad tertia pertinet. Ita productus est per horum numerorum additionem numerus F: qui integro numero 29, & fracto decadico 625 constat: cuius exponentem non per accentum, qui eius primæ figuræ 6 incumbat: sed per lineolam eidem figuræ 6 præfixam, & integrum à fracto clariùs distinguentem, de industria designaui; sicut & numeros partiales B & D, vt schema exhibet. Dico igitur numerum F æqualem esse partialibus omnibus numeris A, B, C, D, E.

A	— 4'53
B	23—6'21
C	— 0'47
D	5—3'04
E	— 2'00
	———
F	29 — 625

Demonstratio.

Cum in hisce decadicis fractionibus non secus ac in integris; figurarum valor in decupla ratione augeatur ratione gradus proximè ad læuam præcedentis: vt ad Propositionem 38 huius lib. 2. declaratum est. Vt exempli gratiâ numeri decadici A, figura vltima 3, tria simpliciter tertia significat: quæ si in præcedenti gradu, quem figura 5 occupat, statueretur; non iam tertia tria, sed decies tria, exprimeret: sicut, figura 5 significat, absolutè quidem, quinque secunda: sed sequentis gradus habita ratione dici debet æquiualere tertiis quinquaginta, valore eius iuxta decuplam rationem aucto, qua eadem de causa figura prima 4 ratione gradus tertij centies seipsam significat: ita vt numerus A, qui efferretur *quatuor prima, quinque secunda, tria tertia*; ita etiam, seruato tamen valore, enuntiari queat *quadringenta quinquaginta tria tertia*. Vt citato loco habetur. Imo etiam continuetur ad integros præcedentes numeros valor ille ratione gradus decuplo maior; cum inquam, fracti decadici eodem in omnibus modo se habeant, vt integri: quid mirum, si eadem etiam additionis methodus ipsis æquè ac integris conueniat?

Vnde

Vnde præterea sequitur, si quod huiusmodi additionis examen ineundum sit: eodem modo iniri debere; quo in integris institui solet; siue nouenarij abiectio, siue aliud quodcunque adhibeatur.

PROP. XLV. *Probl.*

Decadicam minorem minutiam ex decadica maiore subtrahere

Constructio.

Sit decadica minutia minor B à maiore A (duplex exemplum schema exhibet) subducenda. Numeri statuantur seruata singularum figurarum denominatione, gradúve, vt in additione præceptum est; ita vt, si vacua loca occurrant aliquando, in ea inuehatur consuetum figuræ O supplementum: tum vsurpetur subtractionis integrorum tradita ratio. Ita in priori exemplo facta subtractione relinquitur C 5'36. Apposita verò est ad maiorem A figura O ad tertiorum, quibus carebat, supplendum locum, vt figura inferior 4 ad tertia pertinens exigebat, vt subtrahi posset. In secundo verò exemplo ab integro cum fracto A subductus est B integer cum fracto: & relictus est integer cum fracto C. 1-836.

A 6'30	A 5-630
B 094	B 3-794
C 5'36	C 1-836

Demonstratio.

Si fracti huiusmodi decadici perinde se habeant, vt Propositione antecedente declaratum est, vt ipsi integri seruata tantùm decadicorum denominatione: idem debet vtrisque conuenire subtrahendi modus. Quod ipsum ex communium fractionum subtractione, si hæ decadicæ earum forma designentur, perspicuum euadit. Sic enim stabunt huc allatæ minutiæ superiores ad eandem denominationem D expressam reuocatæ. Dematur ergo numerator B à numeratore A; reliquus fiet numerator C, cui supponi debet idem denominator D, vt fiat fractus C D, reliquus subducto B D minore ex maiore A D: quæ minutia C D decadicè exprimi potest expuncto denominatore D, & in eius locum substituto eius exponente: vt supra factum est. Quod

A 630	A 630	A 5630	A 5630
D 1000	B 94	D 1000	B 3794
B 94	C 536	B 3794	C 1836
D 1000	D 1000	D 1000	D 1000

non tantum verum cernitur; cum fracti propriè, & vnitate minores proponuntur, vt habet prius schematis exemplum, sed etiam cum vterque vnitate maior est, & integer cum fracto; quales exhibet exemplum posterius. Fractum ergo decadicum numerum minorem à fracto decadico maiore rectè subduximus. Quod faciendum erat.

PROP. XLVI. *Probl.*

Numerum integrum, vel integrum cum fracto decadico per fractum decadicum; aut etiam per integrum cum fracto decadico multiplicare.

Constructio.

Quicumque numerus per decadicum verum & vnitate minorem, vel alium vnitate maiorem decadici speciem indutum multiplicandus proponatur: multiplicentur inter se seruatâ integrorum multiplicationis lege: tum producto exponens tribuatur ex numerorum in se ductorum exponentibus additis conflatus: numerus enim huiusmodi; is est qui per multiplicationem produci debet. Sit, verbi gratia, numerus integer A per fractum decadicum B multiplicandus. Ductis inter se numeris A & B more solito integrorum, producitur numerus C: qui exponentem exigit compositum ex additione exponentis B & exponentis A: qui in hoc casu nullus est. Solus ergo exponens numeri B ei tribui debet; qui duas figuras extremas 7, 2 producti C afficit; ita vt duæ priores numerum integrum significent. Exponens autem huic numero C debitus, vel accentu imposito; vel, quod satius est ad meliùs integrum numerum à fracto distinguendum, præfixa linea denotabitur vt refert paradigma.

A	24
B	5'3
C	127'2
	vel
C	12-72

Sit secundò numerus A decadicus per decadicum B multiplicandus. Facta multiplicatione, productus numerus C exponentem sibi vendicabit: qui habetur additis exponentibus vtriusque numeri A & B. Cum ergo exponens vterque duas figuras afficiat: atque adeo terminum designet progressionis decadicæ; cui debetur exponens 2, vt Propositione 30. huius declaratum est, si numerus 2 addatur ad 2, vt fiat numerus 4: erit 4 exponens numeri C per multiplicationem mutuam numerorum A & B fractorum producti: qui idem exponens 4. habetur, si sumatur numerus figurarum exponente affectarum numeri vtriusque A & B. Quod

A	2'4
B	5'3
C	1'272

ex

ex demonſtratione ſequenti apertiùs etiam apparebit. Nec alia futura eſt ratio, quicunque caſus proponatur: ſiue numerorum multiplicandorum alreruter; ſiue alter tantùm componatur ex integro & fracto decadico

Demonſtratio.

Clara eſt traditæ methodi ratio ex communi, & generali fractorum omnium, quorum ſpecies quædam ſunt fracti decadici, multiplicatione. Reducantur enim in fractionem communem duo proximè allati fracti decadici A & B; vt fiant duæ communes fractiones A D, B G multiplicandæ inter ſe. Abſoluetur hæc multiplicatio ductis in ſe tam numeratoribus A & B, vt fiat numerator C; quàm denominatoribus D & G, vt fiat denominator H. Abſoluitur autem multiplicatio denominatorum D & G; ſi figuræ omnes O, quibus conſtant, ſimul addantur vt Prop. 38. lib. 1. declaratum eſt, nullâ alia præter hanc additionem adhibitâ operatione, eò quod vnitas ſola, quæ numeris multiplicandis præfigitur, nullam in eis mutationem inducat. Patet ergo fractionis C H, denominatorem H componi ex additione figurarum O in denominatoribus D & G contétarum: ergo H eſt terminus quiſpiam Progreſſionis decadicæ: omnis enim numerus figuris O tantùm conſtans, quibus præfigatur vnitas, non poteſt non eſſe aliquis dictæ progreſſionis terminus, vt aliàs Prop. 33. huius lib. 2. oſtenſum eſt. Quare ſi in locum denominatoris H aſſumatur eius exponens, quo afficiatur numerator C, tot figuras afficere debet; quot ſunt figuræ O in denominatore H, hoc eſt, quot ſunt figuræ O in denominatoribus D & G, cum ex his ſimul additis conſletur denominator H. Quare exponens decadicus numero C debitus, rectè habetur: ſi exponentes numerorum A & B ſeſe multiplicantium ſimul addantur: ſiue, quod idem eſt; numerus figurarum vtriuſque ſimul numeri A & B affectarum ineatur: & totidem figuræ numeri C per multiplicationem producti afficiantur exponente ſymbolico, ſiue id per impoſitum accentum, ſiue per lineolam rectam, curuamúe præfixam præſtetur. Quare quouis in caſu numeri decadici tradita methodo rectè multiplicati ſunt. Quod faciendum erat.

A 24	B 53
D 100	G 100
C 1272	
H 10000	

Scholium.

Hic porrò idem contingere neceſſe eſt: quod in minutiis communibus contingere probatum eſt Prop. 24. in ſcholio nimirum per multiplicationem

cationem minutiarum, numerum produci; qui vtroque multiplicante minor fit. Quod, cur & quomodo contingat, ibidem declaratum est. Hæ enim decadicæ minutiæ nihil eorum, quæ minutiis communibus conueniunt, cum earum sint species, vt à se alienum non admittunt.

PROP. XXXXVII. *Probl.*

Decadicorum numerorum per decadicos diuisionem instituere.

Constructio.

Totidem casus in decadicorum diuisione: quot in multiplicatione possunt occurrere: quos omnes soluere licebit, sicut in multiplicatione factum est, vnâ eadémque methodo, ei planè oppositâ, quæ in multiplicatione tradita est; vt ipsæ operationes vbique semper oppositæ sunt. Datus ergo numerus diuidendus debet in primis exponente constare non minore quàm sit exponens diuisoris; quod si ipsi diuidendo minor exponens ex se competat: is debet augeri per appositionem figuræ O tandiu repetitæ, donec exponens minor non sit diuisoris exponente, sed vel æqualis, vel etiam maior euadat. Hac demùm præparatione adhibitâ instituatur diuisio, more integrorũ: cuius quotienti assignetur exponens; qui relinquitur dempto diuisoris exponente ab exponente diuidendi (hæc enim subtractio fieri poterit iuxta eam, cuius proximè memini, cautionem) dico tunc petitam diuisionem absolutam esse. Exemplis aliquot res tota clarior euadet.

A 1′272
B 5′3 (C 2′4

Sit numerus decadicus A diuidendus per decadicum numerum B. Quia igitur diuidendus A maiori exponente donatus est; quàm diuisor B: ideo facta diuisione, subducetur exponens diuisoris B ab exponente diuidendi A & quotienti C, reliquus tribuetur exponens. Atque ita absoluta erit instituta diuisio.

Sit secundò numerus A 38-4 per B diuidendus: sed diuisoris B exponens maior sit exponente diuidendi A (hic enim prima tantùm, ille prima & secunda continet.) Addatur ergo ad diuidendum A figura O vnica (vnica enim sufficit, vt fiat exponens numeri A æqualis exponenti numeri B: quamquam plures addi nihil vetat, vt nihil vetat illum hoc esse maiorem) tum instituatur diuisio more integrorum; huiúsque

A 38–4
A 38–40
B 1′6 (C 240

que diuiſionis quotiens ſit C 240: cui nullus debetur exponens atque adeò integer eſt. Cum enim exponens diuiſoris B æqualis ſit exponenti numeri diuidendi A; ſi ille ab hoc ſubducatur; nullus fit exponens reliquus; qui quotienti C tribui poſſit. Atque hoc obſeruato præcepto nullius non numeri diuiſio per decadicum inſtituetur. Quod oſtendo.

Demonſtratio.

Reſumatur prius exemplum: in quo diuiſo A per B genitus eſt quotiens C affectus exponente primorum & ſecundorum; qui relinquitur dempto exponente diuiſoris B ab exponente diuidendi A. Exprimantur hæ decadicæ fractiones communi fractorum more adſcito vero denominatore; qui terminus eſt progreſſionis decadicæ, quem exponens characteriſcus denotat. Mutabitur diuidendus A in fractum A D, diuiſor verò B in fractum B. Ac denique quotiens C in fractum C F. Oſtendo itaque diuiſâ fractione A D per fractionem B E, quotientem gigni fractionem C F: cuius denominator F ſit deſignatus ab exponente quotientis C. Id porrò euidenter colligitur ex poſteriore fractionem per fractionem diuidendi ratione ad Propoſitionem 25. traditâ & demonſtratâ. Per eam enim conſtat fractum A D per fractum B E rectè diuidi: ſi illius numerator A per huius numeratorem B; & denominator D per denominatorem E diuidantur: orietur enim ex priore diuiſione, quotientis C numerator; ex poſteriore autem eiuſdem quotientis denominator F. Cum ergo diuiſio denominatoris D per denominatorem E abſoluatur tota; ſi omnes figuræ O, quibus conſtat diuiſor E, ſubducantur à numero figurarum diuidendi D. & reliquæ quotienti aſſignentur: eáque ſubtractio præſtetur ſubducto Exponente diuiſoris B ab exponente diuidédi A: æquiualent enim exponentes terminis decadicæ progreſſionis, quorũ vices tanquam compendiarij characteres gerunt: Etiam exponens quotientis C, is erit qui debetur termino F: qui verus eſt denominator quotientis fracti ex diuiſione fractionis A D per B E geniti. Conſtat ergo cum decadicus numerus A per decadicum B diuiditur, & quotienti C aſſignatur exponens, qui habetur ſubducto exponente diuiſoris B ab exponente diuidendi A; rectè inſtitui diuiſionem: Atque eo modo rectè inſtitutam eſſe. Quod faciendum erat.

A 1′272	A 1272	B 53	C 24
B 5′3 (C 2′4	D 10000	E 100	F 100

Eadem eſt ſecundi casûs demonſtratio; in quo numeri diuidendi A exponens exponente diuiſoris B minor eſt; vt propterea ad ipſum A addenda fuerit figura O; vt exponens fieret maior, atque adeò æqualis exponenti diuiſoris B prima & ſecunda continentis. Sed enim memoria repetendum, quod ſuperiùs Prop. 41 & alibi declaratum eſt. Nimirum per huiuſmodi additionem non vnius tantùm figuræ O. ſed quotcunque libuerit; incrementum nullum accedere ad numerum A: dum enim addita eſt figura illa O ad figuram decadicam 4 exponente affectam, multiplicata quidem videtur figura 4 per numerum 10: ſed quia eadem multiplicatio per 10, cadit etiam in denominatorem, qui ab exponente deſignatur; ideo nec numerus 4, nec totus numerus A 384 illa acceſſione figuræ O augetur. Quod enim multiplicatione ad numerum A additur per multiplicationem per 10; idem ab eo aufertur; dum per eundem terminum 10 diuiditur: vt videre eſt; ſi decadica fractio A exprimatur adſcito vero ſuo denominatore D: ſi enim diuidatur tam numerator A quàm denominator D per 10. Id eſt, ſi demarur ex vtroque figura O vnica (ſic enim vterque A, & D diuiditur per 10 ex annotatis Prop. 46. lib. 1.) remanebit fractio C E æqualis fractioni A D per Prop. 5. huius lib. 2. Nec alia futura eſt ratio quotcunque figuræ O addantur ad numerũ decadicum A; vt exponentem aſſequatur æqualẽ; ſiue eundem terminum progreſſionis decadicæ, qui verus eſt denominator, deſignantem. Quibus poſitis. Secundus hîc caſus ad priorem iam demonſtratum adductus eſt, eadémque probatione ſtabilitur. Diuidetur ſiquidem decadicæ fractionis numerus figuris O auctus, per alterum decadicum numerum, & huius exponens ab exponente diuiſi numeri ſubducetur; vt relinquatur quotientis exponens; qui nullus erit, numerúſque integer per diuiſionem producetur; ſi numerum diuiſum & diuiſorem eodem exponente, qui ſcilicet totidem vtriúſque numeri figuras, vt hîc fit, afficiat; donari contingat. Rectè igitur etiam in hoc ſecundo caſu diuiſio numeri decadici ſimplicis, vel integri cum decadico, per decadicum iuxta traditam methodum inſtituta eſt. Quod fieri oportebat.

A	384′0
B	1′6
A	384′0
D	100
C	384
E	10

Corollarium.

Ex proximè dictis, quæ iis planè conſonant, quæ Propoſitione 46. ſuperiore expoſita ſunt; colligitur quando diuidendus numerus minor eſt diuiſore, ſiue decadici, ſiue abſoluti numeri & integri fuerint, addi poſſe ad diuidendum quamlibet figurarum O multitudinem exponente affectam, vt ſic auctus per diuiſorem maiorem diuidi queat. Vt ſi numerus

A

A ſimplex diuidi debeat per numerum ſimplicem B maiorem (qui duo

A 16	C 160′00	
—	———	(D 6′66
B 24	B 24	

numeri fractionem ſimplicem conſtituunt) addi poterunt ad diuidendum A, quotcunque libuerit figuræ O, ſed exponente affectæ : vt fiat diuidendus C æqualis priori diuidendo A : qui diuidatur per eundem diuiſorem B, vt fiat quotiens D decadicus : cuius ipſa prima figura exponente afficietur: eò quod diuiſor B exponente omni carere ſupponatur; atque adeò nullus eius exponens ab exponente diuiſi C ſubduci debeat, vt habeatur quotientis exponens iuxta hîc tradita diuiſionis præcepta, ſed idem quotienti D tribui debeat. Quæ iam ſuperiùs propoſitione 38. declarata ſunt: vbi conuerſio fractionis communis, qualis eſt A B, in decadicam D explicata eſt: hîc tamen eadem, cum per diuiſionem, de qua hîc agitur, abſoluatur, obiter maioris lucis gratiâ attingi debuère.

Scholium.

Ne quid hoc in negotio decadicorum necdum admodum trito omittatur, quoad per me fieri poterit; quod difficultatem aliquando creare poſſit Obſerua in ſuperiori aliiſque ſimilibus exemplis: Quod ſi numeri A

A 16′	C 16′000	
—	———	(D 0′666
B 24	B 24	

diuidendi, vel vtraque figura, vel vltima 6 tantùm, vt hîc ſuppono, exponente afficeretur; exponentem illum ſuæ ſemper vltimæ figuræ 6 inhærere, quæcunque apponatur figurarum O multitudo, vt refert C. Dum autem diuiſio inſtituetur, & ad quotientem D figura 6 ſtatuetur: exponens ei debitus eſſe debebit ſecundorum, atque adeò, vt à me ſeruari ſolitus exponentes notandi modus exigit, præfigenda erit figuræ 6 quotientis D, figura O accentu ſymbolico inſignita: ſic enim ſequens illa figura ſignificatiua 6 ad ſecunda pertinebit. Quod quidem rationi maximè conſentaneum deprehendes, ſi attendas, dum diuiſio inſtituitur, diuiſori B 24 ſuperponi numerum 16′0, cuius figuræ duæ exponente afficiuntur: Diuiſo ergo numero 16′0 per B 24 abſolutum, & omni exponente carentem quotientis D figura 6 ex ea diuiſione genita exponentem totum diuiſi numeri 16′0 ſibi vendicat, vt in probatione huius Propoſitionis oſtenſum eſt; eò quod nullus exponens diuiſoris, cum omni careat, ab exponente diuiſi dematur: ergo ſibi vendicat exponentem duas figuras afficientem, & prima, & ſecunda denominantem: ergo figuræ illi 6 quotientis præfigi debet figura O exponentem gerens, vt ipſa figura 6 ad ſecundam pertineat: ita vt quotiens D efferatur *prima, nulla. Secunda, ſex &c.* hinc cernis, ſi affectio exponentis ad primam figuram 1 numeri A 1′6, addiceretur: tunc

tientis D figuram 6 præcedi debere à duabus figuris O, quarum prima exponentem gerat, vt ſcilicet figura illa 6 quotientis, tunc tertia, tertiorum denominatione donetur, dum quotiens efferetur *nulla prima, nulla ſecunda ſex tertia* &c.

Hîc demùm licet obſeruare, quod in communium minutiarum diuiſione contingit. Nimirum per diuiſionem quotientem generari ipſa diuiſa minutia maiorem. Si enim diuidatur fractus A per fractum B iuxta diuiſionis traditam methodum: quotiens erit C integer cum fracto maior propterea, quàm diuiſus A, qui vnitate minor eſt. Ratio eadem eſt: quæ in fractis communibus eſt allata: quam vt facilius his applices. Conuerte hos decadicos in fractos vulgares aſſumptis denominatoribus veris loco exponentium. Fractus A exprimetur verà fractione A D: diuiſor verò B, fractione B E. Quotiens denique C, fractione C F.

A 2′40		C 1′5
B 1′6		
A 240	B 16	C 15
D 1000	E 100	F 10

Si ergo numerator A diuidatur per numeratorem B: habebis quotientis numeratorem C: cuius denominator F obtinebitur diuiſo denominatore D per denominatorem E. Ita vt quotiens C F ex diuiſione fracti A D per fractum B E maior ſit diuiſo fracto A D Quæ ergo allatæ ſunt huius effectûs rationes circa has communes minutias Prop. 25. in ſcholio huius lib. 2. eædem ad decadicos A, B, C debent applicari: cum hi ab illis ſola deſignatione per exponentes diſcrepent.

PROP. XLVIII. *Probl.*

Decadicam minutiam minutiæ decadicæ in ſimplicem minutiam decadicam conuertere.

Conſtructio & Demonſtratio

Quo ſenſu concipi debeat hæc Propoſitio, docetur Propoſitione 16. huius lib. 2. quam conſule. Proponatur minutia B minutiæ A, quaſi hæc illius totum foret. Multiplicentur A & B mutuò vt fiat C. Dico minutiam C eam eſſe, quæ inueſtigatur.

A 4′21
B 8′
C 3′368

Nam multiplicatis numeris A & B: & producto C, exponente qui ex additione exponentium A & B naſcitur, attributo iuxta leges multiplicationis decadicæ Prop. 46. huius lib. 2. ſtatutas: multiplicantur harum fractionum numeratores inter ſe, & inter ſe denominatores, vt ſæpiùs iam declaratum eſt, & quidem nuper

ad

ad calcem propositionis antecedentis: huiusmodi autem multiplicatione fractionem fractionis ad simplicem fractionem constat reduci per propositionem 16. huius lib. 2. Quare minutia B minutiæ A rectæ conuersa est in simplicem decadicam minutiam C. Quod erat faciendum.

Quod si proponatur minutia B minutiæ A, quæ & ipsa sit alterius minutiæ G minutia: eadem fere operatione ad simplicem totius minutiam conuertetur minutia B. Si enim in se ducantur fractiones duæ G & A vt fiat fractio C: reducta fuerit fractio A ad simplicem fraictonem C ex proximè dictis: ita vt fractio C sit totum respectu fractionis B, & dicatur B fractio fractionis C immediatè ad totum pertinentis. Quare si in se ducantur mutuò B & C: fiet fractio D simplex, in quam conuersa est fractio B fractionis C: erat autem iam fractio C conuersa fractio A fractionis G in simplicem fractionem. Ergo D est fractio simplex, in quam conuerti debet fractio B fractionis A fractionis G Eodem modo si plures perpetua serie forent fractiones fractionum: postrema omnium in simplicem totius fractionem reduceretur reductis duabus primis tum tertia, quarta, deinceps &c. Imò nullâ ordinis earum habitâ ratione, si omnes numeri earum multiplicentur inter se, vltimus productus numerus erit illa simplex fractio, in quam conuertitur postrema. Vt in allato exemplo: poterant primo loco in se duci A & B vt fieret 9'6 in quem ductus G 1'6 generaret D 1'536 eundem, qui priùs alio seruato multiplicationis ordine productus fuerat. Quotcunque enim propositis numeris mutuò in se ducendis, quicunque seruetur ordo inter multiplicandum; idem semper gignitur numerus vt lib. 1. Prop. 32. declaratum est.

G 1'6	C 1'92
A 1'2	B—8'
B 8'	D 1'536

Corollarium.

Ex Propositione hac oppositam veram esse concluditur. Posse nimirum minutiam simplicem in minutiam minutiæ conuerti oppositâ operatione nempe diuisione. Et quidem minutiæ datæ. Detur enim minutia simplex C (eodem vtor paradigmate propositionis huius) in minutiam datæ minutiæ A, conuertenda. Diuidatur minutia C simplex per datam minutiam A; quotiens autem diuisionis sit B. Dico minutiam B esse minutiam minutiæ A, eámque respectu totius eiusdem eundem suum valorem priorem retinere. Nam si minutia B ducatur in minutiam A; producetur minutia C: restituit enim multiplicatio quotientis per diuisorem, diuisum numerum. Sed per multiplicationem B per A, gignitur C fractio simplex. Ergo si fractio simplex C quo-

C 3'368	
——(B 8'	
A 4'21	

diuidatur per diuiſorem A, gigni neceſſe eſt quotientem B: qui ſit fractio fractionis A. Nec alia foret ratio, ſi continuaretur diuiſio per plures diuiſores: ſic enim haberetur fractio fractionis, quæ & ipſa fractio foret alteriùs fractionis: vt fert paradigma alterum ad calcem huius propoſitionis adductum; ſi modo oppoſita operatio, diuiſio ſcilicet loco multiplicationis adhibeatur.

MONITVM.

ETSI hactenus ea, quæ ad fractos numeros tum communes, tum decadicos ſpectant, ſatis multis proſecutus ſim: inſtitutoris tamen officio minus cumulatè à me ſatisfactum cuipiam iure videatur: niſi ea quæ per numeros ab omni materia auulſos pertractata ſunt, ad concretos, & menſuris apud varios variis ex inſtituto aſſumptis addictos applicentur. Nemini enim, qui verſandis interdum numeris incumbat, non notum cenſeo: quàm rudis & quam noua numerorum ſenſibili quantitati immerſorũ prima ſpecies occurrat ei, qui ſolos ab omni materiæ contagione liberos numeros contemplatus fuerit. Quam difficultatem Propoſitionibus aliquot ſequentibus leuire conabor: in quibus præ cæteris, decadicorum præſtantiam, tum breuitate tum facilitate inſignem obſeruare licebit. Quia porrò variæ apud varias gentes quantitatum ſenſibilium menſuræ adhibentur: non niſi omnibus communium adducam paradigmata: ex quibus, quid circa particulares menſuras præſtari debeat planum euadat. Imò vnicum quantitatis ſpeciei vnius, exemplum, omnium inſtar, proferam, vnde vt apparebit, quorumcumque tractatio, aperta fiet, & expedita. Sit ergo.

PROP. XLIX. *Probl.*

Areæ rectangulæ, cuius longitudo & latitudo datæ ſunt, quantitatem definire.

Expoſitio.

Menſuris vtar, vt paulò ante memini, Geometris omnibus familiares. Apud quos, vt lib. 1. Prop. 21. retuli, vſurpatur frequenter paſſus Geometricus, cum eius particulis ſubdiuiſis: nempe paſſus pedibus quinque conſtat, pes, palmis quatuor: palmus autem quatuor digitis. Tabellam conſule ad citatam Propoſitionem expoſitam. Sit

		pas—	ped.—	pal.
Long.	A	6 —	3 —	2
Latit.	B	5 —	2 —	3

Sit ergo area rectangula dimetienda, cuius longitudo sit A (schematismis libenter vtor, vt apertioribus, & rem, intuenti semper exhibentibus; tum ad seriem discursûs maximè aptis) latitudo verò B. Nemini notum non est rectangulam illam aream produci datâ longitudine A ductâ in latitudinem B: sed minùs fortasse à logistis obseruatum (quod mihi occurrerit) multiplicationem duabus viis iniri posse. Prima est. Si latitudo B seruatis singularum ad eam pertinentium mensurarum denominationibus, & pretiis; ducatur in longitudinem A: cuius etiam mensuræ suam seruent & denominationem, & æstimationem. Secunda. Si tam longitudinis, quàm latitudinis mensuræ singulæ suam deponant materialem denominationem, & earundem numeri in alios terminos, qui debitam ad totum suum, rationem seruent, commutentur. Hoc ergo vtroque modo constructio problematis tentanda est, & exponendum, an, & qua ratione institui possit.

Notandum præterea quantitatem areæ illius propositæ non nisi mensura plana, & ad secundam quantitatis speciem pertinente innotescere posse: debet enim mensura mensurato esse homogenea: quomodo enim, si generis mensura foret á mensurato diuersi, illi posset applicari, & per applicationem notum exhibere. Nec tantùm plana debet esse mensura illa; sed etiam quadrata. Cùm enim mensura notissima esse debeat, vt ignotæ quantitatis cognitionem pariat; cùm maximè vnica, & simplex ac inuariata: ne mutationis quidpiam passa ad certò definiendam mensurati quantitatem inepta reddatur: non potest alia præter quadratam figuram hoc munere fungi. Est autem notissima præ cæteris figuris planis, etiam parallelogrammis, quarum multiplices sunt laterum inter se habitudines. Est maximè simplex, vnius scilicet speciei determinatæ; dum, quibus continetur, latera rationem æqualitatis obseruant inter se, cæteris quadrilaterorum rectangulorum nullam certam rationem habentibus lateribus. Hac ita statutâ mensuræ figurâ quadratâ, rursùs quæratur quanta ipsa esse debeat? Cui quæstioni sequens annotatio satisfacit.

Notandum ergo denique non tantùm planarum, sed nec reliquarum magnitudinum vlli, linearium scilicet & solidarum, vllam certæ quantitatis mensuram naturâ suâ competere; sed quamlibet ex instituto definiri: vnde magnitudinis eiusdem tam variæ mensuræ non apud varios solùm populos, verùm etiam apud eundem assumptæ sunt, & à quolibet pro arbitrio, si quando res ferat, assumi possunt. Ita longitudinis alicuius quantitas per mensuram vno passu, vno pede, vno palmo &c. longam mensurari potest, & innotescere: superficies autem vno passu quadrato, pede, palmo &c. Sicut solidum corpus, passu, pede, palmo &c.

Cubico.

Cubico. Quare dum hic proponitur areæ rectangulæ quantitas inuestiganda ex data eius longitudine, & latitudine: ea potest ex variis mensuris quadratis exigi: quæri siquidem potest quot sigillatim quadratos passus, quot pedes. Quot palmos pateat? hac suppositâ expositione ad problematis solutionem accedo.

Constructio & demonstratio problematis prior seruatis mensurarum denominationibus.

Hic rursùs schema superius oculis subiice. Tum mensuras maiores tam longitudinis, quàm latitudinis ad minimam, quæ hic ad palmos pertinet, reuoca. Reuoca scilicet passus illos 6 ad pedes: quod obseruatâ Proportionum regula memoriæ causâ assequeris hoc modo si passus 1, pedes 5 continet: quot pedes passus 6 continebunt? absoluta operatione iuxta Propositionem 50. lib. 1. (quæ sola constat multiplicatione numerorum duorum posteriorum 5 & 6: primus enim terminus 1, productum, qui diuidi debet, non immutat) occurret quartus numerus quæstioni satisfaciens, pedum 30. Huic pedum passibus 6 æqualium numero 30, addi debent, pedes illi tres ad longitudinem pertinentes: ita vt ex duobus primis longitudinis membris passuum 6, & pedum 3; conflετur vnicus pedum numerus 33. Iam verò eadem methodo hosce 33 pedes ad palmos adduces; si dicas. Pes 1 continet palmos 4; quot palmos continebit pedum numerus 33? continebit palmos 132 iuxta proportionum regulam. Huic numero 132 addi debent palmi 2, longitudinis. Ita vt fiant palmi 134 æquales toti longitudini datæ passuum 6. Pedum 3. Palmorum 2. Eadem ratione membra omnia latitudinis ad palmos 111 reuocabuntur. Quibus in se ductis, nascuntur quadrati palmi in data area contenti, 14874. Atque ita nota facta est Area dicta rectangula, palmorum quadratorum 14874. Quæstionique factum est satis: siquidem quæratur quot palmis quadratis constet area.

		pas.	ped.	pal.
Long.	A	6 —	3 —	2
Latit.	B	5 —	2 —	3

Long.	134 Palm.
Latit.	111 Palm.
Area	14874. Pal. Qu.

Verùm quia maiores mensuræ passuum, pedumúe, vt pauciores notioresque, potiùs quàm minores, inquiri solent. Reduci debent hi quadrati palmi 14874, tùm ad pedes, tum ad passus: ad quam reductionem necesse est præcognosci; quot palmi quadrati quadrato pedi, vel passui; quot item pedes quadrati passui quadrato æquiualeant. Quod vt perspectum habeas.

Obserua pedis vnius longitudinem palmum vnum quater continere, siue,

siue, quod idem est, quatuor palmis æqualem esse. Si igitur tam longitudo pedis vnius: id est, vnitas, quàm palmorum numerus 4. in se ducantur; fiet pes quadratus 1, & quadrati palmi 16: eritque pes ille vnicus æqualis palmis quadratis 16. Dic itaque iuxta proportionum regulam lib. 1. Prop. 50. explicatum.

Si palmi 16. Pedi 1 sint æquales: quot pedibus æquales futuri sunt reperti areæ palmi 14874? Pedibus 929 $\frac{10}{16}$

Quæ regula absoluitur sola diuisione tertij numeri 14874 per primum 16: secundus enim, qui in tertium duci deberet; cum sit vnitas, tertium non immutat in ipsum ductus: sed tantùm diuidendum per primum exponit: ita vt plerique omnes dum hanc minorum mensurarum ad maiores reductionem exponunt; iubeant mensurarum minorum numerum per numerum diuidi; qui indicat quoties maior mensura quadratam minorem contineat. Vt in exemplo nostro. Quia pes vnus quadratus continet quadratos palmos 16, vt explicatum est: per numerum 16 diuidi iubent numerum 14874 palmorum, quos area data continere inuenta est: vt habeatur pedum quadratorum eidem areæ æqualium numerus 929 cum palmis 10 post diuisionem reliquis. Quod rationi consentaneum omninò est: quoties enim numerus 14874 palmorum, continet numerum 16; tot pedes continere necesse est: cum pedes singuli quadrati, quadratos palmos 16 comprehendant. Verùm ad regulam auream quæstionibus omnibus dirigendis, iuuandæque memoriæ aptissimam; huiusmodi solutiones referre, visum meritò est expedire. Sed paradigma nostrum versare perga.

Notum ergo euasit hactenùs quanta sit area proposita si palmis, si pedibus metienda veniat. Iam verò si passibus nosci debeat: eadem arte id assequemur. Nosti passûs vnius longitudinem quinis pedibus constare. Nosti ergo, si pedum quinorum numerus 5 in se ducatur, fieri numerum quadratum 25 pedum quadratorum: quos passus vnus quadratus continet. Dic ergo.

Si 25 pedes quadrati, quadratum passum 1
efficiunt pedes 929, quot passus efficient?
Respondeo. Passus 37, & supererunt pedes 4 reliqui.

Quod verissimum comperies, si iuxta regulæ statuta opereris. Nota ergo euasit area illa proposita tum palmis tum pedibus, tum passibus ad mensuram adhibitis, continet enim collectis, hactenùs inuentis numeris, area proposita; cuius longitudo & latitudo data est, A & B

Quadratos passus 37. Pedes 4. Palmos 10.

Necdum satis versatum est assumptum paradigma: præstat enim vnius absolutam cognitionem, vnde reliqua facilè percipiantur, mente complecti, quàm exemplorum, vt in iis fieri mos est, noui nihil continentium multitudine obrui & offundi calligine. Addo hîc itaque. Post inuentam propositæ Areæ quantitatem in mensuris minimis, quas data longitudo & latitudo continet (id enim semper necessarium est, vt ex dictis satis patet) qualis est palmorum numerus 14874; necesse minimè esse, vt mensuræ maiores obtineantur, minimam ad proximè maiorem reduci, hanc verò deinceps ad maiorem sequentem vt hîc factum est, dum palmi ad pedes, tum pedes ad passus conuersi sunt: sed palmos posse ad passus immediatè reduci, tum, si quid palmorum reliquum fuerit, ad pedes referri, aliásque mensuras minores, si quæ occurrant: idque eadem methodo cum tradita absolui.

Nosce ergo quot palmos contineat passus vnius longitudo. Comperies continere 20. Nam passus continet pedes 5. singuli autem pedes, palmos 4. Duc pedes 5 (siue quantitatem vnius passus) in palmos 4. fient palmi 20 æquales vnius passus longitudini. Duc ergo in se numerum 20; vt fiat quadrata mensura passus vnius continens palmos 400. Dic ergo iuxta regulam proportionum.

Si palmi 400 efficiunt passum 1. Quot passus efficient palmi 14874 ? 37. & 74 palmi reliqui sunt

Quod patet diuiso numero palmorum 14874 per 400 primum regulæ terminum. Reliqui verò palmi illi 74 eodem modo in pedes conuertentur si rursum dicas.

Palmi 16 efficiunt pedem 1. Palmi 74 quot Pedes efficient ? 4, & 10 palmi reliqui fiunt.

Ecce igitur eosdem, qui prius inuenti sunt; mensurarum numeros, quantitatem propositæ areæ exhibentes. Nempe quadratos passus 37. Pedes 4. Palmos 10. Nec alia totius constructionis demonstratio afferenda est, quam ea, quæ inter construendum allata est. Ad secundam constructionem gradum facio.

Constructio

Constructio, & demonstratio problematis posterior seruatis mensurarum rationibus.

		pas.		ped.		pal.
Long.	A	6	—	3	—	2
Latit.	B	5	—	2	—	3

Hîc ergo rursùs ob oculos pone idem paradigma superius: quod primo loco in numeros rationem membrorum singulorum ad totum seruantes conuertendum est: quibus priorum loco vtamur. Totum itaque est passus vnus: cuius pes vnus est pars quinta. Palmus vero vnus est pedis vnius pars quarta. Atque ita palmus vnus erit minutia minutiæ, vna scilicet quarta pars, vt refert minutia G H, minutiæ E F vnius quintæ, siue vnius pedis, quæ ipsa, est minutia totius, nempe vnius passus, quod exprimitur in modum minutiæ C D. Vnde fit vt si reducatur fractio G H ad simplicem fractionem per Prop. 16. huius libri 2. multiplicatis numeratoribus E, G; & denominatoribus F, H, vt ibi præcipitur; ea fit fractio K L ad totum ipsum C D, non ampliùs ad totum immediatum E F, attributa. Longitudo ergo A data mutabitur in fractiones C D, M F, P L. Latitudo verò B, in G D, N F & R L, vt in hoc apposito schemate videre est.

C 1	E 1	G 1
—	—	—
D 1	F 5	H 4
C 1	E 1	K 1
—	—	—
D 1	F 5	L 20

	C 6	M 3	P 2
Long. A	—	—	—
	D 1	F 5	L 20
	G 5	N 2	R 3
Lat. B.	—	—	—
	D 1	F 5	L 20

Necdum satis (praxim totam persequor, vt tradita præcepta propositionibus superioribus ad vsum hoc vnico paradigmate reuocentur, & exercitatione mansuescant) sed omnes hæ fractiones tum longitudinis, tum latitudinis in vnicam fractionem sigillatim addi debent per Propositionem 22. huius lib. 2. Quod vt absoluatur, primo loco, vt ibi præcipitur, ad eandem denominationem reuocandæ sunt per Prop. 21. quales

Long.	C 600 / D 100.	M 60 / D 100.	P 10 / D 100	Q. 670 / D. 100
Latit.	G 500 / D 100	N 40 / D 100	R 15 / D100	S. 555 / D100

ſunt, longitudinis quidem C D, M D, P D: latitudinis autem G D, N D, R D. Illæ ſimul additæ, fractionem Q D; hæ, fractionem S D conſtituent eiuſdem etiam denominationis. Si ergo fractiones Q D, S D in ſe ducantur: idem gigni debet numerus, qui gigneretur ſingulis minutiis G D, N D, R D latitudinis datæ, in omnes & ſingulas longitudinis minutias C D, M D, P D ductis, per ea quæ in ſcholiis Propoſitionis 1. lib. 2. Euclidis numeris applicata à Commandino demonſtrata referuntur (hîc obiter obſerua, quàm compendioſa ſit, quam hîc expono methodum, quam multiplicarionibus tam multis, & per multiplicationem productorum additionibus parcatur) Ducantur ergo duæ illæ minutiæ Q D, & S D in ſe mutuo. Producetur minutia T V. Cuius numerator T

Q 670 / D 100	S 555 / D 100	T 371850 / V 10000	A 37	B 1850 / V 10000

diuiſus per denominatorem exhibebit quotientem A integrum cum fractione B V. Qui quidem integer A ad totum pertinet cuius ſunt aſſumptæ fractiones ſuperiùs & ad operationem adhibitæ (attendæ iam num idem ſit paſſuum numerus inuentus hac arte, quem prior conſtructio exhibuerat.) Fractio verò B V, fractio eſt paſſus vnius; vnius inquam, paſſus plani: plani enim ſunt quotientis A paſſus illi 37, vt pote è plano numero T per V diuiſo procreati. Poterit ergo fractio illa B V ad quaſvis paſſus plani menſuras planas reuocari, ad pedes, ad palmos, vel alias quaſcumque. Sed modum quæris? Accipe.

Attende primò quot planas, ſiue quadratas menſuras, ad quas reuocanda eſt fractio B V, quadratus paſſus contineat. Vt ſi eam ad pedes reuocare ſtatutum ſit: cum vnius paſſus longitudo pedes 5 contineat, ſi in ſeipſum ducatur numerus 5, fiet quadratus numerus 25 pedum quadratorum in quadrato paſſu contentorum. Ita etiam ſi eadem fractio B V in palmos quadratos conuerti deberet: cum paſſus longitudo palmos 20 adæquet: ſi in ſe ducatur numerus 20: fiet numerus 400 palmorum quadratorum vni quadrato paſſui æqualium; & ita de cæteris menſuris. Eſto igitur fractio B V ad quadratos pedes, quorum 25 paſſus vnus continet, reuocanda.

reuocanda. Regulam proportionum compone & ſolue ex iis terminis : primus ſit fractionis denominator V. Secundus eiuſdem numerator B. Tertius ſit C pedum 25. Quartus inuenietur per Propoſitionem 50. lib. 1. qui erit, integer D cum fracto E F, fracto, inquam, pedis vnius quadrati, vt de paſſu dictum eſt. En numeros digeſtos.

V 10000.	B 1850.	C 25 ?	D 4	E 6250 / F 10000

Vis tandem hanc vnius pedis quadrati fractionem E F ad palmos quadratos reuocare? Longitudo pedis vnius palmis 4 conſtat. Ergo pes quadratus palmis quadratis 16, æqualis eſt : qui numerus tertium locum regulæ aureæ debet occupare, dum denominator F & numerator E ſecundum ſibi vendicant. Sic ergo ſtant termini, vnà cum quarto G integro qui quæſtioni ſatisfacit.

F 10000	B 6250.	L 16 ?	G 10

Area ergo illa rectangula : cuius longitudo & latitudo data eſt : conſtat paſſibus 37. Pedibus 4. & palmis 10 : qui ipſiſſimi ſunt ex priore conſtructione inuenti numeri. Vnde probatur eximiè altera per alteram methodus. Sed fontem tibi cupis aperiri, vnde proximam reductionem fractionum illarum abſtractarum in petitas concretas menſuras hauſerim? Ecce.

Demonſtratum eſt Propoſitione 12. huius lib. 2. cuiuſvis minutiæ numeratorem ita eſſe ad denominatorem; vt ipſa minutia eſt ad totum cuius eſt minutia. Ergo inuertendo. Ita eſt denominator ad numeratorem, vt totum ad minutiam. Quare cum minutia E F (proximum aſſumo exemplum) ſit minutia vnius pedis quadrati, qui palmis quadratis ſedecim numero L deſignatis eſt æqualis : numerus L palmorum denominatione donatus, totum illud eſt, cuius E F eſt fractio. Cum ergo iuxta traditam methodum, ita fiat L totum ad fractionem G; vt eſt denominator F ad numeratorem E : erit numerus G eandem ſeruans denominationem quam L, palmorum ſcilicet, is qui quæritur. Et verò ſi fiat fractio ; cuius numerator ſit G, & denominator L : ea æqualis erit fractioni E F per Prop. 5. huius. Sed aliter à materia denominabitur, à palmis nimirum; cum E F abſtracta ſit. Atque ita vtraque methodo ſuperiori & quæ per numeros concretos, & quæ per abſtractos proportionis tantùm habita ratione procedit; rectè ſolutum eſt problema propoſitum; areàque rectangula inuenta iuxta datas menſuras longitudinis & latitudinis. Quod faciendum erat.

PROP. L. *Probl.*

Idem problema fractionum decadicarum ope expedire.

Conſtructio & demonſtratio.

Vt experientiâ conſtet fractionum decadicarum, tùm ob breuitatem, tùm ob elegantiam præſtantia: lubet illam eandem quæſtionem; cui præcedentis Propoſitionis duplici conſtructione ſatisfactum eſt, huc ſub incudem reuocare, vt decadicorum numerorum ope ſoluatur, eorumdémque vſus, nec dum, contra quàm mereretur, ſatis tritus, planior euadat. Quare eadem longitudo A in eandem latitudinem B duci debeat: vt habeatur area rectangula his duobus lateribus contenta. Conuertantur tam longitudinis quàm latitudinis numeri, in fractiones: vt nuper præſtitum eſt: vt longitudo ſit integer C cum vnius integri fractionibus M F, P L: at latitudo ſit integer G cum fractis N F, R L. Conuertantur ergo hæ omnes fractiones communes in decadicas per Propoſit. 38. huius lib. 2. Erit longitudo C, M, P, & latitudo G, N, R. Additis terminis per Prop. 44. huius. Longitudo erit E integer & fractus: ſimiliter latitudo erit F integer cum fracto.

	paſ.	Ped.	pal.
Long. A	6—	3—	2
Latit. B	5—	2—	3
Long. A.C	6-	M 3 / F 5	P 2 / L 20
Latit. B. G	5-	N 2 / F 5	R 3 / L 20

Long. C 6	-- M 6′	-- P 1′	E 6	– 7
Latit. G 5	-- N 4′	-- R 1′5	F 5	– 55

Ducantur numeri E, F in ſe mutuò per Propoſitionem 46 huius lib. 2. fiet numerus G: cuius tres poſteriores figuræ 1,8,5 exponente afficiendæ ſunt. Quot ſcilicet in ambobus ſimul numeris E, F ſeſe multiplicantibus reperiuntur: Vt citatâ Propoſitione declaratum eſt. Area ergo illa rectangula datis longitudine & latitudine continet quadratos paſſus integros 37. & præterea primum vnum vnius paſſus. Secunda, octo. Tertia, quinque numero decadico - 185 deſignata. Habes ergo iam paſſuum integrorum numerum 37, eundem qui ſuperiùs repertus fuerat. Iam fractum illum decadicum -- 185, vel ſi lubeat, 1′85, accentu, loco lineolæ præfixæ adhibito; in communem fractionem, cuius detur denominator, mutare licebit per Prop. 39. huius lib. 2. Datur autem denominator, ſiue in pedes, ſiue in palmos quadratos, decadicus ille

E	6	— 7
F	5-5	5
G	37	— 185

ille mutandus sit. Nam si quæratur quot quadrati pedes fractioni illi decadicæ 1'85 respondeant: cum ipsa sit fractio vnius integri, vnius scilicet passûs: erit & ipsa fractio pedum 25 quadratorum vni passui, vt supra explicatum est, æqualium. Ergo numerus 25 pedum est denominator fractionis illius, in quam reuocari debet fractio decadica 1'85. Sic enim numerator futuræ fractionis exhibebit; quænam pars hæc fractio sit numeri 25 pedum siue vnius passûs.

Conuersio autem illa ex Propositione citatâ, inita vulgarem fractionem præcisam non exhibet, cuius denominator sit datus numerus 25: exhibebit tamen fractionem illam, & quid præterea reliquum: quod deinde in aliam fractionem deinceps reducetur. Quod vt clariùs. Proponatur; ipsam totam operationem iuuat persequi. Vt ergo fractio illa

A	1'85
B	25
C	4—625

decadica A 1'85 in communem reducatur iuxta præscriptum Propositionis illius modum, multiplicari debet fractio A per datum denominatorem B 25: vnde nascitur numerus C tres figuras suas posteriores exponente decadico affectas habens, vt fert decadicorum multiplicatio Propositione 46. explicata; numerus verò 4 eiusdem producti C tribus illis figuris 6'25 decadicam fractionem constituentibus præfixus, est integer, & pedes quatuor designat ex pedibus 25, quos passus vnus quadratus continet: ita vt numerus 4 sit fractionis numerator; cuius denominator, est datus B 25; in quam conuertitur decadica fractio A 1'85, sed minimè præcisam, vt ferret sensus Propositionis illius; quæ exigeret vt tres illæ figuræ 625 decadicæ, forent figuræ O; & propterea reiici possent, vt fractio vulgaris, cuius denominator est datus B 25, præcisa haberetur. Conuertitur tamen A 1'85 fractio vnius passus, siue pedum 25 quadratorum, in fractionem vulgarem, cuius numerator est 4, & denominator 25 quadrati pedes. Ita vt numerus ille integer 4 designet quatuor pedes: sed præter pedes illos 4 quadratos eadem fractio A continet decadicam vnius pedis fractionem tribus illis figuris 625 constantem: quæ in palmos deinceps reducetur. Habemus ergo præter passus 37, & pedes 4, aream illam rectangulam constare decadica vnius pedis fractione 6'25: quam demùm in vulgarem fractionem vnius pedis siue palmorum 16 conuertemus eodem modo. Datus ergo est deno-

E	6'25
F	16
G	100'00

minator F 16 futuræ fractionis, fractioni decadicæ E 6'25 æqualis. Ducetur scilicet datus denominator F in decadicum E; vt producatur G: ex quo, si reieceris tres posteriores figuras O (tot enim decadicam affectionem patiuntur iuxta Propositionem 46, quæ decadicam multiplicationem explicat) remanebit vulgaris fractionis, decadicæ E, æqualis numerator 10; cuius denominator est datus F, palmorum 16, in pede vno quadrato

contentorum;

contentorum, ita vt fractio decadica E palmis 10 sit æqualis.

Verum si tota hæc reductionis ratio attentius perpendatur; illa ipsa est, quæ in posteriori præcedentis propositionis constructione tradita est, & demonstrata. In ea enim præceptum est: vt multiplicaretur numerus decadicus E per numerum F palmos quadratos vni pedi quadrato æquales continentem, & productus G diuideretur per denominatorem verum decadicæ fractionis E, quem designat eius exponens; hoc est, in exemplo per numerum 1000: vt quotiens 10 habeatur. Vtrouis autem modo Epilogismus colligi censeatur, siue per propositionem 39, siue 49: constat eosdem numeros, qui areæ rectangulæ quantitatem exhibeant, per decadicas fractiones, & rectè & maximè expeditè reperiri. Data ergo longitudine & latitudine aream rectangulam illis contentam (quæ est quadratorum passuum 37. Pedum 4 palmorum 10) ope decadicarum fractionum inuenimus. Hoc est, datam longitudinem & latitudinem adhibitis fractionibus decadicis mutuò multiplicauimus. Quod erat faciendum.

PROP. LI. *Probl.*

Datam rectangulam aream pluribus terminis constantem; per numerum diuersis item constantem terminis diuidere.

Expositio.

Ne quid hîc omittatur, quod ad fractorum numerorum vsum pertineat problema hoc superiori oppositum, quod duabus proximis propositionibus complexus sum, debet explicari. Iis enim tum quoad operandi modum, quoad rationes, quibus nituntur, accuratè perceptis: mirum si quid occurrat aliquando, quod negotium facessere possit. Quid enim proponi queat soluendum: quod aut multiplicatio, aut diuisio non expediat. Propono autem hîc areæ rectangulæ diuisionem per diuisorem fractum absoluendam; etsi numeri fracti compositi per fractum compositum, aut simplicem diuisi absolutè proponi potuisset, vt memineris, quod alias lib. 1. Prop. 39. exposui, numerum omnem, qui per alium diuiditur, planum esse numerum, & quidem rectangulari figurâ circumscriptum: cuius vnum latus, est datus diuisor; alterum vero est numerus, qui per diuisionem quæritur, siue, vt vocari solet, quotiens numerus: hi enim duo numeri, numerum diuisum comprehendere, tanquam duo eius latera censeri debent, & alter in alterum ductus eundem generare, vt citato loco declaratum est. Triplicem autem constructionem adducam triplici respondentem constructioni duarum præcedentium propositionum

num. Prima absoluetur numerorum seruata materiali denominatione. Secunda, seruata tantum numerorum ratione. Tertia denique ope decadicarum fractionum.

Constructio prima per numeros suam seruantes denominationem.

Sit ergo data area rectangula L constans passibus quadratis 37. Pedibus 4. Palmis 10, diuidenda per latitudinem B passuum 5. pedum 2. palmorum 3, reducatur latitudo B tota ad minimam suam mensuram, quæ est palmorum, vt propositione penultimâ 49. factum est repertáque est G 111. reducatur etiam area data L ad minimam suam mensuram, quæ est palmorum. Quod si horum duorum numerorum L & B, non eiusdem foret denominationis mensura minima vterque tamen ad minimam mensuram, quæ in alterutro reperitur, adducendus foret. Reducentur autem plani numeri L membra singula ad minimam mensuram palmorum. Si primò reducantur passus quadrati 37 ad pedes quadratos: quod fiet multiplicato passuum numero 37 per numerum 25 (tot enim palmos quadratos quadratus quilibet passus continet vt Prop. 49 declaratum est) vt fiat 925. Huic numero adde pedes illos 4. membri secundi, areæ L datæ: fient pedes quadrati 929, ex duobus primis membris areæ L conflati. Hunc porrò pedum numerum 929 multiplica per 16; per numerum scilicet, quo indicatur quot palmi quadrati æquales sint vni quadrato pedi. Fiet per hanc multiplicationem numerus 14864 palmorum quadratorum, æqualium pedibus quadratis 929. Quod si illi palmorum numero addantur palmi illi 10, membri tertij datæ areæ, fiet numerus A 14874 palmorum, toti areæ rectangulæ æqualium. Quem eundem numerum A obtineres si passus 37 immediatè in palmos conuerteres, si per 400 (quot scilicet palmis quadratis passus quilibet constat) passus 37 multiplicarentur tum pedes illi 4 in numerum 16 ducerentur: ac denique duo producti numeri 148, 64, & palmorum numerus 10, simul adderentur. Habitus ergo vtrouis modo numerus A, diuidatur per G latitudinem. Quotiens erit B 134. Atque tanta erit longitudo areæ rectangulæ datæ in palmis. Si ergo hîc longitudinis numerus palmorum conuertatur in passus, eo scilicet diuiso per numerum 20 (tot enim constat palmis vnius passus longitudo) habebuntur passus D 6, & reliqui fient palmi 14: qui si conuer-

	pas.	ped.	pal.
L	37	4	10
B	5	2	3

A 14874	
	(B 134
G 111	
D 6, E 3, F 2	

tantur in pedes, diuisi scilicet per 4, cum pes quilibet palmos 4 contineat: fient pedes E 3: & reliqui fient palmi F 2. Atque tanta est longitudo areæ datæ quæ querebatur. Quæ eadem gigneretur si palmorum numerus B 134 immediatè in pedes: tum hi in passus conuerterentur.

Constructio secunda problematis eiusdem seruatis numerorum rationibus.

	pass.	ped.	pal.
L	37	4	10
B	5	2	3

		M 4	P 10
L	37	—	—
		F 25	Q 400
		N 2	R 3
B	5	—	—
		V 5	Z 20

Eadem ergo data sit area L. Eadem latitudo B; ita vt numerus planus L diuidendus sit per B. Omissis denominationibus vtriusque materialibus; earúmque loco assumptis rationibus. Numerus diuidendus erit L integer cum minutiis M F, P Q, siue rationibus numerorum ad vnitatem integri 37, hoc est ad passum vnum quadratum vt ex supra dictis patet. Diuisor verò B continebit integrum B, 5 passuum cum fractionibus vnius passus N V, R Z. Vt ergo diuisio instituatur, tam numerus diuidendus, siue area data, quam diuisor reducantur ad eandem denominationem, suam singuli. Diuidendi membra in hosce terminos conuertentur L H, M H, P H, in istos verò

L 370000	M 1600	P 250	T. 371850
H 10000	H 10000	H 10000	H 10000
B 500	N 40	R 15	S 555
D 100	D 100	D 100	D 100

membra diuisoris, B D, N D, R D: qui iam suprà definiti fuerant in posteriore constructione propositionis 49. Sicut eorum additio, ex qua oriebatur fractio S D, hîc reposita. Priores vero fractiones numeri diuidendi additæ, fractionem constant T H. Si ergo hæc fractio T H, cum æqualis sit tribus fractionibus L H, M H, P H; diuidatur per fractionem S D æqualem fractionibus B D, N D, R D. Quibus constat diuisor; quotiens producetur: qui erit longitudo areæ datæ, siue alterum latus eius; alterum verò est ipse diuisor S D. Instituta autem hac diuisione per secundum

T 371850	
S 555	X 670
H 10000	
D 100	Z 100

dum Propositionis 25. huius lib. 2. traditum modum, diuiso scilicet numeratore T per numeratorem S,& denominatore H per denominatorem D. Habebitur per priorem diuisioné quotiens X; per posteriorem, Z; ille erit numerator; hic, denominator fractionis X Z. Quæ cum vnitate maior sit (numerator enim X, denominatore Z maior est) reducetur ad integrum diuiso X per Z. Producetur autem per hanc diuisionem quotiens

X 670		k 70
	(A 6	
Z 100		Z 100

A 6 cum fractione K Z. Integro autem A 6, passus 6 designantur: diuisor enim ille schematis primi, B ante factam reductionem vllam, passibus integris constat, tum passûs vnius fractionibus. Fractio ergo K Z, fractio erit passus vnius. Quam ad pedes reuocabis: si proportionum regulam constituas huiusmodi.

Si denominator Z 100 exigit numeratorem K 70
Denominator G 5, quem obtineret numeratorem?

Quæritur enim fractio: cuius denominator est G 5, quot scilicet pedes passus vnus continet, æqualis fractioni k Z. Hoc est, cuius numerator eandem rationem habeat ad denominatorem G 5: quam numerator K habet ad Z. Denominatorem. Si ergo absoluatur proposita regula: ducatur scilicet K per G, vt fiat C 350: qui diuidatur per Z, habebitur fractio ipsa C Z (sic enim absolui solet diuisio, si lubeat) sed quia numerator C maior est denominatore Z: illo per hunc diuiso, fiet quotiens integer D 3 (tres scilicet pedes) cum fracto E Z; qui fractio erit pedis vnius: & ad palmos eadem arte reducetur: qua proximè fractio k G ad pedes reducta est. Multiplicetur enim numerator E 50 per numerum H 4, quot scilicet palmos pes quilibet continet; vt fiat Q. Quo per Z diuiso, quotiens est fractio Q Z ex diuidendo Q,& diuisore Z composita: cuius numerator Q, cum maior sit denominatore Z; si ille per hunc diuidatur; habebitur quotiens F 2 duos designans palmos; quæ diuisio, cum præcisa sit, in ea sistendum est. Ita vt diuisa datâ areâ L 37 pass. 4. Ped. 10. Pal. per datum diuisorem B 5 Pass. 2. Ped. 3. Pal. Quotiens fiat qui habetur ex tribus horum trium schematum quotientibus simul additis conflatus, nempe & 6 Pass. D 3 pedum, F 2. Palmorum, idem omninò, qui per priorem constructionem repertus fuerat; quique reperiri debet. Nam

k 70	C 350	
G 5		E 50
	Z 100 (D 3	
C 350		Z 100

E 50	Q 200
H 4	Z 100 (F 2
Q 200	

hac Propositione numerus L 37 Pass. 4 Ped. 10. Pal. qui per multiplicationem mutuam duorum numerorum A & B, longitudinem & latitudinem productus fuerat: diuisus est per latitudinem B. Debet ergo produci longitudo A vt reuerà productam cernis hisce duobus modis praecedentibus. Quibus addo tertium prae caeteris elegantem & expeditum: quem decadicae minutiae subministrant.

Long. A	6 pass.	3 Ped.	2 pal.
Latit. B	5 —	2 —	3
Area L	37 ----	4 - --	10

Constructio tertia eiusdem problematis ope fractionum decadicarum.

Eadem sit data area rectangula L; idémque diuisor B: vterque numerus, vt suprà in secunda constructione, designetur per fractiones vnius totius passus. Prior erit integer L cum fractionibus M F, P Q. Posterior erit integer B cum fractionibus N V, R Z. Vterque demùm in decadicas fractiones reuocetur per Prop. 38. huius lib. 2. prior erit integer L cum fractionibus decadicis C, D: posterior integer B, cum fractionibus E, G. Addantur vtriusque membra. Ex priore fiet H 37-185 ex posteriore fiet K 5-55. Si ergo diuidatur H (qui aequalis est areae datae; vt pote, ex eius partibus additis conflatus) per k, similiter conflatum ex suis partibus: quotiens erit A 6 integer cum fracto 7′: reliquus enim fit fractus decadicus 7′ per Prop. 47. huius lib. 2. debet enim iuxta eam Propositionem exponens diuisoris k, duas eius figuras afficiens demi ab exponente diuidendi H, cuius tres figurae afficiuntur, & reliquus exponens (qui vnicam afficit figuram) quotienti A 6-7 attribui: debet ergo posterior figura 7 affici exponente decadico, siue per praefixam lineolam designetur; quem modum, dum fractus decadicus integro cuipiam adhaeret, obseruare soleo; vt integer à fracto clariùs distinguatur; siue per accentum impositum. Quotiens ergo ex diuisione numeri H per k, genitus A 6-7 exhibet integros 6 passus, & vnius passus prima 7: siue vnius passus partes 7 decimas. Hanc ergo fractionem decadicam P 7′ in pedes conuertes: si eam multiplices per R 5 (quot scilicet pedes in passu continentur)

	pass.	ped.	pal.
L	37 ----	4 ----	10
B	5 ----	2 ----	3

	M 4	P 10
L 37	——	——
	F 25	Q 400
	N 2	R 3
B 5	——	——
	V 5	Z 20

L 37 --	C 1′6	D 0′25	H 37-185
B 5 --	E 4′ --	G 1′5	K 5--- 55

H 37--- 185
———
k 5--- 55 (A 6--- 7

P 7′	S 5′
R 5	X 4
—	—
V 35′	Z 20′

tinentur) producetur enim numerus V integer 3, cum fracto decadico 5′ per Prop. 47. citatam. Ergo fractio decadica P 7′ vnius passûs, æqualis est pedibus 3, & præterea vnius pedis primis 5. Siue, quinque decimis vnius pedis. Quæ prima 5 eodem modo in palmos reducuntur: si S 5′ per X 4 multiplicentur (eò quod pes quilibet palmos 4 contineat) fiet enim numerus Z 20′; integer 2, palmos duos designat; figura verò o′ exponente affecta, nulla prima, hoc est, nihilum indicat. Ergo areâ datâ rectangulâ L, diuisa per latitudinem B, adhibitis fractionibus decadicis: habetur longitudo eadem, quæ per superiores constructiones duas reperta est. Nimirum passuum 6. Pedum 3. palmorum 2. Vt verò clariùs percipias hanc singulos nnmeros obtinendi rationem conuerte exponentes in suos denominatores veros. Tum proportionum regulam compone ex datis terminis. Vt, dum numerus 7′ in pedes conuertendus fuit: hæc ratiocinatio per regulam trium instituenda est.

Si denominator 10 exigit numeratorem 7: quem numeratorem exigeret denominator 52 ——— 35 / 10

Absoluitur ergo regula hæc trium: dum multiplicas numerum 7 per 5: & productum 35 diuidis per 10 terminum primum. At in superiori proximo schemate nunquid idem non obseruatur, dum P 7′ & R 5 in se ducuntur; & producti V 35′ posterior figura 5, exponente primis, hoc est, numero 10, debito afficitur. Idem obseruare licet, dum hæc prima 5, vnius pedis, in palmos 2 conuersa sunt. Aream ergo rectangulam datam per eius datam latitudinem diuisimus, eiusdémque longitudinem definiuimus ope decadicarum fractionum. Quod faciendum erat.

LIBRI SECVNDI

PARS TERTIA.

IN QVA FRACTIONVM Aſtronomicarum praxis aperitur.

ARITHMETICÆ logiſtica nunquam non potuit eſſe celeberrima vſuſque frequentiſſimi pars illa: quæ ad tam varios aſtrorum motus, corporúmque cæleſtium conuerſiones inueſtigandas, definiendáſque adhiberi debuit. Quæ cum perpetuo motu in orbem recurrant: nullus in vnius calculo defectus tam tenuis committi poteſt; quin (quam nimium crebrò id diſcimus experientia!) aliquot ſæculorum lapſu euadat ampliſſimus. Quem vt à nobiliſſima diſciplina Aſtronomia, quam longè poſſent amolirentur tum primi eius parentes, tum cultores poſteri: motuum menſuras aſſumpsêre quam breuiſſimas, quas circulorum, ſuper quibus exercentur motus huiuſmodi, per multiplici ſub diuiſione definierunt. Atque ea ſunt minuta illa Aſtronomica: quorum calculus, cum nec minimi momenti ſit, nec difficultate careat: his in inſtitutionibus deſiderari eo minus debet: quo parciùs, quo obſcuriùs, quóve à paucioribus fundamenta, quibus eorum epilogiſmi nituntur, hactenùs demonſtrata fuêre: quæ euadent apertiſſima tum ex iis quæ proximè antecedente huius libri ſecundi parte ſecunda tradita ſunt, tum ex iis, quæ hîc propria expoſiturus ſum. Quæ aggredior.

PROP. LII. *Defin.*

Aſtronomica minuta ſunt termini progreſſionis Geometricæ: qui gradus vnius tum multiplicatione, tum diuiſione per denominatorem 60 generantur.

Expoſitio.

Ad huius definitionis intelligentiam notandum eſt in primis Aſtronomicum gradum dici particulam ex iis vnam in quas circulum quemlibet ſphæræ, tam cœleſtis, quam terreſtris, Aſtronomi diuiſère autem in partes

tes 360. Quæ diuisio, etsi ex instituto, & ad Arbitrium inita videatur; eius tamen ita ineundæ non defuit ex rei natura petita ratio. Sol enim (qui vt cæteris præstat, quibus totum vniuersum constat, corporibus: ita præ ceteris eius omnes facultates, motum præcipuè obseruari par est) naturali quolibet die vnam propemodum ter-centesimam sexgesimam eclipticæ partem emetitur; vt ad metam, vnde digressus fuerat, dierum ferè 360 spatio recurrat, ferè, inquam, diebus enim omninò quinque, & horis non omninò sex præter dies 360 eget, vt cursum totum circularem peragat. Verum qui prima Astronomiæ elementa condiderunt, tantillum illud discrimen, vt rudiora fuêre disciplinarum omniũ primordia, aut non agnouerunt, aut minimi duxerunt: vel quod verò propius videtur, partium eclipticæ, & ad eclipticæ instar, circuli cuiuslibet, numerum 360 præ cæteris adhibuerunt: eo quod & propè abesset ab eo, quem solis quotidianus motus per se definiret: & qui diuisiones quam plurimas in partes æquales admitteret; eamque in primis, quam circuli ipsius fert constitutio, quà, semidiametro eius, circumferentiæ sexies deinceps applicata in sex partes æquales præcisè diuiditur: quarum singulæ ex totius circuli partibus illis 360, sibi 60 vendicant: vnde & signa sex physica vt ex ipsa circuli natura & proprietate, non ex instituto profecta, & stabilita, appellari consueuêre, contra quàm dicantur signa duodecim, duodecim 30 diaci partes æquales: quas sola Astronomorum voluntas, non tamen absque fundamento distinxit. Pars itaque illarum 360 quælibet, in quas circulus diuiditur, gradus Astronomicus dicitur: vel quia circulus ita diuisus scalæ quandam formam refert; vel quia sensim per eas partes gradientia sidera cursus promouent suos.

Hic ergo ita acceptus gradus Astronomicus, si per continuam diuisionem per diuisorem 60 decrescat: si crescat per eundem multiplicatorem 60 continuam multiplicationem, generabitur Geometrica progressio vtrimque in infinitum extendi nata ab ipso medio termino, gradu illo diuiso, & multiplicato: cuius termini Astronomica minuta constituunt.

P	M	K	A	C	E	G
216000	3600	60	60	1	1	1
1	1	1	60	60.	3600.	216000
Q	N	L	B	D	F	H

En eius paradigma: in quo gradus Astronomicus fracto numero A B, qui numeratore, & denominatore constat æqualibus, exhibetur vt totum quoddam iuxta propositionem 2. huius lib. 2, hic gradus A B per 60 diuisus producit fractum C D per Prop. 1: ita vt sit hæc prima ad dextram fractio vna vnius gradus pars sexagesima. Hac fractione C D rursùs diuisâ

per

per eundem diuiſorem 60, producetur fractio E F per citatam Propoſitionem: quæ & ipſa erit fractionis proximæ C D pars ſexageſima. Nec ſecùs pars erit ſexageſima fractio G H fractionis E F. Atque ita deinceps ſequens fractio quælibet, proximè antecedentis pars ſexageſima futura eſt. Quod ſi à medio termino A B verſus læuam progrediamur per multiplicationem eiuſdem numeri 60, & ſingularum fractionum; primùm fractionis A B, vt fiat K L, tum M N, tertiò P Q & ita in infinitum: erit A B pars ſexageſima fracti K L: At k L, pars ſexageſima fractionis M N: hæc ſexageſima fractionis P Q &c. Ita vt vnica progreſſio per rationem ſexagecuplam extenſa conſtituatur per huiuſmodi terminos, vt Propoſitione 37 huius lib. 2. probatum eſt. Hi ergo omnes termini dicuntur minuta Aſtronomica; minuta, inquam, vnius Aſtronomici gradus A B: ſed ratione longè diſpari eis hæc denominatio competit.

Nam minuta illa quæ ad dextram ſtatuta ſunt; quæque fuère per diuiſionem genita, vt C D, E F, G H; verè & propriè minuta, vt ſunt; ita verè & propriè talia dici debent: ſunt enim omnia, & totius primitiui A B, & totius particularis, à quo immediatè pendent, licet ipſum vt ad præcedens refertur, minutum etiam ſit; partes, iiſque minores: atque adeò verè, & propriè numeri fracti. At contra termini, KL, MN, P Q, quos genuit multiplicatio numeri 60 primò in totum ipſum A B tanquam caput ducti; tum in genitum K L; tum in M N &c. quia & toto primitiuo A B, & deinceps totis particularibus, vnde immediatè profecti ſunt; maiores exiſtunt: non niſi impropriè minuta dici debent: ſunt enim ipſo toto maiora: quod à numeri fracti ratione alienum eſt. Sed & alia longè grauior hæc inter minuta maiora, & minora illa intereſt diſcrepantia: cuius obſeruatio hîc, cum ad huius tractationis cognitionem maximè conferat, minimè debet præteriri.

P	M	K	A	C	E	G
216000	3600	60	60	1	1	1
1	1	1	60	60	3600	216000
Q	N	L	B	D	F	H

Dictum eſt maiora huiuſmodi minuta naſci per continuam multiplicationem numeri 60 in ſingula deinceps proxima minuta ducti; ſicut minora minuta generantur per diuiſionem ſingulorum minutorum per eundẽ numerum 60 initam. Cuius aſſertionis ſenſus percipi ſatis clarè non poteſt ex paradigmate ſuperiori, in quo vnitas cum quolibet termino progreſſionis aſtronomicæ copulatur ad minuta conſtituenda; cuius nec multiplicatione nec diuiſione vllam patiuntur mutationem numeri vel diuiſi, vel multiplicati. Ecce igitur aliud aliis numeris expoſitum paradigma.

In

In quo A B est minutum vnitati æquale. At C D est minus & propriè dictum minutum, dicíque debet nouem sexagesimæ partes vnius gradus per fractionem A B designati, siue nouem minuta. Fractio verò E F; quæ per multiplicationem, vt dictum est, generatur; ita debet concipi, vt eius numeri E, F sese multiplicare intelligantur; eiúsque valor sit numerus 540 ex numeris E & F in se mutuò ductis genitus.

E	A	C
60	60	9
9	60	60
F	B	D

Vnde patet quàm longè absit huius generis minutorum Astronomicorum, quæ maiora vocantur, natura à ratione communium minutiarum. In quibus occurrit non rarò numeratorem denominatore maiorem esse, atque adeò fractionem constituere vnitate maiorem: in iis tamen vnitas concipitur in tot partes diuidi, quot indicat denominator; ex quibus tot sumantur: quot exigit numerator; vt hæc ipsa fractio E F si iuxta hanc acceptionem æstimetur; dicetur esse sexaginta partes nonæ totius vnius; vnius scilicet gradus A B: eiúsque valor erit (cum toto maior sit) gradus 6. & 6. partes vnius gradus nonæ. Qui numerus longè diuersus est à numero 540 graduum, quem in se ducti numeri E F producunt. Eadem est reliquorum huius generis minutorum ratio; quæ ab aliis astronomicæ progressionis terminis velut numeratoribus, & aliis numeris (quos, vt mox dicam, numero 60 minores esse oportet) velut denominatoribus constituuntur. Ex his habes, quo sensu huiusmodi minuta maiora toto hoc tractatu, quando occurrent, debeas accipere. Sed ad maiorem adhuc huius Propositionis, quæ totius astronomici calculi fundamentum est, intelligentiam.

Obseruandum est non solere astronomos maiora hæc minuta vltra primum progressionis terminum, qui est 60, promouere. Huic enim termino 60, si subscribatur vnitas, vt fiat (attende ad schema) minutum E F; id continebit gradus 60: qui fiunt iuxta præcedentem obseruationem ductis in se mutuò E 60, & F 1.

E 60	A 60		A 1
—	—	vel	—
F 1	B 60	—	B 1

Illud autem minutum 60 graduum, vocatur. Signum Physicum ob rationem superiùs allatam, & est totius Circuli gradus 360 continentis pars sexta. Quare si fiat minutum maius E F: illud erit æquale toti circulo; cum duci concipiatur F 6 in E 60. At in calculo Astronomico, vbi circulus completus est; abiicitur tanquam inutilis.

E 60	G 60	K 60
—	—	—
F 6	H 9	L 3

Semper enim eius calculi operâ quæritur tantùm circuli pars à certo quodam puncto decursa, omissâ interim tota circuli reuolutione. Vnde etiam fit, vt denominator maior nunquam sit numero 6. Vt, si fractio occurreret G H; reiiceretur à denominatore H 9 numerus F 6, siue circulus, & solum te-

tineretur k L reliquum minutum tria signa physica complectens. Verùm cum vniuersalis tradi debeat rerum cognitio: de omnibus huiusce generis minutis maioribus, non secùs ac de minoribus agendum est; totiúsque calculi astronomici aperienda (quando latent) fundamenta: vt possit nimirum rebus aliis hæc ars aptari; aut similis ex data quauis geometrica progressione institui: qualis reuerà parte libri huius secunda præcedente ex progressione decuplæ rationis instituta est.

Denique paulò ante memini numeros, qui cum terminis progressionis astronomicæ minuta, tam maiora, quàm minora constituunt, excedere non oportere numerum 60. Ratio clara est, quia tunc loco illius numeri 60, vnitas addi potest ad proximè maiora minuta. Quæ quidem in fractionibus vnitate minoribus ad vnitatem propiùs; in maioribus, ab eadem longiùs absunt. Ecce enim sit progressio minorum minutorum A, B, C, D: quorum numeratores omnes sint vnitates. Si ergo fractionis G C tàm numerator G 1, quàm denominator C 3600 multiplicetur per 60: fiet fractio L D æqualis fractioni G C, per Prop. 3. huius lib. 2. cuius denominator D idem est cum denominatore fractionis H D proximè minoris fractione G C, eius enim denominator est terminus progressionis termino C proximè maior, quippe qui producitur multiplicato C, per 60. Si ergo ita augeatur fractionis H D numerator H, vt euadat numero 60 æqualis; vt fiat æqualis fractioni L D; fiet etiam æqualis fractioni G C: quæ fractioni L D ostensa est æqualis. Sed fractionis G C numerator C est vnitas. Ergo quando fractionis H D numerator euaserit æqualis numero 60; ea reduci poterit ad proximè maiorem fractionem G C, & vnitati E A viciniorem; si numerator fractionis, cuius denominator est C, vnitate augeatur.

E	F	G	H	L
1	1	1	1	60
1	60	3600	216000	216000
A	B	C	D	D

In minutis verò maioribus eodem fere modo idem ostendetur. Suppositâ enim constructione, si ducatur fractionis C G tam numerator C, quàm denominator G in numerum 60; fiet fractio D L: cuius numerator D ad denominatorem L eandem rationem habebit, quam fractionis C G numerator C ad denominatorem suum G per Prop. 3. huius lib. 2. Ergo idem fiet numerus per Prop. 48. lib. 1. si ducatur C primus in L quartum; qui fit ex G secundo in tertium D ducto, hoc est, ex denominatore H in numeratorem D. Si quando igitur numeratori C talis accedat denominator, vt sit æqualis numero L 60: mutari

A	B	C	D	D
1	60	3600	216000	216000
1	1	1	1	60
E	F	G	H	L

mutari poterit huiusmodi fractio in proximè maiorē cuius numerator est terminus D progressionis proximè maior quàm C; si ad eius denominatorem H addatur vnitas. Hæc enim multiplicans numeratorem D, eundem numerum producit, qui producitur ex fractione, cuius numerator est C, & denominator L in locum denominatoris G suffectus. Ex quibus patet quomodo in minutis minoribus accedatur ad vnitatem siue ad caput E A addendo vnitatem illam ad numeratorem fractionis antecedentis, loco numeratoris 60, qui sequentis fractionis erat numerator. Contra verò in maioribus minutis loco denominatoris 60, vnitas addatur ad denominatorem fractionis, à capite A E, siue vnitate remotioris quod ad initium afferebam.

Antequam definitionis huius ad astronomica minuta pertinentis expositionem concludo: pergratum fuerit ac operæ sanè pretium, minuta hæc astronomica cum decadicis superioribus conferre: vtraque enim geometricam progressionem adhibent; hæc decuplam, illa sexagecuplam. Ex qua mutua collatione, vtraque clariùs innotescet.

Exponantur ergo primò vtriusque progressionis minuta minora: quorum scilicet denominatores sunt termini progressionis geometricæ, prioris quidem per rationem sexagecuplam; posterioris verò per decuplam, propagatæ. Quæ ita habebunt, vt schema refert. Hæc vtraque minuta minora veræ & propriè dictæ minutiæ sunt, vtpote omnes vnitate E A, siue R K minores. Quemadmodum autem numeratores astronomici, F, G, H multiplicatorem 60, siue denominatorē rationis progressionis astronomicæ, si propriè designentur, superare non debent, vt proximè disserebam: sed vnitas, si superare contingat anterioris minutiæ numeratori assignanda est loco numeratoris 60: ita etiam in progressionis decadicæ fractionibus, nullus numeratorum numerus S, T, V adæquare, nedum superare debet numerum 10 multiplicatorem, siue genitorem decadicæ progressionis: sed vbi numerator quispiam attigerit numerum 10; eiusdem numeratoris loco vnitas est addenda ad proximè antecedentem numeratorem stipiti, siue vnitati viciniorem. Habes horum vtrorumque minutorum symbolizationem. Sed ecce insigne inter eadem dis-

E	F	G	H
1	4	25	59
—	—	—	—
1	60	3600	216000
A	B	C	D
R	S	T	V
1	4	6	9
—	—	—	—
1	10	100	1000
K	L	M	N
RSTV			
1469	vel	1'469	
—	—		
1000			
N			

ctimen quo præ astronomicis præstant decadica. Possunt scilicet decadica omnia, quotquot extiterint, in vnicam fractionem colligi per solam numeratorum omnium appositionem absque vlla eorum mutatione. Vt ex eis omnibus vnicus fiat numerator; cui subscribatur vnicus denominator ille ipse immutatus, qui vltimæ fractioni competit. Vt in allato exemplo. Si sibi deinceps eodem ordine apponantur numeratores R, S, T, V, vt fiat vnicus numerus 1469; cui subscribatur vltimæ fractionis V N denominator N 1000, vel eo omisso, adhibeatur accentus ad figuram primam 1; fiet fractio vnica omnibus illis æqualis: vt propositione 34. huius lib. 2. declaratum est. Nec id verum est tantùm cum minuta minora sunt; sed etiam cum minora maioribus adhærent, vt eadem citatâ Propositione probatur. Vt hîc etiam patebit, si priùs cum astronomicis maioribus maiora decadica contulerimus. Ecce ergo astronomica maiora; quorum numeratores sunt A, B, C, D, denominatores autem E, F, G, H

A	B	C	D
1	60	3600	216000
1	4	25	59
E	F	G	H
K	L	M	N
1	10	100	1000
1	4	6	9
R	S	T	V
		N	
		1000	
		9641	
		VTSR	

decadicorum verò numeratores sunt K, L M N: & denominatores R, S, T, V, in eo conueniunt hæc ambo minutorum genera, vt sicut fractionis verbi gratia, C G denominator G 25 duci concipitur in numeratorem C 3600, vt fractionis C G valor 90000 obtineatur: ita fractionis decadicæ cuiusvis, vt L, S valor habetur, si denominator S 4 ducatur in numeratorem L 10, vt fiat numerus 40. At differunt non mediocriter, eò quod vnicus numerator N 1000 cæterorum K, L, M, antecedentium vices tueri possit, eorúmque loco substitui: cui etiam vnicus respondeat denominator 9641 ex omnibus denominatoribus R, S, T, V, sibi deinceps appositis conflatus. Ordine tamen inuerso, vt maioris valoris figuræ semper antecedant: deleatur etiam numerator N, vt inutilis. Alias non addo decadicorum minutorum præ astronomicis, cæterísque omnibus ex quauis progressione genitis fractionibus eximias facultates: vt dolendum sit primis astronomiæ parentibus eam mentem non incidisse, vt minutorum loco, quæ ex progressione sexagecuplæ rationis hauriuntur, ea adhibuissent: quæ decadica progressio ita obuia & trita subministrat, proh! quanto labore, se, quanto alumnos astronomiæ liberassent? dum tabularum, quibus facultas hæc constat ferè tota, tantam vim, tot, támque molestis initis calculis partam posteris tradiderunt: dolendum sanè, eóque dolendum magis, quo minus potest huic incommodo occurri. Res enim in integro non est. Statutæ sunt astronomicæ tabulæ.

tabulæ. Obſeruationes ex huius generis minutorum legibus traditæ : hâc pergendum , quâ itum hactenus. Si quid tamen remedij ſupereſt : (vt ſupereſt non parùm) in eo totum verſatur ; vt facilè & expeditè poſſint, cum vſus exiget , minuta aſtronomica & decadica in ſe mutuò conuerti. Quam conuerſionem ſtatim proponam : vbi priùs minutorum aſtronomicorum (de decadicis enim ſuo loco dictum eſt) per characteres deſignationem tradidero. Quam ecce ampliſſimam.

PROP. LIII. *probl.*

Aſtronomica minuta per characteres deſignare.

Expoſitio.

Ex præcedentis Propoſitionis explicatione conſtat, quàm fuſis numeris exprimi debeant minuta aſtronomica , tam maiora , quàm minora ; ſi præſertim à ſtipite paulò longiùs abfuerint : vnde eorum calculus prolixus , grauiſque fiat. Huic incommodo occurrere ſategerunt Aſtronomicæ facultatis cultores. Quod non alia ratione meliùs abſolui poſſe meritò rati ſunt ; quàm ſi paucos breuéſque characteres numeris ſubſtituerent : qui eorum vices gererent , munúſque fungerentur : Quæ quomodo ſe habeant , præſtarique poſſint , exponendum nunc eſt.

Conſtructio.

Repetatur aſtronomica progreſſio A , B &c. ſiue maiorum , ſiue minorum , minutorum : ſingulis eius terminis adſcribantur termini Arithmeticæ progreſſionis communis , ſiue numeri communes E , F G &c. Ita tamen , vt primo termino aſtronomico , qui eſt vnitas A , adſcribatur nota O. Reliquis deinceps ſeruato ordine numeri aſſignentur , vt refert hoc ſchema. Dico his characteribus inſigni cum compendio terminos minutorum aſtronomicorum affici ; eorúmque numera omnia ſuſtineri.

A	B	C	D
1	60	3600	216000 &c.
0	1	2	3
E	F	G	H

Demonſtratio.

Non ratiocinatione ſed expoſitione tantùm res indiget quam eius vſus deinceps confirmabit. Hic illud obſeruandum eſt. Numeros huiuſmodi

A	B	C	D
1	60	2600	216000 &c.
O	I	2	3
E	F	G	H

ordinem minutorum à primo designare. Hic autem minutorum ordo non à primo progressionis termino A, qui totum ipsum, non totius partes, siue minuta exprimit; sed à secundo B initium ducit; qui per primam primi termini multiplicationem hoc est, in partes 60 sectionem generatur: atque ita prima ipse minuta constituat. Tertius deinde C per secundam multiplicationem genitus, minuta secunda: quartus, tertia, & ita deinceps in infinitum. Hi ergo numeri terminis progressionis adscripti, dum quotus quisque sit à primo exclusiuè, indicant, eo ipso etiam indicant eius quantitatem: indicant enim per quot multiplicationes continuatas ab vnitate, siue à primo termino A, productus quisque sit: quo multiplicationum numero cognito, ignotus esse nequit ipse per eas productus terminus. Si enim toties ponatur numerus 60, quoties significat suis vnitatibus adscriptus numerus; & ita multiplicetur continuè; ipse terminus producetur. Vt in superiore progressione, termino D adhæret numerus 3. Ergo si numerus 60 ter hoc modo 60. 60. 60 ponatur, & continuè in se ducatur, ducto scilicet 60 in 60, vt fiat 3600: in quem rursus 60 ducatur; fiet terminus D 216000 tertius progressionis. Atque ita de cæteris terminis: Vt non ineptè vocari possint huiusmodi adscititij numeri, exponentes terminorum progressionis astronomicæ. Cum autem termini singuli progressionis huius singulas minutorum species constituant, vt paulò ante differebam, vt primus, prima; secundus, secunda &c. erunt etiam iidem numeri adscripti, minutorum singulorum exponentes; qui quota, & cuius denominationis sint singula significent. Ex eo etiam capite exponentes meritò possunt appellari iidem numeri: quod exponant & indicent, quot rationes reperiantur inter omnes progressionis terminos vsque ad ipsos. Vt in eodem schemate, numerus H 3 addictus termino D, ostendit tres esse rationes continuas inter terminos progressionis vsque ad terminum D inclusiuè: quales sunt D ad C: C ad B: & B ad A.

Cum ergo numeri huiusmodi tot officiis fungantur erga progressionis astronomicæ terminos, quid obstet eos illorum gerere vices, & loco substitui, perinde ac Logarithmi quidam, sed longè quàm vulgares logarithmi meliùs. Ita vt abiectis progressionis terminis A, B, C D, qui numeris immensis, vbi paulò longius progressio prouecta est, constant: in eorum locum hi substituantur. Atque ita progressio minutorum minorum: quam superiùs ita expressi; vt habet horum duorum schema prius; ita demùm designetur, vt habet schema posterius; ex quo reiecti sunt termini 1. 60. 3600 &c. Progressionis sexagenariæ, seruatis tantùm

terminorum

erminorum exponentibus 0. 1. 2. 3. &c. Ita vt fractio, exempli gratiâ,

E	F	G	H
1	12	26	42
1	60	3600	216000
0	1	2	3
A	B	C	D

E	F	G	H
1	12	26	42
0	1	2	3
A	B	C	D

F B. Quæ iuxta prius schema afferretur duodecim sexagesimæ partes, vnius scilicet gradus; iuxta posterius dicatur, ***duodecim minuta prima***, vel absolutè, ***duodecim prima***. Sequens verò G C, dicetur 26 *secunda*. *Quadraginta duo*, tertia H D. denominatione minutorum à numeris exponentibus petitâ. Quod idem æquè verum est in minutis maioribus: ita vt ea sola distinctio, cuius memini superiùs, necessaria sit; nimirum, vt minuta maiora, maiora vocentur, minora vocentur minora. Vel certè minora; quæ propriè minuta sunt, & sæpiùs occurrunt, prima, secunda &c. absolutè dicantur: maiora verò prima maiora, secunda maiora &c. appellentur.

Ad hæc. Cum exponentes illi numeri 1, 2, 3. &c. facilè cum reliquis numeris, quibus adhibentur; misceri possint, & confundi: eorum loco voces ordinis numeralis, iisdem characteribus Arithmeticis designatas expedit assumere: aut saltem earum syllabas primas, aut minimùm primos characteres: vt autem maiora à minoribus compendiosiùs distinguantur. Denominatio numeris præponi posset in maioribus minutis; in minoribus eosdem subsequi. Ecce paradigma vtrumque.

Maiora minuta	Minora.
Pri. 4. Sec. 15. Ter. 42 &c.	4 Pri. 15. Sec. 42 Ter.

Aliqui accentus apponunt minutorum numeris, tot numero, quot vnitates numeri exponentes continent. Vt si octo tertia ‴ velint designare; ea tribus impositis accentibus numero 8, hoc modo 8‴ exprimente; si secunda 24, hoc modo, 2″4; & ita de cæteris. Atque hic quidem designandi modus sufficit ad minuta minora distinguendum. Verùm maiora quo distinguentur? Poterunt eadem ferè seruatâ accentuum nota maiora etiam distingui; si nimirum, accentuum acutorum loco, qui ad minuta minora iam destinati sunt; assumantur accentus graues, qui figuræ Arithmeticæ vltimæ horum minutorum immineant.

A 8‷	B 24‶.	C 8‴.	D 24″

Vt appositum schema refert. In quo A designat octo maiora minuta tertia, ob tres accentus graues figuræ 8 impositos, oppositâ planè ratione, qua notantur tertia minora octo C. Idem discrimen cernere est inter maiora B, & minora D.

Idem

Idem inter cætera diſcerneretur.

Formula hæc per accentus ſiue graues ſiue acutos minuta diſtinguendi incommodum illud patitur, vt eorum aliquis perire poſſit, & omitti; præſertim cum multiplices eos eſſe contingit; vtpote ad minuta promotiora deſignandum neceſſarios: quo etiam in caſu graue fuerit eoſdem numerare, vt minutorum ſpecies diſtinguantur. Quare cenſuerim huic accentuum multitudini parcendum eſſe. Quod facile præſtari poteſt, ſi primo tantùm minutorum membro accentus vnicus minuta prima deſignãs, adhibeatur; grauis quidem, ſi maiora minuta deſignanda fuerint; acutus autem, ſi minora. Reliqua enim poſt membrum primum cum perpetuo ordine numerali ſeſe conſequantur, ſatis ſe per ſeſe prodent, cuius ſint ſpeciei, & quot accentibus deberent inſigniri; tot ſcilicet, quota ipſa ſunt à primo; vt patet in hoc ſchemate. In quo primum membrum A 2´8 accentu acuto inſignitur: quo denotetur ipſum ad minora minuta prima pertinere. Secundm verò membrum B 52. omni notâ caret: eius enim ſedes ſecunda, ſatis indicat per ſe ad ſecunda minuta minora pertinere: eodémque iure membrum tertium D 36 ad tertia: ac proinde, ſi accentibus notanda forent, hoc tribus, illud duobus inurendum foret. Idem eſto de maioribus minutis iudicium. Quod ſi aliqua minutorum alicuius ſpeciei membra deſint ſiue intermedia, ſiue ipſum primum; eorum loco ſubſtituetur figura O: Ita factum vides in minutis minoribus H, K, L: ita in maioribus M, N, P. In quibus membra prima H & M, ſunt notæ, O, debito accentu ornatæ. Eâ deſignandi ratione ſupra Prop. 36. in decadicis vſus ſum.

A	B	D	H	K	L
2´8.	52.	36.	O´	24.	48
E	F	G	M	N	P
2`8.	52.	36	`O.	24	48.

Dixi paulò ante minuta, tam maiora, quàm minora rectè diſtingui poſſe ope initialium characterum alphabeticorum ad ſingulas ſpecies pertinentium. Quorum qui ad maiora deſtinantur, numeros præcederent; numeros ſequerentur, qui ad minora ſpectarent. Nunc addo poſſe etiam alio modo huiuſmodi alphabetici characteres eo munere fungi, ſiue præcedant, ſiue ſubſequantur numeros minutorum, hoc tantùm diſcrimine obſeruato, vt maioribus maiuſculi, minoribus minuſculi addicantur. In ſequentibus his omnibus modis indifferenter vſurus ſum. Sed de hac deſignatione characteriſtica iam pluſquam ſatis.

PROP. LIV. *Probl.*

Astronomica maiora in decadica minuta conuertere.

Constructio & demonstratio.

A`0. 0. 12
B 16000s
C 2592000

Dentur A tertia maiora conuertenda in decadica Cum huiusmodi minuta sint numerus integer, vt ex eorum natura superiùs explicata, constat: sensúsque sit, vt terminus progressionis Astronomicæ, cuius exponens est 3, ducatur in datum numerum 12 minutorũ tertiorum: si ex dicta progressione terminus ille B sumptus ducatur in A 12. erit productus numerus C decadicus, qui quæritur nam omnis numerus integer, qualis est C, decadicus est per Propositionem 32. huius lib. 2.

A 12 P. B 8. S
C 720
D 28800
E 29520

Quod si non vna simplex fractio astronomica, sed composita ex duabus, vel pluribus maioribus conuertenda proponatur in decadicam, vt si A 12 prima & B 8 secunda conuerti debeant in decadicam minutiam. Id duobus modis absolui potest. Primus est. Si vtraque minutia separatim iuxta methodum iam traditam in decadicam conuertatur: tum vtraque conuersa in vnam addatur. Vt hic C & D (quarum illa respondet minutis A; hæc minutis B) additæ sunt; vt fieret E decadica vnica fractio duabus A & B astronomicis æqualis.

B 8.S. vel '0.8.
F 3600
D 28800
G 60 (H 480
A 12
L 492 P.
60
E 29520

Secundus modus idem absoluendi ita habet. Ducantur maioris denominationis data minuta, qualia sunt hîc minuta B secunda, in denominatorem suum, in terminum, inquam, secundum F progressionis astronomicæ: & productus D diuidatur per denominatorem G fractionis A minoris denominationis: vt fiat H. Huic addantur ipsa minuta A: vt fiat L. Hic ergo nunumerus L ductus in terminum progressionis ad minuta A pertinentem (qui est 60) generabit decadicum E eundem, qui priore modo repertus fuit. Ratio est quia minuta illa B secunda per hanc methodum reducta sunt ad minuta H eiusdem denominationis cum minutis A, id est ad prima (quod mox ostendam) si ergo H, primis addantur prima A, fient prima L. Ergo

B.8. S. vel 'o. 8.'	
F 3600	
D 28800	
G 60	H 480
	A 12
	L 492 P.
	60
E	29520

prima L multiplicata per terminum 60 progressionis, primis debitum, producet decadicum E, duobus simul A & B, siue vnico L æquale. Quomodo autem H sit numerus minutorum primorum æqualis minutorum secundorum B. probatur. Valor huius fractionis B 8. S. est numerus D natus ex multiplicatione denominatoris F secundorum, ducti in secunda ipsa B 8. Ergo si diuidatur D per denominatorem G primorum, vt fiat H quotiens: reciprocè G ductus in quotientem H restituet eundem numerum D. Cum ergo G sit primorum denominator, siue terminus Astronomicæ progressionis primus: erunt minuta H prima maiora, eiusdémque speciei cum minutis A: æqualia autem sunt secundis B 8. Cum vtriusque valor, idem sit numerus D. Sed huiusmodi reductio minutorum vnius generis in alia generis diuersi vniuersaliter proponetur & demonstrabitur infra prop. 56. Quod si minutorum huiusmodi membra plura, quàm duo in vnicum decadicum numerum conuerti deberent: vel sigillatim singula in decadica æqualia reducentur, quæ simul addantur, vt habet modus primus: vel, vt habet secundus, duo simul reducentur primo loco; in Astronomica eiusdem speciei, tum tam hæc duo quàm tertia, rursùs in eandem speciem conuersa addentur; ac demùm in decadicum commutabuntur. Astronomica ergo maiora minuta, siue simplicia fuerint, siue composita, in decadica conuersa sunt. Quod præstandum erat.

PROP. LV. *Probl.*

Astronomica minuta minora in minuta decadica conuertere.

Constructio.

Minuta Astronomica data diuidantur per ipsum suum denominatorem, hoc est, per terminum Astronomicæ progressionis ad ea pertinentem, vel quem exponens eorum definit. Diuidantur autem decadicè, hoc est, Astronomicis ipsis minutiis conuertendis apponantur, si opus fuerit, aliquot figuræ O. Quotiens enim huius diuisionis decadicam fractionem Astronomicæ

A 2′7 vel 27 p.		
C 60		
B 2700		
		D 4′5
C 60		

Astronomicæ datæ æqualem exhibebit. Esto huius solutionis huiusmodi paradigma. Sint minuta prima minora A. quorum denominator, siue terminus progressionis Astronomicæ ipsis respondens est C 60. Diuide A figuris aliquot O auctum (vnde mutatur in B) per terminum C iuxta Prop 38. huius lib. 2. Habebis quotientem decadicum D æqualem datis Astronomicis minutis A.

Demonstratio.

Data minutia A vnà cum progressionis Astronomicæ termino C ipsi debito veram constituunt fractionem communem A C integro minorem. Si ergo fractio hæc A C communis ad decadicam reuocetur per prop. 38. huius lib. 2. Factum erit quod proponitur. At dum B diuiditur per C, vt habeatur quotiens D; id totum præstatur: quod in citata Propositione iubetur. Ergo decadica fractio D æqualis est datæ fractioni Astronomicæ A; Atque adeò proposito problemati satisfactum. Quot autem figuræ O ad numerum diuidendum A debeant apponi ipsa docebit operatio. Consule citatam propositionem.

PROP. LVI. *Probl.*

Decadica minuta maiora in Astronomica vel simplicia, vel composita, vel alterius generis vt exiget operatio, conuertere.

Expositio.

Conuersa est hæc propositio superioris propositionis 54. Voce autem decadicorum maiorum, numerus integer & communis intelligi debet: cui scilicet in decadica progressione ab vnitate per decuplam rationem promota respondet terminus ipse primus, qui est vnitas: quæ numerum non immutat, suúmque ipsi valorem integrum relinquit: omnis enim fractus, cuius denominator est vnitas, non fractus, sed integer est numerus, licet in fracti modum designatus: vt aliàs declaratum est.

Constructio primi casus.

Diuidatur ergo datus numerus maior decadicus, hoc est, vt exposui integer & absolutus numerus per terminum Astronomicæ progressionis dato numero proximè minorem. Si diuisio diuisum exhauriat, vt nihil

relinquatur. (qui primus eſt huius propoſitionis caſus) abſolutum eſt quod proponitur: erit enim quotiens Aſtronomicus ſimplex, qui quæritur. In primis ergo præoculis habenda eſt illa progreſſio Aſtronomica Prop. 52. allata, & hîc repetita.

1	60	3600	216000	12960000	777600000
0	1	2	3	4	4

Cum ſuis exponentibus. Proponatur iam 12 integer in Aſtronomica minuta conuertendus. Terminus progreſſionis huius numero 12 proximè minor, eſt primus, nempe 1. diuide ergo 12 per diuiſorem 1. Quotiens eſt idem immutatus numerus 12. Quo numero Aſtronomicè accepto deſignantur duodecim gradus integri, vt indicat exponens figura O primi progreſſionis termini 1. integra enim tantùm, nulla autem alia minuta maiora progreſſionis inſequentia eodem exponente O poſſunt deſignari. Quod vt planius euadat aliud affero paradigma.

A 720	C 1'2 vel 12 P.
B 60	

Proponatur decadicus numerus A: ſiue, vt expoſui, integer numerus in Aſtronomicum conuertendus. Terminus Aſtronomicæ progreſſionis proximè minor quam A 720 eſt B 60. (Nam ſequens 3600 iam maior eſt quam 720) diuidatur ergo A per B: quotiens futurus eſt C 12 præciſus: qui ad prima minuta maiora Aſtronomica ſpectabit: vt diuiſoris B 60 exponens 1 declarat. Ita vt minuta duodecim maiora prima, hoc modo 1'2 vel 12 P. Deſignata, æqualia ſint numero decadico ſiue integro A 720 dato. Eodem modo (vt alio adhuc exemplo rem hanc illuſtrem) ſi decadicus A conuerti debeat in

A 7344000	C 3‴4 vel 34 T.
B 216000	

Aſtronomicum excerpetur ex progreſſione terminus B. Qui diuidens numerum A, præciſum quotientem producet C, ad tertia maiora ſpectantem. Ita vt numerus Aſtronomicus C (qui enuntiandus eſt *triginta quatuor, tertia maiora*) æqualis ſit decadico numero, ſiue numero integro A. Quod oſtendo.

Demonſtratio.

Numerus Aſtronomicus C per exponentem, vel triplici accentu graui, vel charactere maiuſculo T, vel etiam notâ Arithmetica 3 affectum, eundem ſibi vendicat valorem quem habet numerus idem C abſolutus per terminum B Progreſſionis ad tertia pertinentem multiplicatus, vt ex dictis ſuperiùs Prop. 52. conſtat. Fit enim genus illud nouum fractionis, ex quotiente

tiente C, & termino B, illo numeratore, isto denominatore constantis. Sed numerus C absolutus per terminum B progressionis Astronomicæ multiplicatus producit numerum A (restituit enim diuisor B in quotientem C ductus diuisum numerum A) ergo inuentus numerus C exponente tertiorum maiorum affectus, æqualis est numero A. Datus ergo decadicus numerus rectè conuersus est in Astronomicum numerum tertiorum maiorum C. Quod faciendum erat. Nec alia est in hoc casu, paradigmatis primi demonstratio: licet diuisor, primus sit terminus Astronomicæ progressionis, qui est 1: qui datum numerum A diuidens, eum non immutat.

Constructio secundi casus.

Secundum hunc casum inuehit diuisio iuxta constructionem præcedentem imperata: quæ præcisum quotientem non exhibet: sed reliquus fit quidam numerus. Tunc ergo inuento Astronomico numero eadem methodo, qua superiùs inuentus est, eadem repetatur ad Astronomicum inueniendum æqualem illi decadico per priorem diuisionem reliquo: vt sic habeatur Astronomicus ex pluribus compositus vni decadico æqualis Huius constructionis hoc esto exemplum. Proponitur decadicus A in Astronomicum conuertendus. factâ diuisione numeri A per terminum B progressionis numero A proximè minorem, cuius exponens est 3, fit quotiens C ad tertia maiora pertinens, vt in præcedenti constructione factum est: reliquus autem fit D. Hunc ergo reliquum D partire per progressionis terminum E ipso D proximè minorem ad secunda spectantem. Gignetur quotiens F spectans proinde ad secunda. Sed reliquus supererit numerus G. Qui eodem modo diuisus per progressionis terminum H proximè minorem, & ad minuta prima pertinentem, producet eiusdem denominationis quotientem L. Ac tandem superest numerus N. Qui diuidi debet per terminum progressionis proximè minorem, qui est 1; eiúsque exponens est figura O, integrum simplicem designans, hoc est, totidem gradus. Collige tandem hos omnes quotientes C, F, L, N. Fiet Astronomicus numerus compositus totidem membris decadico dato A æqualis.

A 7348254
B 216000 | C 34 T.

D 4254
E 3600 | F 1. S.

G 654
H 60 | L 10 M

N 54.
C 34 T. F 1. S. L 10 M. N 54.

Demonstratio.

Non aliter demonstrantur hi omnes conuersi numeri : quàm casus prioris constructionis. Est enim par omnium ratio.

Constructio tertij casus.

Proponi potest decadicus in astronomicum datæ denominationis conuertendus. Vel ergo terminus progressionis ad quem data denominatio pertinet maior est dato decadico, vel eodem minor. Si minor est, etsi proximè minor non sit ; eodem modo soluatur problema ; quo duabus constructionibus antecedentibus solutum est.

At si terminus datæ denominationis dato decadico maior est. Tunc, mutabitur diuisio illa in multiplicationem. Et astronomicus decadico æqualis ad minuta minora pertinebit. Vt si detur decadicus A conuertendus in minuta. Terminus minutorum è progressione Astronomica desumptus est B. Ducatur ergo B in A, vt fiat D : cui adhibeatur, vel accentus acutus, vel litera m minuscula : quibus symbolis exprimatur, eum ad minuta prima minora pertinere. Facta erit quæsita conuersio.

A 21
B 60
D 1'260
vel
D 1260. m.
vel
D 1260. p.

Demonstratio.

Numerus D affectus charactere exponentis, qui in progressione, termino minutorum assignatur; diuidi censetur per eundem terminum. Numerus ergo D diuiditur per B. Sed D diuisus per B restituit A. Ergo D symbolo affectus suô, æqualis est decadico A dato. Eodem modo. Si idem numerus decadicus A ad secunda Astronomica D reuocatus fuisset per multiplicationem numeri A & termini B progressionis astronomicæ, qui ad secunda pertinet : rectè reuocatus probaretur eadem ratiocinatione. Quare decadica minuta maiora in astronomica vel simplicia, vt in primo casu ; vel composita, vt in secundo ; vel alterius generis, minorum scilicet minutorum, vt in tertio, rectè conuersa sunt. Quod erat faciendum.

A 21
B 3600
D 75600 S.
vel
D 0'.75600

PROP

PROP. LVII. *Probl.*

Decadica minuta minora in astronomica datæ denominationis conuertere. Oportet autem numerum qui fit ex multiplicatione datæ denominationis astronomicæ in data minuta decadica, maiorem esse denominatore decadicorum conuertendorum.

Expositio.

Cum hîc proponuntur decadica minuta in astronomica datæ denominationis conuertenda:id ita intelligendum est; vt non semper vnicum sit membrum datæ denominationis, esto interdum vnicum occurrat; sed vt aliquod vnum tale sit, & quidem primarium, licet deinde aliud ipsi adhæreat alterius speciei: atque ita fiat compositus fractus astronomicus numerus. Adiecta verò est in Propositiòne determinatio: cuius adiiciendæ ratio clariùs patebit inferiùs quàm si hîc exponeretur.

Constructio.

A 4′5
B 60
C 2700
D 100 (G 2′7

Detur decadica fractio A 4′5 (quadraginta quinque secunda) conuertenda in prima astronomica, quorum denominator est terminus 60 in astronomica progressione; cui competit exponens figura 1. vt in progressione Propositione antecedente, allata videre est: Ducantur data minuta decadica A 4′5 per terminum B 60, vt producatur numerus C: qui diuidatur per denominatorem datorum decadicorum A, qui est D 100: (effertur enim valor decadici A 4′5, si dicatur esse, *Quadraginta quinque secunda*, siue *quadraginta quinque centesima*) nascetur autem ex ea diuisione quotiens G. Hunc ergo assero esse minuta astronomica datæ denominationis, hoc est, prima quæ datis decadicis A sint æqualia.

Demonstratio

A 45	G 27
D 100	B 60

Dum problematis huius solutio quæritur; nihil quæritur aliud, quàm vt data decadica fractio A 4′5: quæ eadem est cum fractione A D suis veris numeris designata; conuertatur in fractionem, cuius denominator datus est B 60. Denominator scilicet minutorum primorum Astronomicorum. Ita vt ha-

beatur vera ſolutio, ſi reducatur fractio A D ad fractionem; cuius denominator datus eſt B. Quod per Propoſitionem 21. vel 56. huius lib. 2. abſolui poteſt. Sed in hoc caſu id abſoluetur per proportionum canonem ſi dixeris.

Si D 100 foret B 60 : qualis foret numerus A 45 ? G 27.

Nihil enim aliud quæritur quàm vt reperiantur duo numeri, quorum vnus B 60 eſt datus, duobus A, D, proportionales: hinc enim fit per Prop. 5. huius. Vt duo fracti A D, G B ſint æquales. Præcepi ergo in conſtructione; vt datus decadicus A duceretur in B 60 denominatorem minutorum Aſtronomicorum, in quæ fieri debet conuerſio: & productus C 2700. diuideretur per D 100 denominatorem datorum decadicorum; quæ eſt ipſa formula regulæ proportionum, vt in proximo ſchemate licet intueri. Atque in hoc quidem paradigmate habetur. Aſtronomicus fractus numerus præciſus, & ſimplex datæ denominationis. Vt habet primus caſus. Sed ecce compoſitum.

Conſtructio alterius caſus.

Sit rursùs decadicus A 4′4 in aſtronomica minuta prima conuertendus. Inſtituatur conſtructio iuxta præſcriptam methodum ſuperiorem. Ducatur ſcilicet A per B denominationis aſtronomicæ datæ. Vt fiat C qui diuidatur per denominatorem D decadici A conuertendi. Quotiens erit G ad prima minuta aſtronomica pertinens quidem; atque ex eo capite problemati ſatisfaciens. Verùm relinquitur poſt diuiſionem numeri C per D, numerus H: qui in ſecunda aſtronomica reuocandus erit, quandoquidem minor eſt, quàm vt minutum vnum primum conſtituere poſſit; alioqui quotiens G vnitate ſuperadditâ augendus foret. Ad ſecunda ergo reuocandus erit hic reliquus numerus H. Quod, vt proximè factum eſt, abſoluetur; ducetur nimirum denominator B, ſiue progreſſionis terminus ad minuta pertinens, in H, & productus C diuidetur per D denominatorem dati decadici A: quotiens enim L erit ille ipſe ſecundorum aſtronomicorum numerus, qui quæritur. Ac proinde decadicus fractus A mutabitur quidem in prima aſtronomica G 2′6, vt quærebatur, ſed non ſola: huic enim addi debent adhuc ſecunda aſtronomica L 24. Quod ſi quid etiam in ſecunda hac operatione reliquum foret: id totum ad tertia reuocaretur. Ac tandem hi omnes quotientes (quorum primus G, eius eſt denominationis, nempe, primorum; quæ exigebatur) ſimul ſumpti

A 4′4		H 40	
B 600		B 600	
C 2640		C 2400	
D 100	G 2′6	D 100	L 24. ſ.

æquales

æquales erunt dato decadico A 4'4. conuertendo: Atque adeò compositus erit numerus astronomicus huic æqualis. Sed demonstranda venit reliqui illius numeri H in secunda conuertendi ratio. Neque enim satis euidenter constat; cur, vt ad secunda fiat numeri H conuersio, assumatur tantùm progressionis terminus B 60: qui primis inseruire solet, non secundis, quibus inseruit terminus 3600

Demonstratio.

A 4'4		
B 60		L 24. f.
C 2640	G 2'6	H 40
D 100		D 100

Cum numerus C genitus ex multiplicatione decadici A per astronomicum B diuiditur per D; vt fiat quotiens G primorum astronomicorum integrorum, vna cum fractione H D. Fractio huiusmodi H D fractio est vnius totius, siue vnitatis earum, quas continet integer G 2'6; hoc est vnius minuti primi astronomici: ita vt si minutum vnum Astronomicum in partes 100 sectum concipiatur, vt indicat denominator D 100: & ex eis sumantur 40, vt exigit numerator H 40, valor exprimatur fractionis H D. At si reperiatur alia fractio æqualis fractioni H D; cuius scilicet termini terminis H, D sint proportionales iuxta Propositionem 5. huius & cuius denominator sit 60: eodem modo valor illius fractionis H D habebitur. At iuxta traditam methodum conuertitur fractio H D in aliam fractionem; cuius numerator est L 24, & denominator est 60, vt in præcedenti constuctione, in qua decadica fractio A conuersa est in astronomicam G, demonstratum est. Ergo cum fractio H D sit fractio vnius minuti primi, erit etiam fractio, cuius numerator est L 24, & denominator numerus 60, fractio vnius minuti primi astronomici; ita vt vnum minutum primum in partes 60 diuidatur, hoc est, in secunda 60 (vnum enim primum in partes 60 diuisum, secunda constituit) & ex eis sumantur L 24. Numerus ergo L 24 pertinet ad secunda; & symbolico charactere secunda astronomica designante inuri debet: vt habeatur integra conuersio decadici A 4'4 in compositum astronomicum G 26 p. L 24 f. vel hoc modo expressum vt Prop. 53. monui, G 2'6. 24. datum ergo numerum minutorum decadicorum in astronomica minuta conuertimus datæ denominationis; quæ Propositioni appositam determinationem obseruat. Terminus enim 60 astronomicæ progressionis ductus in decadica minuta A 4'4 numerum C generat maiorem quàm sit numerus D denominator decadicorum A conuertendorum. Huius porrò appositæ conditionis necessitas ex sequenti ratiocinatione apertè colligetur.

Ratio apposita determinationis ad propositionem.

A	0'16
B	60
C	960
D	1000

Hæc ratio statim patebit ex huiusmodi paradigmate. Conuertenda proponantur minuta decadica A (*sedecim tertia*) quorum verus denominator est D, vt constat ex dictis suprà de decadicis; & quidem conuertenda in prima Astronomica; quorum denominator est B 60. Itaque iuxta hîc traditam & demonstratam methodum denominator B duci debet in minuta decadica A; tum ex ea multiplicatione genitus numerus D diuidi per D denominatorem decadicorum. At diuisor D occurrit in hoc casu maior diuidendo numero C, ita vt ne semel quidem D contineatur in C. Ergo nec decadicus numerus A, vel vni minuto Astronomico æqualis esse potest. Necesse igitur est, vt numerus C ex denominatore B minutorum Astronomicorum in decadica minuta A ducto genitus, maior sit denominatore ipsorum decadicorum, vt diuisio necessaria possit iniri. Nihil tamen oberit quin eadem decadica in alia Astronomica minora, quorum scilicet maior est denominator quàm hîc denominator B primorum, conuerti possint. Et verò proposita minuta A conuertuntur iuxta methodum præscriptam in Astronomica secunda 57. & tertia 36.

PROP. LVIII. *Probl.*

Astronomica minuta in alia item Astronomica conuertere: quando fieri potest.

Expositio.

Hæc Astronomicorum minutorum mutua conuersio, per diuisionem, & multiplicationem tota absoluitur. Pendet verò ex generatione terminorum progressionis Astronomicæ, siue per ratione sexagecuplam ab vnitate promotæ: ita vt rationis sexagecuplæ denominator 60 multiplicans primo vnitatem, siue primum terminum, producat secundum 60: tum multiplicans secundum 60 producat tertium 3600: & ita deinceps in infinitum, vt hæc progressio refert. Quam ab initio iam sepiùs proposui; sed hîc, vt fert locus, repetenda fuit, appositis etiam exponentibus notis

1.	60.	3600.	216000.	12960000.	777600000.	&c.
0	1	2	3	4	5	

Arithmeticis huius verò progressionis singuli termini, veri sunt, & expressi

pressi denominatores minutorum Astronomicorum diuersæ speciei; quorum numeratores erunt alij numeri quicunque quidem; sed tamen, si propriè sumantur, denominatore 60 rationis sexagecuplæ, quàm obseruat progressio, minores esse debent. Vt si proponantur prima A 45: fiet vera, & propria fractio ex numeratore A 25, & denominatore B 60: qui denominator est primorum minutorum, eiúsque fractionis valor exprimetur.: si dicatur esse *quadraginta quinque sexagesima*: quam alias amoto termino B 60, & in eius locum assumpto eiusdem exponente 1 diceremus esse *quadraginta quinque prima*, supple, *minuta*.

A 45	C 74
B 60	B 60

At si proponatur fractio C B; cuius numerator C 74 maior est denominatore 60 rationis sexagecuplæ (qui denominator in hoc exemplo idem est cum termino 60 progressionis secundo) fractio impropriè dicenda esset & impropriè efferretur *septuaginta quatuor prima minuta*; non tam quia numerator C 74 maior est denominatore B 60; eoque nomine fractio C B sit integro maior, vt Prop. 2. huius lib. 2. explicatum est; quàm quia maior est rationis sexagecuplæ denominatore 60. Quod clariùs euadet ex hoc altero paradigmate: in quo cernere est minuta prima A 45. siue quadraginta quinque sexagesimæ; & minuta C 74 secunda, vt indicat progressionis terminus D 3600; cuius exponens est nota Arithmetica 2. in hoc ergo minuta C 74 secunda, etsi numerator C minor sit denominatore D; ipsaque adeo fractio C D sit per citatam propositionem integro suo minor, & ex eo fractio propriè dicta. Quia tamen idem numerator C 74 maior est quàm rationis sexagecuplæ denominator 60: ideo in hoc Astronomicarum fractionum negotio: in quo fractiones non absolutè; sed cum relatione ad cæteras; quas Astronomica progressio complectitur, considerantur; fractio huiusmodi, fractio Astronomica dici debet; ita vt ineptè efferatur si dicatur *septuaginta quatuor secunda*. Quid ita? Accipe.

A 45	C 74
B 60	D 3600

Cum termini progressionis Astronomicæ producantur per continuam multiplicationem denominatoris 60 in singulos vltimò productos terminos: poterunt reciprocè termini singuli per eundem denominatorem 60 ædæquate diuidi & alij eiusdem progressionis termini produci, siue per hanc diuisionem restitui. Quia verò numerator C 74, maior est quam idem denominator 60; poterit etiam C 74 per eundem denominatorem 60 diuidi. Si ergo fractionis tam numerator C 74 quam denominator D

C 74	E 1	G 14
D 3600	F 60	D 3600

3600 per eundem numerum B 60 diuidantur fiet fractio E F, & relinquetur fractio G D: ita vt fractio C D in duas fractiones E F, G D tanquam partes integrantes distribuatur. Tunc autem nec paulò aptiùs nec paulò explicatiùs valor fractionis C D, & verbis, & mente concipietur. Si dicatur *minutum vnum primum, & quatuordecim secunda* iuxta duarum fractionum E F, G D significationem; quàm si iuxta significationem solius fractionis C D efferretur *septuaginta quatuor secunda*. Numeri siquidem minores maioribus sunt semper apertiores; & ex eo, maior eorum ratio est habenda.

Sic igitur habeto, vt rem exponam apertissimè vnde apertissima deinde euadet constructio. Posito termino D 3600 ad secunda pertinente tanquam denominatore: si ei numerator tribuatur numerus quilibet minor quam 60: quales sunt hæ & aliæ huiusmodi fractiones A D, B D, C D, E D. Semper dicentur propriè minuta secũda.

A 1	B 15	C 38	E 59	G 60	est	H 1
D 3600	D 3600	D 3600	D 3600	D 3600		L 60

Nam numeratores diuidi nequeunt per 60: cum eo numero ponantur minores. At ibi numerator fuerit ipsi numero 60 æqualis, vt æqualis est in fractione G D: mutari poterit secundorum hæc fractio ad fractionem primorum H L ope diuisionis tam numeratoris G, quam denominatoris D per numerum 60. Quod si post hanc fractionem G D numeratores semper augeantur eodem seruato denominatore D; donec tandem numerator fiat æqualis ipsi denominatori D 3600: semper ad prima reuocari poterunt huiusmodi minuta; vel præcisè, vel saltem vna aliqua eorum pars, alterâ ad secunda permanente: donec numeratore & denominatore æqualibus positis; fiat fractio vnitati æqualis, siue vni integro per Prop. 2. huius lib. 2. Quæ vnitas etiam habetur; si vterque fractionis huiusmodi numerus per 60 diuidatur.

Ex dictis sequitur minuta nulla Astronomica debitis numeris constantia, hoc est, quorum numerator minor est quam 60. Si minuta minora sint, ad alia minuta speciei præcedentis, & integro vicinioris reuocari posse. Sint enim minuta minora secunda, fractione A B expressa. Ea in prima mutari nequeunt: quia ne vni quidem minuto primo æqualia sunt 56 minuta secunda.

A 56
B 3600

At verò si fuerint minuta maiora secunda A 56. Fractione A B expressa: cuius sensus est, vt ducatur denominator B in numeratorem A (productus enim 201600 est valor fractionis huiusmodi vt propositione 52 declaratum est) oppositum plane contingit. Id est, hæc fractio maior, siue ad maiora minuta pertinens reduci non potest

test ad minuta maioris denominatoris, quàm sit B. Vt enim habeatur fractio Astronomica æqualis huic fractioni A B, debet ex multiplicatione terminorum illius, idem numerus produci; qui producitur ex multiplicatione terminorum A, B (hîc est enim huiusmodi minutorum valor) debet ergo Astronomicus terminus, denominator futurus reductæ fractionis, ita se habere ad denominatorem B 3600, vt se debet habere huius numerator A 59 ad illius numeratorem: vt scilicet sint quatuor numeri proportionales: quorum secundus B, & tertius A in se ducti eundem numerum producant: quem primus & vltimus. Si ergo numerus B multiplicetur per 60 denominatorem rationis inter terminos progressionis Astronomicæ; vt fiat terminus 216000 proximè maior, quàm B 3600. Ille ad hunc rationem habet sexagecuplam, vt patet. Ergo numerator A 59 ad numeratorem futurum, cuius denominator foret 216000 ad tertia Astronomica pertinens; habere etiam deberet rationem sexagecuplam hoc est, quam 60 habet ad 1. Minor ergo quam 1 numerator ille esse deberet per Prop. 14 lib. 5. elem. Minor enim est A 59, quàm 60. At hoc est impossibile, cum numerorum minimus sit vnitas. Ergo reductio huiusmodi foret impossibilis. Ex quibus patet meritò appositam esse ad propositionem, determinationem illam *quando fieri potest.* His ergo exclusis duobus casibus, constructionem instituamus iuxta varios, qui occurrunt, casus reliquos.

Constructio & demonstratio.

Primò ergo proponatur fractio ad minuta minora pertinens, reuocanda ad fractionem vtique Astronomicam; cuius denominator maior sit denominatore datæ fractionis id est, sit progressionis Astronomicæ terminus promotior, quàm terminus fractionis reuocandæ. Vt, si proponatur fractio A B, quæ per exponentem designatur, vt A 1'5, & ad prima pertinet; reuocanda ad tertia. Quorum verus denominator est progressionis Astronomicæ terminus 216000; cuius exponens est 3, vt patet in progressione superiori. Quia ergo terminus ille maior, futurus denominator conuertendæ fractionis generatur per continuam multiplicationem numeri 60, vt ex generatione progressionis Astronomicæ superius explicata constat, multiplicetur datæ fractionis A B denominator B,

A 15
vel A 1'5
B 60

D 54000
C 216000
vel
D 54000. p.

quisquis ille fuerit (hîc est 60) per 60 continuè donec ad denominatorem datum C 216000, perueniatur: quoties autem numerus 60 multipli-

cauerit denominatorem B datæ fractionis A B; toties idem numerus 60 multiplicet continuè numeratorem A, vt fiat numerus D. Erit tunc fractio D C, vel fractio D 54000 p. repoſito exponente p in locum denominatoris C 216000, æqualis fractioni datæ A B vel A 1'5 vel 15 p. atque adeo hæc conuerſa fuerit in fractionem D C datæ denominationis tertiorum minutorum. Ratio clara eſt ex Propoſitione 3. lib. huius 2. qua conſtat fractionem æqualem generari, ſi tam numerator fractionis alicuius quàm denominator per eundem numerum multiplicetur. Licet enim contingat, vt hîc contingit, ſæpiùs multiplicari numeratorem, & denominatorem per eundem numerum 60; quia per eandem continuatam multiplicationem ſemper æqualis fractio primæ fractioni multiplicatæ generatur: erit etiam fractio vltimò producta eidem primæ æqualis per eandem citatam Propoſitionem. Conuerſa igitur eſt data fractio A B in fractionem D C æqualem; cuius denominator C eſt terminus progreſſionis aſtronomicæ maior, quàm terminus B, qui datæ fractionis conuertendæ A B denominator eſt. Quod cum in omni huiuſmodi caſu fieri nihil vetet: patet hoc modo rectè ſatisfieri propoſito problemati.

Secundò. Sit fractio ad minuta minora pertinens maioris denominatoris ad fractionem minoris denominatoris dati reuocanda. Conſtat quidem denominatorē maiorē diuiſione per progreſſionis denominatorē 60, reduci poſſe ad datum minorē denominatorem (denominator enim maior non niſi per multiplicationem numeri 60 continuatam genitus eſt; qui propterea per diuiſionem eiuſdem numeri 60 continuatam reſoluetur in omnes ſubgraduales progreſſionis aſtronomicæ terminos.) At non ſemper numerator præcisè diuidi poterit continuè per diuiſorem 60. Si numeratorem continuata illa diuiſione toties

A 15
— vel A 1'5
B 60 —
D 54000
———
C 216000
vel
—
D 54000. p.

præcisè diuidi contingat; quoties diuiſus eſt denominator, vt ad datum minorem denominatorem perueniretur: eâ abſoluta diuiſione, præſtitum eſt, quod quærebatur: conuerſa eſt ſcilicet fractio data maioris denominatoris, ad fractionem dati minoris denominatoris. Vt in paradigmate ſuperiori, ſi reciprocè, fractio D C in fractionem conuertenda ſit; cuius denominator ſit B, minor quàm C. Diuiſis numeratore D, & denominatore C per diuiſorem 60 continuè, & vtroque toties: generabitur fractio A B æqualis fractioni D C. Nam ſi cuiuſvis fractionis numerator & denominator per eundem numerum diuidantur, fiet per Prop. 4. huius lib. 2. fractio fractioni diuiſæ æqualis. At verò ſi numerator per diuiſorem 60 diuidi præcisè nequeat: neque etiam præcisè poterit ea fractio reduci ad

ad aliam minoris dati denominatoris: poterit tamén non præcisè, hoc est, quædam eius pars, parte alterâ pristinum retinente denominatorem. Huius esto paradigma huiusmodi. Reducenda est fractio A B ad tertia pertinens (exponens enim denominatoris B est 3 in progressione astronomica) in fractionem; cuius denominator sit F 60. Si diuidatur B per 60 continuè; fiet prima hac diuisione quotiens D tum diuiso quotiente hoc D iterùm per 60, fiet quotiens F datus denominator. Iam si diuidatur numerator A per diuisorem 60: fiet quidem quotiens C; sed reliquus fiet numerus G, qui ad tertia adhuc pertinet, & cum denominatore B fractum G B constituit; octo scilicet tertia. Sed si iterum quotiens ille C 706; qui ad secunda pertinet, vt denominator D 3600, cuius exponens est 2, significat; diuidatur per 60. Quotiens erit E 11, & ad prima deuoluitur; cum eius denominator sit terminus F progressionis sortitus exponentem 1. Atque hîc est qui quærebatur dum tertiorum fractio A B reuocanda proponebatur ad prima. Ita enim ad prima E F reuocata est, vt E F ei non sit æqualis omninò; desunt enim octo tertia, fractione G B, & quadraginta sex secunda, fractione H D, designata. Nec potest G B fractio tertiorum, ad secundorum fractionem H D reuocari: sicut nec H D secundorum fractio ad fractionem primorum: vt in expositione demonstratum est. Atque hæc est fractionum siue minutorum minorum maioris denominatoris ad minoris denominatoris minuta conuersio.

A 54368	C 706	E 11
B 216000	D 3600	F 60
3.	2.	1.
G 8	H 46	
A 216000	D 3600	

Tertiò. Dentur minuta maiora maioris denominatoris, ad minuta item maiora minoris denominatoris reuocanda. Ducatur numerator datæ fractionis conuertendæ in suum denominatorem: & productus ex ea multiplicatione numerus diuidatur per minorem datum denominatorem: erit enim ortus ex diuisione numerus numerator fractionis æqualis datæ fractioni, cuius denominator est datus. Exempli causâ. Datur fractio maior A B; cuius valor est numerus genitus ex multiplicatione horum numerorum A, B vt Propositione 52 declaratum est, & ad tertia maiora pertinet. Reuocari autem debet ad prima, id est, ad fractionem cuius denominator est progressionis astronomicæ terminus L 60: quem afficit exponens, 1 & primorum omnium denominatorem creat. Ducatur ergo numerator A 15 in suum denominatorem B 216000 tertiorum, & productus C 3240000

A 15 / B 216000	vel A 15 T.
C 3240000	
L 60	H 54000 / L 60

3240000 diuidatur per datum denominatorem L 60 ad primá pertinentem. Quotiens enim H 54000 erit numerator fractionis maioris quæsitæ: cuius scilicet datus est primorum denominator L 60. Atque ita minuta tertia maiora A 15. T, vel ˋ0, 0, 15 (ita enim huius generis minuta designare licet vt Prop. 53. declaratum est) reuocata erunt ad prima H ˋ54000. Probatur hæc conuertendi ratio. Nam cum idem numerus fieri debeat ex fractionis, quæ inquiritur, numeratore, & denominatore in se ductis; qui fit ex datæ fractionis A B numeratore A, & denominatore B ductis in se inuicem (sic enim habetur huius generis fractionum maiorum æqualitas) fiat autem C ex multiplicatione mutua A, & B. Quo diuiso per L 60 producitur H 54000: fiet etiam idem numerus C: si L, & H in se ducantur: nam multiplicatio mutua diuisoris, & quotientis, numerum diuisum restituir. Æqualis ergo est fractio H L maior, cuius denominator datus est L ad prima pertinens, fractioni maiori A B datæ, quæ ad tertia pertinebat. Quod ex eo verum etiam patet quod hîc occurrant proportionales quatuor numeri, & obseruetur (licet tacita sit) regula proportionum. Si enim fiat, vt datus denominator L 60. ad denominatorem B 216000; ita numerator A 15 ad aliud? Ad H 54000 scilicet: absolutá iuxta methodum regulá, multiplicantur duo posteriores numeri A & B, & productus, qui est C, diuiditur per primum L; vt habeatur quartus H. Quatuor autem proportionalibus numeris propositis; qui fit ex duobus extremis H, L; æqualis est ei, qui fit ex duobus mediis A, B. Ergo rectè conuersa est fractio A B in fractionem H L.

Quartò. Si è contrà maiora minuta minoris denominationis in maioris denominationis minuta conuerti debeant. Ducantur eodem modo, quo proximè factum est, in se, mutuò duo numeri reducendæ fractionis, genitúsque ex ea multiplicatione numerus diuidatur per datum denominatorem maiorem: habebitur numerator qui quæritur. Vel, seruatá lege aureæ regulæ proportionum; fiat vt datus denominator ad denominatorem fractionis conuertendæ; ita huius numerator ad quartum numerum. Hic enim numerator erit fractionis, cuius denominator datus est, & quæ erit priori minoris denominationis fractioni æqualis. In exemplum resumo præcedentis schematis numeros sed inuersâ operatione. Sit fractio H L ad prima minuta maiora pertinens, ad fractionem tertiorum, quorum denominator est B, reuocanda. Ducantur in se H, & L; vt fiat C qui diuidatur per B. hoc est, fiat, vt B 216000 ad L 60; ita H 54000 ad A 15. Erit fractio A B ad tertia pertinens

H 54000	
——— vel H 5ˋ4000	
L 60 ——	
C 3240000	
B 216000	A 15
	———
	B 216000

pertinens (exponens enim progressionis Astronomicæ termini B est numerus 3) æqualis fractioni H L ad prima pertinenti æqualis, eo sensu; quo huius generis fractiones concipi debent iuxta propositionem 52. Hoc est, duo numeri A B in se ducti numerum producent æqualem numero ex H & L in se ductis genito. Quod ex ipsa praxi, & ex ratione casus præcedentis verum esse constat. Quod si diuisio numeri C ex multiplicatione numerorum H L producti, inita per diuisorem B præcisa minimè foret: sed aliquus fieret reliquus numerus: tunc fractio H L integra quidem non reduceretur ad datam denominationem; reduceretur tamen eius aliqua pars; altera verò in priore denominatione intacta remaneret, vt in tertio casu exposui. Astronomicam ergo fractionem tam minorum minutorum, quàm maiorum in aliam eiusdem generis conuertimus. Quod faciendum erat.

PROP. LIX. *Probl.*

Astronomica minuta vtriusque generis, maiora & minora, in vnum per additionem colligere.

Expositio.

Cum addenda proponuntur Astronomica minuta vtriusque generis maiora scilicet, & minora; id ita accipiendum est, vt maiora cum maioribus tantùm: & tantùm minora cum minoribus addi possint. Vtrorúmque enim longè diuersa est ratio, vt ex superioribus constat. Rursus varia proponi possunt minuta, & quidem omnia eiusdem denominationis: vel etiam denominationis diuersæ. Illorum additio ex horum additione intelligetur.

Constructio & Demonstratio.

Variis ergo fractionibus diuersæ denominationis propositis; siue hæ fuerint maiores, siue minores; par enim est vtratúmque ratio quoad additionem: ita disponantur omnes eiusdem speciei, vt in vnum ordinem perpendicularem dirigantur: ad cuius caput speciei character disignetur Quod si membrum desit aliquod: illud per figuram O suppleri debet. Ita ergo aptè comparabuntur ad additionem minuta A, B, C vt schema refert. In quo etiam gradus comprehenduntur charactere G designati, minuta suis etiam characteribus distinguntur P. S. T. &c. his paratis.

Initio facto ab vltimo ad dextram membro. Si quidem minora minu-

ta sint, vt hîc supponuntur (in maioribus enim alia futura est ordiendi ratio (adde numeros illius membri vltimi more additionis communis solito. Adde scilicet classem vltimam figuris 0, 7 0 constantem, fiet 7 figura sub linea ad E reponenda. Adde deinde præcedentis classis figuras duas 2 & 5 : fiet numerus 7. Id est, 70 habitâ ratione

	G	P	S.	T	Q
A	3	48	50	20	
B	15	9	0	57	
C	0	24	56	0	
E	19	22	47	17	

sequentis iam statutæ figuræ 7. Quia verò numerus 70 superat numerum 60: qui æqualis est vni minuto membri antecedentis ad secunda pertinentis; ideo ex 70 aufero 60, & reliquus fit numerus 10: siue ex figura 7 aufero 6, & reliqua superest figura 1; quam figuræ 7 primò positæ præfigo; vt fiat 17 (sic enim figura illa 1 est 10) & locò figuræ 6 ex 7 ablatæ, siue loco numeri 60 ex numero 70 tertiorum ablati, mente retineo 1, vnum scilicet secundum, ad secunda vtique addendum. Addita ergo vno illo secundo ad figuram 6 classis vltimæ secundorum, quæ hisce tribus figuris 0, 0, 6 constat, fit numerus 7 sub linea ad E reponendus. Additis deinde prioris classis figuris 5 & 5 eorundem secundorum; gignitur numerus 10, hoc est, 100 propter iam positam figuram 7: ex quo numero, 100, quia superat 60, ipsum 60 demo, & remanent 40, siue ex numero 10 demo 6 & remanent 4; quem numerum præfigo figuræ 7 iam positæ (sic enim figura 4 significat 40) memoriâ interim figuram 1 retineo, quam ad prima transfero. Eodemque modo prima addo; tum etiam gradus, vt tandem fiat ex additione productus numerus E ex horum omnium minutorum minorum additione collectus qui idem colligeretur etiam, si lubeter: si numerus ex minutis eiusdem speciei, siue numeris eiusdem ordinis collectus supponeretur integer sub linea ad E; & posteà initio facto ab vltimo numeri singuli numerum 60 superantes ad membrum antecedens transferrentur: sed vna eadémque operâ, vt factum est, eadem reductio compendiosiùs fieri videtur. Vtrouis autem modo fiat, si additionem velis per abiectionem nouenarij probare: methodum sequeris quam Prop. 22. lib. 1. exposui, & demonstraui: Vbi variæ numerorum species additæ sunt. Scito tamen hîc breuiùs initi, eò quod numerus qui fit ex singulis membris reliquus post nouenarij abiectionem, semper veniat per 6 multiplicandus: maior enim species speciem minorem proximam continet sexagesies: à numero verò 60 abiecto nouenario superest 6. multiplicator. Citatam propositionem consule, & ex ea operare.

Age nunc maiora minuta addenda proponantur. Ad numerorum dispositionem superiorem minutorum minorum præcipi nihil aliud debet. Quare

	G	P	S	T	Q &c.
A	59	48	34	20	
B	15	9	0	57	
C	0	24	56	0	
E	14	22	31	18	1

Quare eâ ſuppoſitâ, vt ſchema refert, additio inſtituenda eſt initio ducto priori planè oppoſito initiũ enim ducebatur ab ordine vltimo: hîc verò à primo ducendum eſt à gradibus ſcilicet, tum ad minuta deinceps pergendum eſt; nec huius oppoſitæ rationis cauſa latet. In eo enim genere minutorum, gradus minimi ſunt valoris; minuta verò quò gradibus propiora ſunt; eò etiam minoris ſunt pretij. Quare cum gradus 60, minutum vnum conſtituant; minuta prima 60, ſecundum vnum, & ita deinceps minuta 60 gradibus viciniora, minutum ſequens ſemper adæquent: hinc fit vt à gradibus inchoari debeat additio, & per prima & ſecunda promoueri: vt minora vbi ad 60 excreuerint, poſſint ad maiora tranſire eo, quo dixi, modo itaque in hoc paradigmate addatur graduum columna numeris 59, 15, 0 conſtans: ex iis additis naſcitur graduum numerus 74. A quibus demi debent 60: relinquentur ergo gradus 14 in graduum columna ſcribendi ſub linea ad E: illorum verò graduum 60 loco, retinebitur primum vnum minutum cum primis 48, 9, 24 addendum; ex quibus generabuntur prima 82: demptis etiam 60 ex 82, remanent 22 prima in primorum ordine relinquenda: ſed ſecundis 34. 0, 56 accedet ſecundum vnum ex primis illis 60 profectum, & omnia ſimul addita conflabunt 91. Deme 60; remanent ſecunda 31 ſubſcribenda. Ad E, & vnum cum tertiis 20, 57, 0 additur; vt fiant tertia 78, demptis 60, ſuperſunt 18 tertia. Vnum verò quartum tertiis illis 60 æquiualens in ordinem quartorum, etſi vnicum ſit reponetur. Atque ita abſoluta eſt additio: cuius examen, ſi quid dubitas, eodem modo inſtitues; quo in additione minorum minutorum paulò ante inſtitutum eſt. Vtriuſque autem additionis huius ad minuta tum minora, tum maiora ſpectantis methodus in ipſius additionis progreſſu tota demonſtrata eſt & infra habetur in ſubtractione addita ſunt ergo minuta Aſtronomica data vtriuſque generis. Quod faciendum erat.

PROP. LX. *Probl.*

Aſtronomica minuta minora à minoribus maiora à maioribus ſubducere.

Conſtructio & Demonſtratio.

Minutorum numerus vterque ſubtrahendus ſcilicet B, & maior à quo fit ſubtractio A componantur, vt in additione præceptum eſt; ita nimirum vt eiuſdem denominationis minuta ſibi reſpondeant: vt in hoc ſchemate intueri licet, in quo licet etiam obſeruare repleri figurâ O membra illa minutorum: quæ ſiue in numero ſuperiore ſiue in inferiore deerant: vt in additione fieri præcipitur. Facto ergo initio ab vltimo membro, quod eſt tertiorum; fiat ſubtractio particularis numeri inferioris 25 à ſuperiore 56; reliquo 31 ſubſcripto ad C. Tum ad membrum ſecundorum accede: in quo cum à ſuperiore numero, qui eſt figura o, ſubduci nequeat inferior 7: à primis anterioribus minutum vnum eſt mutuò accipiendum; quod 60 æquiualet; à quibus demendus eſt numerus 7: & reliqua fiunt ſecunda 53 ſubſcribenda. Tum pergendum ad prima quorum numerus eſt tantum 23: oportet enim meminiſſe minutum vnum ab eo mutuò datum ſecundis, quo hæc egebant. Quia vero inferior 38 maior eſt ſuperiore 23. Hic etiam à graduum numero mutuò accipiet gradum vnum, ſiue prima 60; quæ ad 23 addita conflant 83 prima: à quibus ſubductis primis 38, reliqua fiunt 45 ſubſcribenda. Quæ perinde haberentur; ſi numerus 38 ſubduceretur à mutuo ſumpto 60; & reliquus 22 adderentur ad 23, ſic enim fierent 45. Quæ methodus ei eſt perſimilis, quæ in huiuſmodi caſibus in ſubtractione vulgari aliàs tradita eſt. Verum hoc etiam modo fortaſſe cõmodiore abſoluetur huiuſmodi ſubtractio. Ineatur ſubtractio velut ſimplex numeri 38 à numero 23. Dices, ſubduci non poteſt figura 8 à ſibi reſpõdente ſuperiore figura 3: vnde hæc ab anteriore 2 vnitatem mutuam petet, ſiue 10, ita vt iam à 13 demi debeat figura 8, quo facto remanet ſubſcribenda figura 5. Deinde altera numeri 38, figura 3 à ſibi reſpondente ſuperiore 1 (eſt enim figurâ 2 in figuram 1 mutata ob datam mutuò vnitatem) demi nequit. Quare à gradibus mutuò ſumi debet gradus vnus, ſiue prima 60: & addi ad 1, id eſt, ad 10, (figura enim 1 propter alteram ſequentem figuram, tanti debet æſtimari) fiet ergo

	G.	P.	S.	T.
A	45.	24.	0.	56
B	12.	38.	7.	25
C	32.	45.	53	31

go 70, à quo numerus inferior 30 (tanti enim æſtimari etiam debet figura 3) ſubductus relinquit ſubſcribendum numerum 40 qui cum figura 5 iam ſubſcriptâ efficiet totum ſubſcribendum numerum 45. Sed ex his omnibus numeris 60, 30, 40 abiectâ figura O; quam claritatis gratiâ expreſſi, ſubtractio fiet, ſi ad figuram 1 ſuperiorem accedat figura 6, quaſi ſola mutuò accepta à gradibus, & à figura conflata 7, à qua dematur reſpondens inferior 3, vt relinquatur ſubſcribenda 4. Quæ ratio videtur omnium expeditiſſima, & ſimplici ſubtractioni ſimillima. Denique à gradibus 44 (tot enim tantùm ſunt ob gradum vnum mutuò datum) dementur gradus 12 & reliqui fient gradus 32 ad C ſubſcribendi. Ita vt numero B à numero A ſubducto reliquus fiat C. Atque hæc eſt à minoribus minutorum minorum ſubtractio. Quam ſi examini ſubiicere placeat: illud vel additione duorum numerorum B & C abſoluetur: eâ ſiquidem reſtitui debet numerus A maior; vel nouenarij abiectione; in eum modum, quo Prop. 27. lib 1. ſubtractio numerorum denominatorum examinata eſt. Ad demonſtrationem quod ſpectat; eam apertam facit ipſa operandi ratio; quare de minorum minutorum ſubtractione ſatis; nunc de maioribus pauca adiicienda ſunt.

Sint maiora minuta A. à quibus fieri debeat ſubtractio minutorum B perinde maiorum (eiſdem vtor ſuperioris paradigmatis numeris) non ſecùs hîc quàm in additione ſuperiùs à lœua ordiendum, & dextram verſus pergendum eſt; ad quam partem maioris denominationis, & valoris exiſtunt numeri ſubductis ergo gradibus 12 à gradibus ſuperioribus 45, reliqui fiunt ſubſcribendi ad C gradus 33. Quia verò prima 38 maiora ſunt quàm 24, à quibus ſubduci debent; mutuò ſumendis O ſecundum vnum, quod primis 60 æquiualeat. At verò (hanc operationem obſerua) quia ſecunda nulla ſunt: ad tertia in hoc caſu recurrendum erit: vnde ſecunda O minutum ſibi aſſumant ſiue ſecunda 60; quæ in locum ſecundorum O ſubſtituantur: ad tertia verò ſuperſit numerus 55. Iam à ſecundis 60 mutuò accepto ſecundo vno, ſiue primis 60, ad prima 24 additis: ex genito 84 ſubducentur prima 38 inferioris numeri B, aliquo ex traditis paulò ante ad minuta minora ſpectantibus modis. Fient autem prima reliqua 46 ad C ſubſcribenda. Tum ſecunda 7 dementur à ſecundis 59 (tot enim ſecunda ſuperſunt loco illius figuræ O) & reliqua fient ſecunda 52 ſubſcribenda. Ac tandem ex tertiis 55 (tot enim tertia ſupereſſe nuper monui) ſubductis 25, ſuperſunt reliqua 30 ſubſcribenda: vt totus relinquatur numerus C abſolutâ ſubtractione numeri B à numero A. Operationem probabis eodem modo, quo ſubtractio minutorum minorum probatur. Nec

	G	P	S	T
A	45.	24.	O.	56
B	12.	38.	7.	25
C	33.	46.	52.	30

alia est demonstratio huius subtrahendi modi ab eâ diuersa; quæ ad minuta minora spectat, quæ est huiusmodi.

Sumantur cuiusvis speciei minuta maiora A: exempli gratiâ, secunda: à quibus secunda C (debent enim eiusdem esse denominationis, vt methodus iubet) subtrahantur: & reliqua fiant secunda D. Apponatur ipsis singulis verus eorum denominator B. Terminus scilicet Astronomicæ progressionis, cuius exponens est numerus 2.

A 56	C 25	D 31
B 3600	B 3600	B 3600

Quia ergo sensus huius generis minutorum maiorum est, vt intelligatur numerus productus ex denominatore in numeratorem ducto: cum idem sit omnium denominator B: ipse omnes numeratores A, C, D multiplicat. Verùm per Prop. 3. huius lib. 2. idem numerus B multiplicans duos vel plures numeros A, C, D; numeros gignit eandem inter se habentes rationem quam habent inter se ipsi multiplicati A, C, D. Sicut ergo si numerator C dematur ex numeratore A relinquitur numerator D; ita etiam si productus ex B in C, dematur ex B in A genito, relinqui necesse est productum ex eodem B in D ducto: ita vt fractio D B maior, sit fractionis maioris A B excessus supra fractionem maiorem C B: duæque simul C B, D B æquales sint fractioni A B in sensu, quo accipiuntur minuta maiora; non secùs quàm accipiantur minuta minora in sensu suo, vel etiam in suo minutiæ communes: quamquam longè sit diuersus ille sensus. Quod non eget longiori expositione. Eadémque ratione probatur maiorum minutorum additio. Nam ostendimus hîc productos ex B in C, & ex B in D simul æquales esse producto ex B in A: sicut duo numeri C & D simul additi æquales sunt toti numero A. Tam ergo additio quàm subtractio huius generis minutorum rectè perficitur iuxta traditam methodum. Quare minuta tam minora à minoribus; quàm maiora à maioribus rectè subduximus. Quod faciendum erat.

PROP. LXI *Probl.*

Astronomica minuta minora per minuta item minora multiplicare.

Constructio

Sit fractus Astronomicus minor A ad secunda pertinens multiplicandus

A 12 Sec.	
B 8 Tert.	
C 96 Quint.	

dus per fractum B minorem ad tertia pertinentems. Ducto B in A, gignatur C: cui assignetur exponens 5, quintorum; qui fit ex additione exponentis 2, secundorum A multiplicatorum, ad exponentem 3, tertiorum B multiplicantium. Dico numerum C ita à quintis denominatum, eum reuerà esse: qui ex multiplicatione minutorum A & B secundorum, & tertiorum generatur.

Præparatio.

In demonstrationis præparationem proponatur progressio astronomica cum exponentibus suis simplicibus.

1.	60.	3600.	216000.	12960000.	777600000	&c.
0	1.	2	3.	4	5	

Numeri etiam multiplicati A & B suis veris denominatoribus, hoc est, terminis huius progressionis, quibus competunt exponentes 2 & 3 secundorum & tertiorum, vt hîc cernis, exprimantur in fractionum communium modum: quales sunt A E, B F. Si igitur hæ duo fractiones in se mutuò ducantur iuxta Propositionem 24. huius lib. 2. ductis in se numeratoribus A, B; vt fiat C; ductis item denominatoribus E, F; vt fiat H: erit fractio C H ea, quæ producitur ex multiplicatione mutuâ fractionum A E, B F. Ostendendum itaque est fractionis C H, denominatorem H esse terminum quempiam progressionis Astronomicæ. Tùm; eum esse terminum, cui exponens debeatur 5 ex duobus exponentibus 2 & 3 terminorum E, F, simul additis collectus. Vtrumque probatur.

A 12	B 8
E 3600	F 216000
C 96	
H 777600000	

Demonstratio.

Ad primum quod attinet nimirum H productum ex terminis E, F progressionis Astronomicæ in se ductis, terminum quempiam esse eiusdem progressionis, patet. Nam cum terminus E multiplicans terminum F producat numerum H; ita erit F ad H; vt vnitas est ad E per multiplicationis definitionem Prop. 28. lib. 1. expositam. Sed vt vnitas in serie progressionis Astronomicæ est ad terminum E; ita etiam est terminus F ad terminum eiusdem progressionis; qui æquè distat à termino F, ac terminus E distat ab vnitate. Ergo numerus H est terminus ille progressionis, æqualiter

æqualiter diſtans à termino F; ac terminus E diſtat ab vnitate per Prop. 9. lib. 5. Elem. Cum idem numerus F eandem habeat rationem ad numerum H, & ad illum progreſſionis terminum. Ex quo ferè etiam ſecundum concluditur. Nimirum ſi exponens 2 termini E addatur ad exponentem 3, termini F; fieri exponentem 5, termini H. Nam cum terminus H diſtet in progreſſione à termino F totidem terminis, quot ſunt termini ab vnitate vſque ad terminum E: horum autem terminorum multitudinem exhibeat ipſius termini E exponens 2. Si exponens 2 addatur ad exponentem 3 termini F, gignetur neceſſariò exponens 5, producti per multiplicationem E per F numeri H. Cum ergo ex fractione A E in fractionem B F ductâ producatur fractio C H: eáque ſit Aſtronomica: cuius ſcilicet denominator H eſt terminus progreſſionis Aſtronomicæ: ad quem pertinere oſtenſus eſt exponens 5, ex duobus exponentibus 2 & 3 terminorum E & F ſimul additis conflatus; quo afficiatur numerus C: patet rectè multiplicatos fuiſſe A & B inter ſe; & ex ea multiplicatione genito numero C, rectè aſſignatum eſſe exponentem 5. Vnde numerus C, quintorum denominatione donetur. Aſtronomica ergo minora data A, B rectè multiplicata ſunt. Quod faciendum erat.

PROP. LXII. *Probl.*

Aſtronomica minuta maiora per maiora multiplicare.

Conſtructio.

A 12 Sec.	
B 8 Tert.	
C 96 Quint.	

Eadem in his maioribus minutis conſtructio problematis afferri debet: quæ Propoſitione antecedenti in minoribus allata eſt, ſenſus licet eorum minutorum diuerſiſſimus ſit. Sint itaque minuta ſecunda maiora, per maiora tertia multiplicanda. In ſe ducantur numeri A & B, vt fiat C. Tum exponens 2 numeri A addatur exponenti 3 numeri B; vt fiat exponens 5; quem aſſero deberi numero C ex multiplicatione numeri A per B genito.

Preparatio. Hîc repetenda in primis eſt Aſtronomica illa progreſſio cum eius terminorum exponentibus numeris. En ipſam.

1.	60.	3600.	216000.	12960000.	777600000	&c.
0	1	2	3	4	5	

Exprimendi deinde ſunt numeri A & B minutorum, in fractionum communium morem; expreſſo ſcilicet eorum vero denominatore; cuius locum exponens character occupat; tales ſunt denominatores E, F. Exprimendus

A 12	B 8
E 3600	F 216000
C 96	
H 777600000	

primendus etiam exponens numeri C per multiplicationem A & B producti. Qui quidem exponens est numerus 5 conflatus, vt Propositione antecedente probatum est, ex additis simul exponentibus 2 & 3 numerorum A & B; quique pertinet ad numerum H ex multiplicatione numerorum E & F genitum. Vtpote ad terminum verum progressionis, vt eadem Propositione antecedente demonstratum est. His positis. Probandum est numerum, qui producitur per multiplicationem numeratoris C & denominatoris H (hic enim est valor huiusmodi maiorum minutorum vt Prop. 52. declaratum est) generari per multiplicationem numeri, quem gignunt in se ducti numeri A, E, & numeri, quem B, F in se etiam ducti progenerant. Sic enim in se duci concipi debent minuta maiora. Illud porrò hunc in modum demonstratur.

Demonstratio.

Cum valor fractionis A E æstimetur esse numerus, vt fert huius generis minutorum natura, qui fit ex A ducto in E: sicut & valor fractionis B F est numerus ex B in F ductò genitus. Sit prior L, & posterior k. Si

A 12	B 8
E 3600	F 216000
L 43200	K 1728000
C 96	
H 777600000	

ergo L & K sese mutuò multiplicent sese multiplicare censeri debent duæ fractiones A E, B F, & numerus ex L & k in se ductis genitus, is est, qui ex fractionibus A E & B F in se ductis producitur. Sed dum L & K ducuntur in se mutuò: quatuor numeri A, E, B, F in se ducti sunt. Patet. Nam A & E in se ducuntur vt fiat L: qui dum multiplicatur per numerum K genitum ex F in B ducto, idem fit numerus: qui fieret si idem L multiplicaretur per F octies, vt indicat numerus B. Ergo si F multiplicet L, & ex ea multiplicatione genitus numerus per B 8 multiplicetur, totus tandem productus numerus is est, qui fit ex quatuor numeris in se mutuò successiuè multiplicatis: si nimirum ducatur A in E, vt fiat L, tum in factum L ducatur numerus F, denique in factum ducatur B. Quod cum ita sit: constet autem ex Prop. 32. lib. 1. eundem numerum semper gigni ex trium, vel quatuor, vel plurium numerorum multiplicatione successiuâ, quocunque ordine numeri multiplicent, siue multiplicentur: constat perinde si duo numeri A & B in se mutuò ducantur, vt fiat C: in quem ducatur E; tum in factum, ducatur postremò F, eundem gigni numerum. At si duo numeri E & F in se ducantur primò; tum ex ea

multiplicatione genitus numerus H ducatur in C, idem fit numerus, qui fieret, si in eundem C ducetur E; tum in factum duceretur F, vt paulò ante ostensum est in causa numerorum B & F multiplicantium numerum ex A in E productum. Ergo si numerus C duci censeatur in H; vt in minutis maioribus censeri debet: numerus gignetur idem, qui fit ex B numero, quem in se ducti numeri A, E, generant; si ducatur in eum, quem in se ducti generant B, F. Sed dum numerus ex A in E genitus ducitur in numerum ex B in F genitum multiplicatur fractio B F per fractionem A E. Ergo etiam si multiplicetur numerus C per numerum H, procreatur numerus; qui fit fractione A E ductâ in fractionem B F. Sed fractio C H æquiualet (cum sit fractio ad maiora minuta pertinens) numero; qui fit ex C in H ducto. Ergo fractio C H, ea reuera est; quæ ex fractione maiore A E in fractionem item maiorem B F ductâ generatur. Itaque cum numerus H sit terminus Astronomicæ progressionis; cui debetur, vt ostensum est, exponens ex additione exponentium ad terminos E, F pertinentium collectus: euidens fit propositam fractionem A secundorum, ductam in fractionem B tertiorum rectè multiplicari; si A & B in se ducantur; & producto C 96 assignetur exponens 5. Vnde minuta C denominentur quinta. Duo igitur minuta maiora in se, traditâ methodo rectè ducta sunt. Quod erat faciendum.

A 12	B 8
E 3600	F 216000
L 43200	K 1728000
C 96	
H 777600000	

PROP. LXIII. *Probl.*

Astronomica minuta maiora per minora multiplicare: cum horum exponens illorum exponente minor est.

Constructio.

Sint multiplicanda minuta maiora B, tertia; per minora A secunda, quorum scilicet exponens 2 minor est exponente 3 ad maiora B pertinente. Ducantur in se numeri B & A vt fiat C: cui tribuatur exponens 1 primorum: qui relinquitur dempto exponente 2 secundorum A minorum ab exponente 3 maiore tertiorum B maiorum. Dico numerum C problematis satisfacere.

B 8.	Tert.
A 12.	Sec.
C 96	Pri.

Præparatio

Præparatio.

Hic etiam præ oculis haberi debet progreſſio Aſtronomica duabus proximis propoſitionibus propoſita: cuius termini ſuis etiam exponentibus afficiantur, vt eam hîc repetitam cernis. Tum numeri, A minutorum

1.	60.	3600.	216000.	12960000.	777600000 &c.
0	1	2	3	4	5

minorum ſecundorum, & B maiorum tertiorum ſuis veris denominatoribus E, & F donentur. Numero autem C ex A in B, genito tribuatur denominator H: qui habetur diuiſo denominatore F tertiorum maiorum

A 12	B 8
E 3600	F 216000
C 96	
H 60	

per denominatorem E ſecundorum minorum. In primis ergo probari debet fractionis C H, denominatorem H ex diuiſione termini F per terminum E, genitum; eſſe terminum eiuſdem progreſſionis Aſtronomicæ, & quidem eum, cuius exponens eſt is, qui relinquitur; ſi ab exponente termini F diuiſi dematur exponens termini E diuidentis. Probatur vtrumque. Nam cum E diuidat F, & producat H eadem erit ratio termini F diuiſi, ad terminum E diuiſorem: quæ eſt quotientis H, ad vnitatem. Per Prop. 40. lib. 1. Et permutando ita erit F ad H; vt E ad vnitatem. Sed in Progreſſione Aſtronomica; quæ ab vnitate incipit; vt progreſſionis terminus E ad vnitatem, ſiue terminum eiuſdem progreſſionis primum; ita eſt terminus F maior termino E ex hypotheſi, ad alium terminum eiuſdem progreſſionis. Ergo terminus ille, & numerus H ſunt æquales per Prop. 9. lib. 5. Elem. hoc eſt, numerus H ex diuiſione termini F per terminum E profectus, eſt terminus progreſſionis Aſtronomicæ. Quod erat primum ſtabiliendum. Secundum autem, quod ſcilicet ſubducto exponente termini E ab exponente termini F relinquatur exponens ipſius termini H; probatur. Nam, vt paulò ante memoratum eſt, ita eſt per Prop. 40. lib. 1. F ad E, vt H ad vnitatem: cum ergo oſtenſus proximè ſit numerus H eſſe terminus progreſſionis Aſtronomicæ; cuius ſunt etiam termini E & F. Tot inter vnitatem, & terminum H reperiri debent termini progreſſionis; quot inter E & F conſtituuntur. Cum itaque exponentes terminorum progreſſionis cuiuſvis geometricæ, ſint Arithmeticæ progreſſionis communis numeri; quibus, quot termini ab vnitate ad quemlibet terminum progreſſionis illius numerentur, ſignificant: ſi exponens termini E, dematur ab exponente termini F. Numerus reliquus ſuis vnitatibus indicabit, quot inter ipſos E & F intercedant

termini. Ergo etiam idem reliquus numerus indicaturus est; quot termini inter vnitatem (quæ est primus progressionis terminus) & terminum

A 12	B 8
E 3600	F 216000
C 96	
H 60	

H reperiantur termini: atque adeò ille ipse numerus reliquus, est exponens termini H; cum ab vnitate (exclusâ tamen, huic enim assignatur exponens O, eò quod exponentium munus sit potiùs rationes numerare, quam rationum terminos) inchoëtur. Posito ergo, quod diuiso termino F per E generetur progressionis astronomicæ terminus H, & quod eiusdem termini H exponens sit numerus, qui sit reliquus dempto exponente diuisoris E ab exponente diuisi termini F. Constructionem problematis allatam demonstro: nimirum fractionem C H nasci ex multiplicatione fractionis A E minorum minutorum, & fractionis B F maiorum.

Demonstratio.

Ineunda ratiocinatio paulò acriorem exigit attentionem tuam. quam vt leniam, hypothesim recolo. Est itaque fractus A E minorum minutorum ducendus in fractum, vel quasi fractum B F maiorum minutorum, id est, in numerum B multiplicatum per F. At numerus F, cum diuisus fuerit per E & produxerit quotientem H, si reciprocè E ducatur in H, restituetur F. Ergo fractus A E, qui duci debet in numerum B integrum multiplicatum per F; duci etiam potest (& idem ex multiplicatione numerus producetur) in numerum B multiplicatum per H; si genitus ex hac multiplicatione multiplicetur iterùm in E. Idem enim fiet numerus, siue B multiplicetur per solum numerum F, siue multiplicetur per H, & productus per E. Fractus ergo A E ducendus proponitur in numerum B ductum in H, si genitus iterùm ducatur in E: siue ducendus est A E in numerum; qui fit ex mutua multiplicatione trium numerorum B, H, E. Huic tum numero vt in fracti formam designetur, subscribi vnitas censeri debet. Ducatur iam A E in huiusmodi numerum fracti formam indutum. Ducetur ergo A numerator in B multiplicatum per H, & rursùm multiplicatum per E tanquam in numeratorem: deinde denomitator E, ducetur in vnitatem, quæ denominatoris locum occupat numeratoris, ductis mutuò B, H, E, geniti. Ita vt, ex multiplicatione fractionis A E in fractionem B F maiorem, gignatur fractio: cuius denominator erit E: numerator verò erit numerus genitus ex numero A ducto in B (vnde fit numerus C) & ex genito, ducto in numerum H; ac tandem ex hoc genito, ducto in E. Cum ergo ex multiplicatione fracti A E minorum minutorum, in fractum B F maiorum, fiat fractus; cuius numerator producitur

ex

ex mutuò in ſe ductis numeris A, B, H, E. Denominator autem ſit numerus E, ille ipſe, qui factum ex tribus in ſe mutuò ductis numeris A, B, H multiplicat: vt fiat totus numerator fractionis: ſi denominator E diuidat numeratorem (qui ipſo maior eſt, eò quod oriatur ex ipſius E multiplicatione in numerum, quem genuêre in ſe ducti numeri A B H E) haud dubiè quotiens, futurus eſt is, qui ex tribus A, B, H generatur. Sed duo numeri A, B in ſe ducti generant C. Ergo ſi adhuc C multiplicetur per H, producetur quotienti illi æqualis numerus. Sed quotiens ille, eſt æqualis fractioni (omnis enim fractus, cuius numerator per denominatorem diuiditur; quotiens, vt patet, æqualis eſt) ergo fractio maior C H, ſiue minutorum maiorum, cuius ſenſus eſt, vt C ducatur in H; vel contrà H in C, hoc eſt, in numerum ex A ducto in B genitum; ergo, inquam, fractio maior C H, ea eſt, quæ producitur ex multiplicatione minorum minutorum A E per minuta maiora B F. Quare ſi iuxta hypotheſim exponens denominatoris E, fractionis A E minor ſit exponente denominatoris F fractionis maioris B F illo ex hoc dempto habetur exponens: cuius terminus H, erit denominator fractionis C H: numerator autem erit C, ex numeratoribus A & B in ſe ductis genitus: eáque fractio eſt hac methodo rectè inuenta. Quod erat faciendum.

PROP. LXIV. *Probl.*

Aſtronomica minuta maiora per minora multiplicare cum horum exponens illorum exponente maior eſt.

Conſtructio.

Sint multiplicanda minuta maiora B ſecunda, per minuta minora A tertia, maioris denominationis. Ducantur in ſe numeri: vt fiat C; cui tribuatur exponens 1. Primorum minorum: qui relinquitur dempto exponente 2, numeri B ab exponente 3, numeri A. Dico problemati ſatisfactum eſſe. Hæc conſtructio, vt cernis, à conſtructione præcedentis Propoſitionis non differt. Adeò vt hæc vtraque Propoſitio in vnicam coaleſcere poſſe videatur huiuſmodi. *Aſtronomica minuta diuerſi generis multiplicare.* Cuius conſtructio fiat. Si numeri A & B in ſe mutuò ducantur: & producto C tribuatur exponens, qui relinquitur dempto exponente 2 maiorũ, ab exponente 3 minorum, nempe 1 primorum minorum. Quia tamen vtriuſque demonſtratio, non eſt omninò eadem: ideo in duas Propoſitiones hanc vnicam placuit diuidere, claritatis, ſin minùs breuitatis, gratiâ.

B	12	Sec.
A	8	terr.
C	96	pri.

Præparatio.

Non alia etiam à superiore hîc opus est præparatione. Quare hîc in primis repetenda est progressio illa astronomica cum suis exponentibus. Tum data minuta tam minora A quàm maiora B : minuta etiam C suis veris & expressis per numeros denominatoribus donentur: vt hoc in sche-

1.	60.	3600.	216000.	12960000.	777600000	&c.
0	1	2	3	4	5	

A 8	B 12
E 216000	F 3600
C 96	
H 60	

matismo cernitur Constat ergo iam ex præcedenti præparatione : quod si diuidatur terminus E progressionis Astronomicæ per minorem terminum F eiusdem progressionis, quotientem H fore etiam terminum progressionis eiusdem : cuius exponens est numerus; qui relinquitur dempto exponente termini minoris F ab exponente termini maioris E demonstrandum itaque illud restat; quomodo ex multiplicatione duarum fractionum A E, B F generetur fractio C H ad minuta minora pertinens, hoc est, cuius valor ex primatur more communium minutiarum, vt si dicatur, *nonaginta sex sexagesimæ.* Siue *nonaginta sex prima minora.*

Demonstratio.

Vt ducatur fractio B F maior, in fractionem A E minorem: duci primò debet denominator F fractionis B F maioris, hoc est, maiorum minutorum, in suum numeratorem B, vt fiat nouus numerator nouæ fractionis, fractioni B F æqualis; cuius denominator est vnitas. Sensus enim fractionis B F est, vt superiùs est declaratum, vt numerator B multiplicetur per F: ex qua multiplicatione producetur numerus integer æqualis huic fractioni B F maiorum minutorum. Cui integro si subscribi censeatur vnitas formam fracti numeri induet; qui cum sit æqualis, vt dixi, fractioni B F; si fractum A E multiplicet, eundem numerum producere debet: qui producitur si idem A E per B F multiplicaretur. Cum ergo ex lege multiplicationis fractorum, numeratores mutuò; mutuò item denominatores inter se multiplicari debeãt; vt habeatur numerus, qui ex duabus illis fractionibus in se ductis generatur. Numeratores autem in se ducuntur, si A numerator ducatur in B multiplicatum per F, hoc est, vt patet, si numerator A ducatur in B, & factus multiplicetur per F. Denominatores autem

autem ducuntur in se, si denominator E ducatur in denominatorem alterius fractionis, hoc est vt monui, in vnitatem. Ergo numerus ex fractionibus A E' , B F in se ductis genitus; est qui fit ex A in B; & ex F in productum ex A in B, hoc est, qui fit ex tribus numeris A, B, F in se ductis. Et ex multiplicatione numeri E in vnitatem. Sed numerus E nascitur ex multiplicatione numeri H in F. Ergo si duo numeri A & B in se ducantur, & in genitum ducatur F, vt fiat numerator: Tum ducatur H in vnitatem & in genitum (qui est idem H) ducatur F, vt fiat denominator: erit fractio ex huiusmodi numeratore & denominatore constans, ea ipsa quæ producitur ex multiplicatione fractionis A E minorum minutorum; & fractionis B F maiorum. Ergo si tam numerator, quàm denominator illius fractionis per eundem numerum F diuidantur; cum ex diuisione fractio nascatur eiusdem cum diuisa valoris per propositionem 5 huius lib. 2. erit etiam hæc noua fractio per diuisionem nata, ea quæ producitur ex A E in B F ducta. Sed numerator, cum fiat ex A in B ducto, & in genitum ducto F; si diuidatur per F producitur numerus ex A in B factus, hoc est numerus C denominator autem, cum fiat ex H in vnitatem ducto, & in genitum H ducto F; si hic genitus diuidatur per F restituetur H. Ergo fractio C H, ea est quæ producitur ex multiplicatione A E fractionis minorum minutorum in B F fractionem maiorum. Pertinet autem hæc fractio C H ad genus fractionum minorum minutorum: eò quod ab exponente 3 termini E ad minora minuta ex suppositione pertinentis, subductus sit exponens 2 termini F, qui ad maiora minuta pertinet; & reliquus factus est exponens 1, termini H reliquus, inquam, ex minorũ minutorum exponente; qui proinde ad eadem minora minuta pertineat. Si itaque huius fractionis Astronomicæ C H numerator C afficiatur symbolico charactere vno aliquo ex iis, quos superiùs prop. 53. designaui, quem exigit exponens Termini H. Erit C. Astronomica fractio ex multiplicatione fractionis A minorum minutorum & fractionis B maiorum, quarum exponentes inæquales sunt, maiorque est minorum A, quàm maiorum B. Rectè igitur multiplicationis duarum fractionum instituta est constructio. Quod faciendum erat.

Scholium.

Hîc nonnulla ad maiorem dictorum euidentiam obseruanda occurrunt. Et quidem.

Primò. Si duo diuersi generis minuta eiusdem vtraque in suo genere

gradûs

A	12.	T.
B	8.	T.
C	96.	o.

gradùs in ſe ducantur: Exponens producti numeri ſemper futurus eſt O; qui ad gradus progreſſionis aſtronomicæ pertinet. Ecce ducis A tertia maiora in tertia minora B. Producitur C: cuius exponens eſt O. Qui naſcitur ſiue ſubducas exponentem 3 maiorum A ab exponente 3 minorum B, ſiue è contrà: iuxta duas proximas propoſitiones 63 & 64. Subduci enim debet, cum diuerſi generis minuta in ſe ducuntur, exponens minor à maiore, vel etiam æqualis, cum ita occurrit, ab æquali: vt allatæ harum duarum propoſitionum demonſtrationes declarant.

Secundò. Cum numeri ex multiplicatione duarum fractionum geniti, numerum generant maiorem termino 60 (vt in proximo ſchemate contingit) cuius termini exponens eſt figura Arithmetica 1. Poſſe illum numerum ad aliud fractionis genus reuocari per diuiſionem eius, per numerum 60, vel ſemel, vel ſæpiùs repetitam: nunquam enim, vt ſuprà expoſui, Aſtronomicus vllus numerus aptè & propriè deſignatus maior eſſe debet numero 60, imò nec proximè minore 59. Quare ſi numerus C maior diuidatur per 60: fiet quotiens 1; & reliquus fiet 36. Quare ſi A & B fuerint minuta minora, A quidem ſecunda, & B tertia. Ex quorum multiplicatione orta ſunt C quinta minora, vt habet Propoſitio 61. Diuiſo numero G 96 per 60 fiet quotiens D Quartum vnum & quinta 36, vtique minora, vt minora ſunt ipſa A & B: ita vt ex multiplicatione A & B; ex qua naſcebatur C (quinta 96) habeatur quartum 1. quod æquiualet quintis 60, & prætcrea quinta 36 reliqua.

A 12 ſec.	C 96 quint.				
B 8 ter.	60	(D 1 ſext. 36 quint.			

At ſi A & B minùta multiplicanda, maiora ſint, vt in propoſitione 62. ex qua multiplicatione oritur C 96 minuta quinta maiora. Diuiſo numero C per 60, quotiens eſt D 1 vnum minutum ſextum & 36 quinta reliqua. Quotiens autem ille D 1 ad ſexta pertinet: eò quod in hoc genere minutorum maiorum, contrà quam fiat in minoribus minutis, quò longiùs à ſtipite progreſſionis Aſtronomicæ hoc eſt, à toto (quod eſt primus progreſſionis terminus, eiuſque exponens eſt figura O) receditur; eo maior euadit minutorum valor. Atque ita C 96 quinta æquiualent vni ſexto, & prætcrea quintis 36. Vnde colligas quid fieri debeat hoc numero C 96,

A 12 Sec.	C 96 Quint.	
B 8 Ter.	60	(D 1 Sext. 36 Quint.

propoſitionis

propositionis 63 in qua pertinet ad maiora prima: eius enim facta reductione habebitur secundum vnum maius cum primis item maioribus 36. At quia in propositione 64, numerus C pertinet ad Prima minora; per reductionem habebitur gradus vnus siue totum vnum denominationis proximè maioris, quàm sit Primorum denominatio; & præterea prima minora 36.

Tertiò tam multiplicans, quàm multiplicatus pluribus diuersis membris ad diuersa minuta Astronomica pertinentibus constantes proponi possunt. Horum quidem multiplicatio tota ex singulorum per singula membra multiplicatione hactenus traditâ euadit manifesta; si quid tamen difficultatis reliquum fiat; hoc vno paradigmate potest exhauriri. Sit ergo numerus A. ex gradibus, primis, & secundis compositus, per numerum B primis tantùm & secundis constantem multiplicandus; siue ea minuta maiora fuerint; siue minora. Vtrumque hunc numerum ita compone, vt sibi respondeant eiusdem generis membra, etsi id omnino necessariũ minimè sit; iuuat tamen operationem hic seruatus ordo.

	G.	P.	S	T	Quar.	Quin.
A	17.	48.	9.			
B	30.	12.	18			
D	—	—	306.	864.	162	
E	—	204.	576.	108		
F	510.	1440.	270			
C	510.	1644.	1152.	972.	162.	
H	535.	24.	28.	14.	42	
L	30.	32.	39.	31.	58.	2

Compositis numeris. Ducenda sunt singula membra multiplicantis B in membra singula multiplicati A. Ducetur itaque secundorum numerus 18 numeri, B, in secunda 9 numeri A. fiet autem numerus 162: cui quartorum character tribuendus est: exponens enim 2 secundorum 9 multiplicatorum additus ad exponentem 2 secundorum 18 multiplicantium, componit exponentem 4: qui debetur numero per multiplicationem producto, vt probatum est Prop. 61. Reponatur ergo numerus 162 in ordine characteris Q Quartorum. Tum rursùs eadem secunda 18 ducantur in prima 48. & productus 864, characteri T Tertiorum adscribatur; eò quod exponens 2 multiplicantis, & exponens 1, multiplicati, exponentem 3 conflent simul additi. Deinde eadem secunda 18 multiplicent gradus 17, & facto 306 tribuatur character S, secundorum. Nam exponens o graduum cum exponente 2 secundorum 18 multiplicantium efficit exponentem 2 producti. Habetur ergo series D ex multiplicatione membri vltimi secundorum 18, & membrorum om-

nium numeri A. Eodem modo ducentur numeri B prima 12 in omnia membra numeri A: productorúmque series erit E, singulis membris characteri assignatis, quem exponentes ex singulis exponentibus membrorum sese multiplicantium additis nascentes indicabunt. Eodem item, gradus 30 numeri B, seriem producet F genitorum, cuius membra suis quæque locis reponentur. His absolutis,

Hæc inter se multiplicata minuta siue maiora fuerint, siue minora, addi debent; ita vt tot additiones particulares instituantur: quot sunt ordines eiusdem denominationis: vt fiat numerus C ex huiusmodi additionibus collectus; nec refert, siue additiones ordiaris à dextra, siue à sinistra, singulæ enim per se subsistunt, nec vna dependet ab aliâ. At verò cum productus C ex multiplicatione collectus membris constet; quorum numeri excedunt, contrà quàm fieri conueniat, numerum 60. reductio fieri debebit huiusmodi numerorum singulorum ope diuisionis per 60: sed ita institutæ: vt si quidem numeri A & B multiplicati sint minura minora, reductio ineatur à dextra versus læuam: contrà verò si sint minuta maiora. Cuius discriminis ratio clara est, & ex Propositione 59. superiori ad additionem pertinente intelligi potest minuta enim maiora, quò longiùs absunt à toto (quod est gradus, eiúsque exponens est o) eo minoris sunt valoris, & per diuisionem illam per 60, ad totum accedunt, dum loco minutorum 60 remotiorum, minutum vnum tribuitur membro proximè antecedenti. Quod è contrario fieri necesse est in minutis maioribus: fit enim translatio à toto siue gradu omnium huiusmodi minutorum minimo, ad membra ab eo remotiora. Quare si minora sunt multiplicata minuta, factâ reductione habebitur tandem numerus H. Diuiso enim numeri C vltimo membro 162 per 60: quotiens est 2, & reliquus fit numerus 42, quem in eodem quartorum membro subscribo, sed quotientis numerum 2 mente retineo. Tertiis vtique postmodum addendum. Tum ad tertiorum membrum 972 accedo. Quo diuiso per 60, quotiens fit 16, ad secunda promouendus, ideoque ipsum memoriæ interim commendo: sed post diuisionem supersunt 12 tertia, quibus mente seruata illa 2 quarta addo: vt fiant 14 tertia subscribenda. Atque ita eadem methodo pergetur donec totus habeatur numerus

	G.	P.	S	T	Quar.	Quin.
A	17.	48.	9			
B	30.	12.	18			
D	—	—	306.	864.	162	
E	—	204.	576.	108		
F	510.	1440.	270			
C	510.	1644.	1152.	972.	162	
H	535.	24.	28.	14.	42	
L	30.	32.	39.	31.	58.	2.

merus H æqualis quidem numero C, ſed diuerſis ab eo numeris deſignatus. At verò quando multiplicata fuerint maiora minuta A & B, ac proinde ad maiora minuta pertineat collectus numerus C. Diuidetur primum numeri C ad læuam membrum 510 per 60. Quotiens erit 8: & ſupererunt gradus 30 (ad gradus enim pertinet diuiſus numerus 510) gradus ergo 30 ad gradus reponendi ſunt: ſed mente ſeruabitur quotiens 8 ad prima 1644 transferendus, ita vt fiant (accedente ad 1644 quotiente 8) prima 1652. Quibus diuiſis per 60. Quotiens eſt 27 ad ſecunda proueheudus: ſed relinquuntur facta diuiſione prima 32 ad prima relinquenda. Tum ad ſecunda 1152 additis illis 27 ſecundis, fiunt ſecunda 1179: quæ per 60 diuiſa exhibent tertia 19 mente ſeruanda, reliqua verò fiunt 39 ſecunda ſecundis adſcribenda. Tertia verò illa 19 cum tertiis 972 efficiunt tertia 991, factáque eius numeri diuiſione per 60, quotiens eſt 16 (qui ad quarta pertinet & memoriæ commendatur) & relinquuntur tertia 31. Tranſlatis demùm quartis 16 ſeruatis, & cum quartis 162 coniunctis fiet quattorum numerus 178: qui diuiſus exhiberet quotientem 2 quinta, factis reliquis 58 quartis. Atque ita habebitur totus numerus L minutorum maiorum: quæ producuntur ex minutis maioribus A & B. Quod paradigma fuſiùs & ſigillatim iuuit proſequi, vt ex eo quid in ſimilibus præſtari debeat, innoteſceret. Vnde etiam facile colligatur multiplicatio mutua numerorum, qui ex maioribus minoribúſque minutis componuntur: ea enim abſoluetur, ſi, & quæ hoc in ſcholio, & quæ in proximis Propoſitionibus de ſimplicibus minutis præcepta ſunt, obſeruentur.

Corollarium.

Ex Propoſitionis 61 ſuperioris demonſtratione conſtat, in progreſſione Aſtronomica (idem de quauis geometrica progreſſione cenſeto, ſed Aſtronomicam hîc tantùm verſo) duos quoſuis terminos ſeſe multiplicantes terminum eiuſdem progreſſionis generare: qui tantùm diſtat à maiore excluſiuè, quantùm ab vnitate excluſiuè diſtat terminus minor: atque adeò exponentem termini illius per multiplicationem producti conflari ex additione exponentium ſeſe multiplicantium terminorum. Contra verò ſi terminus quiſpiam maior eiuſdem progreſſionis per terminum minorem diuidatur, conſtat per Propoſitionem 63, terminum produci eiuſdemmet progreſſionis tantundem ab vnitate excluſiuè diſtantem: quantùm diuiſus maior ille terminus à termino diuidente excluſiuè diſtat. Vt ſi in hac progreſſione cum ſuis exponentibus propo-

		A	B		C
1.	60.	3600.	216000.	12960000.	777600000
0	1	2	3	4	5

sita, terminus A, cuius exponens est 2. ducatur in terminum B, cuius exponens est 3: producetur terminus C: qui tantundem à termino B maiore exclusiuè distabit: quantum minor terminus A ab vnitate (quæ est primus progressionis terminus) exclusiuè distat. Et præterea exponens 5, termini C, conflabitur ex additione exponentium 2 & 3 ad terminos A & B sese multiplicantes pertinentium. Contrà verò si terminus C diuidatur per terminum B, producetur terminus A: qui tantundem ab vnitate exclusiuè distat: quantùm à termino B exclusiuè distat terminus C diuisus. Ad hæc. Exponens 2 termini A per diuisionem producti habetur dempto exponente 3 diuisoris B ab exponente 5 diuisi termini C. Vel etiam. Si idem terminus C diuidatur per A, quotiens erit B tantundem ab vnitate exclusiuè distans: quantùm terminus C à diuisore A exclusiuè distat. Habebitur etiam exponens 3 quotientis B: si ab exponente 5 diuisi termini C, dematur exponens 2 diuisoris A.

Ratio capitis prioris ad multiplicationem pertinentis allata est Prop. 61. citatâ, quam paucis (eò quod deinceps vsui maximè futura sit hæc suppositio) repeto: & quidem quod A & B sese multiplicantes producant terminum C ad seriem progressionis pertinentem, ita fit notum. Ita est vnitas ad A, vt terminus B ad terminum progressionis æquè distantem à termino ipso B, ac vnitas distat ab A, eò quod eadem semper ratio continuetur inter terminos progressionis. Sed dum A multiplicat B, & numerum quempiam producit, ita est per Propositionem 28. lib. 1. vnitas ad A multiplicantem, vt B multiplicatus ad productum per multiplicationem. Ergo productus per multiplicationem coincidit, idémque est cum termino progressionis per Prop 9. lib. 5. Elem. qui est C. Quia verò æque distat C à B exclusiuè, vt ab vnitate exclusiuè distat A, si termini A exponens, qui scilicet suis vnitatibus indicat distantiam illam, addatur ad termini B exponentem, necessariò fiet exponens termini C, qui suis vnitatibus indicat eiusdem termini C distantiam ab vnitate. Conuersâ planè ratione demonstrabitur diuiso termino C per B, produci terminum A progressionis, eiúsque haberi exponentem, si exponens termini B dematur ab exponente diuisi termini C. Quæ tum ex citatâ Prop. 63. tum ex proximè dictis circa multiplicationem huiusmodi terminorum (quæ omnia, si conuertantur, diuisioni conueniunt) cum euadant apertissima: his fusiùs exponendis non immorabor.

PROP.

PROP. LXV. *Lemma*

Si numerum quempiam duo numeri diuidant: quotientes duo erunt duobus numeris diuidentibus reciprocè proportionales.

Expositio & demonstratio.

Numerum A diuidant duo numeri B, C: & ex diuisione A per B fiat quotiens D: at eiusdem A per C diuisione generetur quotiens E. Dico. vt est B ad C; ita esse E ad D. Nam si B multiplicet D, producet numerum A. multiplicatio enim restituit quod dissoluit diuisio. Propter eandem rationem E multiplicans C eundem numerum A producet. Cum ergo fiat idem numerus A ex B in D, & ex C in E: ita erit per Prop. 19. lib. 7 elem. B. primus ad C secundum; vt E tertius ad D quartum. Quare. Si numerum quampiam duo numeri &c. Quod erat probandum.

A 12	
B 6	C 3
D 2	E 4

Corollarium.

Hinc fit: vt si quis numerus diuidatur, vt A, per numerum B, & producat quotientem C; si reciprocè C diuidat eundem A, producat diuisorem B. Nam A diuisus per B & C, generat E & D in eadem ratione cum B & C: cum enim C ponatur æqualis quotienti D, scilicet secundus proportionalium quarto: erit etiam B primus ratio E æqualis per Prop. 14. lib. 5. elem.

A 12	
B 6	C 2
D 2	E 6

PROP. LXVI. *Probl.*

Astronomica minuta minora per minora. Item maiora per maiora diuidere: cum exponens diuisoris minor est exponente numeri diuidendi.

Constructio.

Data sint A tertia per B secunda diuidenda, siue ea fuerint maiora, si-

A 12 Tert	
B 3 Sec.	
C 4. Pri.	

ue minora; modo exponens diuisoris B, minor sit exponente diuidendi A, vt hîc habetur iuxta hypothesim propositionis. Diuidatur A per B: & quotienti C tribuatur exponens 1, siue primorum: qui relinquitur. Subducto exponente 2 diuisoris B, ab exponente 3 diuidendi A. Dico quotientem C eum esse: qui diuiso A per B gigni debet.

Demonstratio

Proponatur primo loco sæpiùs iam repetita progressio Astronomica

1	60	3600	216000.	12960000.	777600000
0	1	2	3	4	5

totius huius calculi fundamentum: ex qua eruantur veri harum fractionum A, B, C termini qui loco exponentium siue characterum substituantur. Diuisus ergo numerus A, erit fractio D E; at diuisor B, erit fractio F G. Fractio denique H L exhibebit quotientem C: quem probare oportet verum esse quotientem; qui fit diuisa fractione D E per fractionem F G. Quod ita manifestum fiet. Vt diuidatur fractio D E per fractionem F G; iuxta secundum minutias diuidendi modum Prop. 25. huius lib. 2. propositum, diuidi debet numerator D per numeratorem F, vt fiat quotientis numerator H. Similiter diuidi debet denominator E per denominatorem G, vt fiat quotientis denominator L. At diuiso termino E progressionis per terminum G; quotiens L est terminus eiusdem progressionis, cuius exponens est numerus; qui relinquitur dempto exponente diuisoris G ab exponente diuidendi E, vt corollario antecedente Propositionis 64 declaratum est. Quod locum habet, siue minuta D E, vel A (prioris schematis) & F G, vel B, maiora fuerint, siue minora, licet sensus sit diuersissimus. Quare Astronomica minuta minora per &c. Quod faciendum erat.

D	12	F	3	H	4
E	216000.	G	3600	L	60
	3		2		1

Scholium.

Obseruandum quando contingit (contingit autem frequentissimè) vt diuisio præcisa non fit; sed aliquid reliquum fiat. Vt si A diuidatur per B; facta diuisione, quotiens est C; sed reliqua fiunt 2 tertia. Quid ergo illis fieri conuenit? Haud dubium quin augendus sit numerus ille 2 tertiorum reliquus

A	14 Ter.
B	3 Sec.
C	4 Pri.

reliquus ; vt scilicet diuidi rursùs possit per eandem diuisorem B : & quidem ita est augendus ; vt eius verus denominator sit terminus aliquis Astronomicæ progressionis. Vno verbo. Reuocanda erunt illa 2 tertia in alia minuta Astronomica per multiplicationem numeri 60 progressionem Astronomicam creantis : iuxta propositionem 58. huius lib. 2. Sed alia futura est denominatio si minora minuta A per minora B diuidantur : alia si maiora diuidantur per maiora. Cuius discriminis ratio citata prop. clarè exponitur.

Supponamus ergo primò hîc agi diuisionem minutorum A minorum per B minora ; ita vt reliqua illa 2 tertia, sint minora. Si igitur multiplicentur H 2 Ter. per L 60 Pri. fient P. 120 Quar. (additis enim exponentibus minutorum H & L

H 2. ter.	P 120. quar.
L 60. pri.	B 3 sec.
P 120. quar.	R 40. sec.

fit exponens numeri P per multiplicationem producti per corollarium propositionis 64) qui numerus P æqualis est numero H , eo quod tam ipse numerus H 2 , quàm eius denominator multiplicetur per L : multiplicator enim denominator numeri H cum eius exponenti 3 additur exponens 1 , numeri L multiplicantis. Constat autem per propositionem 3 & 5 huius lib. 2. fractionem fieri æqualem , si fractionis termini per eundem numerum multiplicentur. Itaque si diuidatur numerus P , numero H æquiualens per diuisorem B : habebitur quotiens R. Ita vt diuiso numero A per B , quotiens sit C 4 pri. R. 40 sec.

At verò si fuerint minuta maiora A diuidenda per maiora B : quotiens erit C ; & reliqua fient H 2 tertia. Quæ vt diuidi possint per B : multiplicabuntur per L , vt fiant P 120 secunda. Quæ secundorum denominatio habetur dempto exponente fractionis L ab exponente fractionis H. Vt enim fractio P æqualis sit fractioni H : quâ ratione augetur numerus H , dum multiplicatur per progressionis terminum L ; eadem minui debet eius denominator qui ad tertia pertinet ; id est, denominator numeri H diuidi debet , per eundem terminum L. Quæ diuisio absoluitur ; si ab exponente 3 numeri H dematur exponens 1 , numeri L : & ita relinquetur exponens 2 numeri P. Quod vt clarissimè proponatur. Exprimantur veris suis numeris minuta

A 14. Ter.	H 2. Ter.	P 120. Sec.
B 3. Sec.	L 60. Pri.	B 3. Sec.
C 4. Pri.	P 120. Sec.	R 40. 0.

H 1		P 120
——	L 60	——
Q 216000	1	X 3600
3		2

nuta hæc. Cernis igitur, si L multiplicet H; vt fiat P: & si idem L diuidat Q, vt fiat X. Fractiones has H Q, P X maiorum minutorum æquales esse. Cum enim L multiplicans H generet P: ita erit per Prop. 28. lib. 1. H ad P, vt vnitas ad L Item, cum L diuidens Q generet X: ita erit X ad Q, vt vnitas ad L per Prop. 40. lib. 1. Ergo ita est H ad P; vt X ad Q per Prop. 11. lib. 5. Elem. Ergo per Prop. 19. lib. 7. elem. idem fit numerus ex H ducto in Q; & ex P ducto in X. Ergo per definitionem huius generis minutorum maiorum propositione 52. expositam, æquales sunt fractiones H Q, P X. Iam loco terminorum Q, L X, sumito eorum exponentes 3, 1, 2. Quia ergo exponens 1 demitur ab exponente 3, & reliquus fit exponens 2. perinde est ac si diuidatur Q per L, vt fiat X iuxta coroll. Propositionis 64. superioris.

A 14. Ter.	H 1. Ter.	P 120. Sec.
B 3. Sec.	L 60. pri.	B 3. Sec.
——	——	——
C 4. Pri.	P. 120. Sec.	R 40. o.

Quibus stabilitis. Si diuidatur P per B, fiet fractio R. Cuius exponens est figura o. Si enim exponens 2 ad diuidentem B spectans dematur ab exponente 2, fractionis diuisæ P; remanet o exponens quotientis R. qui exponens in Astronomica progressione debetur termino primo, hoc est, ad totum, siue ad gradus. Diuisâ ergo fractione A tertiorum maiorum per fractionem B secundorum item maiorum; fiet quotiens compositus C 4 Pri. R. 40. o. nempe *Quatuor primorum maiorum & quadraginta graduum.* Hic nequid difficultatis reticeam, iure quæras. Quid si post diuisionem P per B, & inuento quotiente R ad terminum primum progressionis, hoc est, ad omnium minutorum maiorum minimum pertinente aliquid adhuc reliquum fieret: quid de eo reliquo agendum? haud dubium, quin ad minuta minora transmigraret, vt pote gradus vnius pars aliqua. Sed quomodo transitus huiusmodi præstari debeat, ex sequentibus notius fiet: vbi quæstionis huius eiusque solutionis meminero, ad proximum scilicet scholium: cuius fundamentum hæc esto propositio.

PROP.

PROP. LXVII. *Probl.*

Data minuta maiora minoris denominationis, siue exponentis; per maioris exponentis maiora minuta diuidere.

Constructio & Demonstratio.

Data sint minuta maiora secunda A diuidenda per minuta item maiora tertia B; sit nimirum diuisoris huius exponens 3, maior diuidendi exponente 2. Reducatur diuisor B ad denominationem diuidendi A per

A 12	Sec.	A 12	Sec.	D 12. 0.	F 4	vel 4′. vel 4 pri.
B 3	Ter.	C 180	Sec.	E 180. 0.	G 60	

Prop. 28. num. 3. reductus autem sit C. Per quem, si diuidatur A, fiet fractio vulgaris D E vnius totius; cuius exponens est nota o. Si enim ab exponente 2, fractionis A diuidendæ, dematur exponens 2 fractionis C diuidentis; vt exigit methodus diuisionis tradita, remanebit quotientis D E (hîc enim quotiens est) exponens o. Vnde hîc quotiens ad primum progressionis terminum, qui est totum, siue gradus, quique exponentem sibi vendicat notam o, pertinebit. Est ergo quotiens D E diuisionis maiorum minutorum secundorum A, per maiora minuta tertia B, fractus vnius gradus numerus, atque adeò toto vno gradu minor. Quare si hæc fractio, D E quæ vulgaris est, ad Astronomicam reducatur. Id est. Si reducatur ad fractionem æqualem; cuius denominator sit terminus aliquis progressionis Astronomicæ, vt hîc est terminus G 60. habebitur fractio F G Astronomica, ad minuta minora prima pertinens. Quæ hoc modo 4′, vel hoc alio, 4 pri. vt habet schema, vel, si cui placuerit alio quouis designabitur.

Huius porrò constructionis demonstratio tota ex ipsius contextu clara est. Vt verè solutum problema hoc dici queat.

Scholium.

Hinc iam intelligatur solutio quæstionis ad calcem scholij Propositione præcedente allatæ. Quid scilicet præstandum sit: quando facta diui-

ſione minutorum maiorum per minuta etiam maiora eò deuenit quotientis exponens, vt ſit nota o; quæ primo progreſſionis termino aſſignatur, & tamen aliquid poſt diuiſionem, quæ præciſa non ſit, reliquum ſupereſt. Reſpondeo enim aliud præſtandum nihil, quàm quod hac Propoſitione præſtitum eſt: reducetur ſcilicet reliquum illud ad minuta minora; non ſecùs quàm hîc duo numeri A, B diuidendus, & diuiſor, ſiue diuiſionis quotiens. (Subſcripto enim diuiſore ipſi diuidendo numero, abſoluta diuiſio cenſeri ſolet; cuius quotiens ſit ita conſtituta fractio) reductus eſt primùm in communem fractionem D E, toto, vt patet, minorem ſuo: quæ in Aſtronomicam F G minutorum minorum conuerſa eſt. Quæ ratio ſemper neceſſariò obſeruanda erit. Quoties numerus diuidendus, eſto pertineat ad minuta maiora, minor erit diuiſore ſuo. Omnis enim fractio, quæ vnitate, ſiue toto ſuo minor eſt, non poteſt per fractionem Aſtronomicam exprimi, quæ non ſit minutorum minorum: cum id ita exigat eius quantitas.

PROP. LXVIII. *Probl.*

Data minuta minora minoris denominationis, ſiue exponentis, per minuta item minora, ſed maioris exponentis diuidere.

Conſtructio & Demonſtratio.

Propoſitione 66 diuiſa ſunt minuta minora per minuta item minora; cum horum exponens, illorum exponente minor eſt; vt ſcilicet abſoluta numerorum quibus minuta conſtant, diuiſione; poſſit diuiſoris exponens ab exponente diuidendi ſubtrahi, & exponens reliquus quotienti tribui; vt tribui debere ibidem demonſtratum eſt. At ſi diuiſoris exponens maior fuerit: aliquid plus præſtandum venit, non ſecùs ac Propoſitione antecedente circa minuta maiora paris conditionis præſtitum eſt. Quod quomodo abſoluatur, eſt declarandum.

Sit data fractio A ad ſecunda pertinens minora, per fractionem B ad tertia pertinentem, diuidenda. Reducatur diuidenda fractio A ſecundorum, ad exponentem diuiſoris B, ſiue denominationem tertiorum iuxta methodum Propoſitione 58 num. 1. traditam.

A 12 ſec.	C 720. ter.	D 240. o
B 3 ter.	B 3. ter.	

Reducta erit C, quâ diuiſâ per B, fiet quotiens D: cuius exponens eſt nota o ad primum progreſſionis terminum pertinens. Nam exponens 3 diuiſoris B ſubductus ab exponente 3 diuidendi C nihil niſi o reliquum facit pro quotientis D exponente: ita vt D ſit integer numerus, & ad gradus pertineat.

Quod

C 722 ter. B 3 ter.	D 240. o.	E 2 ter. F 120 quar. B 3 ter. B 3 ter.	G 40 pri.

Quod ſi numerus C præciſè per numerũ B diuidi non poſſet: vt hîc habetur. Diuiſo enim C per B, quotiens eſt D & ſupereſt E ad tertia pertinens. Reducantur tertia E 2 ad quarta F 120; multiplicato numero E per 60. Tum hæc quarta F diuidantur per tertia B quotiens erit G ad prima pertinens minora: Diuiſoris enim B, exponente 3 dempto ab exponente 4 diuiſi F, reliquus fit exponens 1, quotientis G. Diuiſo ergo C per B quotiens eſt D 240. o. G 40. pri. Demonſtratio allata eſt inter conſtruendum. Ergo data minuta &c. Quod erat faciendum.

PROP. LXIX. *Probl.*

Minuta maiora per minora, vel contrà, minora per maiora diuidere.

Conſtructio

Inſtituatur numerorum diuiſio: & quotienti tribuatur exponens conflatus ex additione amborum exponentium ad numeros pertinentium: huius autem exponentis denominatio ſit ipſa numeri diuidendi denominatio. Dico factum eſſe quod proponitur. Exemplum eſto huiuſmodi.

A 12 Pri.	
B 4 Sec.	C 3 Ter.

Sint A maiora duodecim prima diuidenda per B quatuor minora ſecunda. Factâ numeri A diuiſione per diuiſorem B, quotiens eſt numerus C: cui exponens tribuendus eſt ex duobus numerorum exponentibus 1 & 2 additis conflatus, nimirum 3: qui denominationem maiorum minutorum ad diuidendum numerum A pertinentem ſibi vendicat: Ita vt quotientis C valor ſit, tria tertia maiora. Contrà verò. Si diuidendus A ad minora minuta pertineret; diuiſor autem B ad maiora: factâ numeri A per B diuiſione; quotienti C conueniret exponens 3 eodem modo ex additione 1 & 2 exponentium numerorum A & B genitus cum minorum (ad quod genus, diuidendus A pertinet) denominatione. Atque ita diuiſis A duodecim minutis primis minoribus, per B quatuor minuta ſecunda maiora: quotiens foret C tria minuta tertia minora.

Præparatio in priorem partem propositionis.

Hîc præ oculis habeto progressionem Astronomicam cum suis exponentibus: vt propositi numeri superiores characteribus expressi, veris ipsis suis terminis exhiberi possint. Si ergo minuta maiora A 12 prima (qui est casus prior) diuidenda veris numeris designentur: fiet fractio A D maior, id est, iuxta sensum huius generis fractionum, fiet numerus integer ex multiplicatione A & D mutuâ productus, qui est E, siue fractio E F. At numerus diuisor B 4. sec. quatuor secunda minora, exprimetur per veram fractionem B H. Quotiens denique C. 3. T. *tria tertia maiora* mutabitur. Primò in fractionem maiorem C G, ac deinde hæc fractio C G mutabitur in integrum numerum L, ductis in se mutuò numeris C & G. Probandum itaque est. Si diuidatur fractio E F per fractionem B H quotientem fore integrum numerum L.

1. 60.	3600.	216000 &c.
0. 1.	2.	3
A 12 P.	B 4 sec.	C 3.T.
A 12	B 4	C 3
D 60	H 3600	G 216000
E 720		L 648000
F 1		

Demonstratio.

Duplex huius casus afferri potest demonstratio, à priori & à posteriori. A posteriori quidem, & ab effectu: si fractione E F diuisâ per fractionem B H iuxta fractorum numerorum traditam diuisionem Prop. 25. Quotiens fiat L. Quod quidem verum esse deprehendetur; si ipsæ, operationes necessariæ instituantur. Et quidem si iuxta priorem modum diuisionis citatâ Propositione traditum ineatur diuisio: ducetur diuisoris B H denominator H in fractionis E F numeratorem E: & fiet quotientis futuri numerator 2592000: cuius denominator fiet ducto B 4 in F 1, eritque 4. Minor numeratore 2592000 hoc ergo diuiso per 4. Quotiens reuerà fit L 648000 quod cum contingat quibuslibet propositis numeris eandem hypothesim obseruantes; argumento est rectè traditâ methodo diuisionem

nem maiorum quorumlibet minutorum per minuta minora inſtitui. At ſi à priori operationis huius veritas deſideretur: ea repetetur ex Propoſitione 63. ſuperiori, eritque huiuſmodi.

Cum prima duodecim maiora A 12. P. diuidantur per B 4. ſec. quatuor ſecunda minorà) & produci aſſeratur quotiens C 3. T. tria tertia maiora. Si contrariâ operatione, quotiens C ducatur in diuiſorem B. reſtitui debet diuiſus numerus A. His enim in numeris non ſecùs ac in reliquis multiplicatio & diuiſio ſibi opponuntur, illud autem verum eſt.

A 12· P.
———
B 4 Sec. | C 3. T.

Nam cum B & C ſeſe multiplicantes diuerſi ſint generis(ille enim ad minora hîc ad maiora minuta pertinere ſupponitur) multiplicatio eorum abſoluetur per Prop. 63. Si ductis numeris B 4, & C 3; vt fiat numerus A 12; huic producto A tribuatur character P; ſiue exponens 1: qui relinquitur ſubducto exponente 2 numeri B, ab exponente 3 maiore, numeri alterius C; & reliquo exponente 1 (qui vtique ad maiora minuta nempe ad minuta C pertinet) aſſignato, numero A ex multiplicatione numerorum B &, C genito. Quod in citata propoſitione à priori ita fieri debere probatum eſt. Ergo hæc etiam diuiſionis ratio à priori probatur: pendet enim à ratione multiplicationis à priori demonſtrata. Quamquam poſſet diuiſio hæc immediatè, ſicut multiplicatio à priori demonſtrari: ſed longiori, quam clariori ratiocinatione. Hîc ergo primus diuiſionis caſus ſtatutus eſto. Sed non minùs eſt certus ſecundus. Cum ſcilicet minuta minora per maiora diuidenda ſunt.

Præparatio in ſecundam partem.

In ſecunda parte propoſitionis diuidenda erant A 12 pri. duodecim minora minuta prima per B 4. Sec. Quatuor maiora ſecunda: vnde ortum dixi quotientem C 3 ter. Tria minora tertia. Reducantur hi omnes termini characteribus deſignati in ipſos veros numeros. Erit diuidendus A,

A 12 Pri.	B 4 Sec.	C 3 ter.
A 12	B 4	C 3
D 60	H 3600	G 216000
	E 14400	K 12
	F 1	L 864000

fractio A D communis. Diuisor B, fractio maior B H; hoc est, ducto B in H, vt earum fractionum fert natura; erit integer E siue fractio E F: quotiens denique C, erit fractio communis C G. Probandum ergo est fractionem communem C G verum esse quotientem, si fractio A D diuidatur per fractionem E F.

Demonstratio.

Diuide A D per fractionem E F, iuxta priorem minutias diuidendi modum prop. 25. lib. 2. traditum. Duc scilicet denominatorem F 1 in numeratorem A 12, vt fiat K 12 numerator quotientis. Cuius denominator erit numerus L 864000, ex numeratore E 14400 diuisoris, in denominatorem D 60 diuidendi ducto genitus. Si ergo fractio hæc K L, quæ communis est, in fractionem Astronomicam reducatur per Prop. 21. id est, in fractionem, cuius denominator sit terminus aliquis progressionis Astronomicæ, ea erit fractio C G. Minorum minutorũ: quæ æqualis est fractioni Astronomicæ C 3. ter. Quod si eiusdem solutionis ratio à priori exigatur, planior afferri non potest, quàm quæ in præcedenti casu similis adducta est. Constat à priori per Propositionem 63 fractionem A gigni si ducatur B in C. Ergo è contrario constat à priori: si diuidatur A per B quotientem C generari. Notum siquidem est à priori multiplicationem, & diuisionem sibi mutuò & reciprocè semper respondere. Quod ex earum definitionibus manifestum est. Minuta ergo maiora per minora &c. Quod erat faciendum.

Scholium.

Quædam ad variarum difficultatum, quæ occurrent non rarò, solutionem obseruanda sunt hîc paulò accuratius, vel ex dictis colligenda.

Ac in primis quando diuisio institui nequit, aut nequit omnino præcisa, & adæquata; eò quod eâ absoluta supersit reliquum quidpiam: tunc reliquum illud ad speciem minoris valoris reducendum erit iuxta propositionem 58. eique appositam determinationem: vt scilicet fiat numerus diuidendus

diuidendus diuisore maior, adeóque ad diuisionem aptus. Exemplum esto. Diuidenda sunt minuta maiora prima A per minuta minora secunda B. Quotiens est C. Tria maiora tertia: quæ habentur iuxta proximam propositionem, si duo exponentes 1 & 2 simul addantur: reliqua autem fiunt duo prima D maiora. Hæc reduci poterunt ad proximè minorem speciem scilicet ad gradus per citatam propositionem 58. Si nimirum multiplicetur D per 60. vt fiat F: cui tribuatur exponens 0 ad progressionis terminum graduum pertinens; qui habetur subducto exponente 1 multiplicantis termini 60, ab exponente 1 numeri D 2 primorum maiorum. Iam si diuidatur F per B habebitur quotiens G 30 secundorum maiorum. Maiorum, inquam, minutorum. Nam exponens 2. Diuisoris B secundorum minorum addi debet ad exponentem 0 diuidendi F: eiusque genus retinere maiorum vtique minutorum. Iuxta hîc tradita præcepta. Ita vt diuiso A per B, quotiens sit C tria tertia maiora, cum G triginta secundis maioribus. Hinc cernas quid tum agendum fuerit: quando solus numerus D 2 diuidendus proponeretur per diuisorem B maiorem diuersi generis minutorum.

A 14 Pri.	
	C 3 T
B 4 sec.	
D 2 Pri.	
F 120.0	
	G 30.Sec.
B 4 sec.	

Quod si gradus, siue totum, cuius exponens est figura 0, diuidendum foret per numerum maiorem ad minora minuta pertinentem, vt ad secunda; isque diuisor diuidendo maior existeret. Vt si A 3. 0. diuidi deberet per B 4. Sec. Tunc reuocandus foret A ad minuta prima minora per Própositionem 58. eáque forent C. Quibus diuisis per B 4. sec. etiam minora; quotiens haberetur iuxta propositionem 69. D 45. P. Quadraginta quinque minuta maiora prima: quæ habentur dēpto exponente 1 numeri diuidendi C ab exponente 2 diuisoris B. & mutato genere minutorum minorum in genus maiorum.

A 3. 0.
B 4. sec,
C 180. pri.
D 45. Pri.

Secundo. Obseruabis quomodo diuisio iniri debeat: cum numerus diuidendus simplex minimè est, sed pluribus membris constat; simplex tamen est diuisor. Tunc enim singulorum membrorum diuisio instituetur per eundem diuisorem vnde quotiens nascetur. Ex pluribus etiam membris compositus. Ecce diuidi debet A duodecim prima maiora, & tres gradus, per B quatuor secunda minora. Quotiens erit C tria tertia maiora cum quadraginta quinque primis item maioribus. Quod si diuidendus foret A 14. P. cum tribus gradibus, vt habet alterum hoc schema, per eundem diuisorem B. diuisis primis -

A 12. P : 3. 0
B 4. sec.
C 3. T. 45. P.

A 14 P : 3. 0
~~~~~~(C 3. T
B 4 sec.

Q 123. 0
~~~~~~(D 30. S.
B 4 sec.

E 180. p.
~~~~~~(45. P
B 4. sec.
G 3. T. 30. S. 45. P

primis A 14. Quotiens quidem est G 3. T. sed reliqua fiunt 2 prima; quæ conuerti debent in gradus 120 per propositionem 58. His autem gradibus addentur tres illi gradus quos præter prima 14 continet idem numerus A; vt fiat totus diuidendus numerus Q graduum 123, per B 4. sec Quâ diuisione habetur quotiens D 30. S triginta maiora secunda (addito enim exponente 2 diuisoris B ad exponentem o diuidendi Q fit exponens 2 ad genus pertinens diuidendi Q sed reliqui fiunt gradus 3. Hi ergo rursùs per 60 multiplicari reducentur ad prima minora E 180. p. ex quorum diuisione, quæ præcisa est, nascitur quotiens 45. P. quadraginta quinque prima maiora. ergo ex diuisione numeri A compositi ex primis maioribus, & gradibus nascitur quotiens integer G 3. T : 30. S: 45. P. Ex quo paradigmate colligas facilè quid in reliquis similibus numeris diuidendis præstari debeat.

Tertiò. Obserua in diuidendis huiusmodi numeris compositis, de quibus proximè actum est, ita diuisionem iniri posse: vt primo loco ex membris diuersis numeri diuidendi vnicus fiat numerus simplex reductis per propositionem 58. membris omnibus in denominationem membri vltimi siue minimi valoris. Vt superior diuidendus numerus A primis 14

A 14. P : 3. 0
D 843. o.
~~~~~~(C 210.S.
B 4 sec.
E 180. p.
~~~~~~(F 45. P.
B 4. sec.

C 210
~~~~~~(3. T. 30 S
60
3. T : 30. S : 45. P

maioribus, & gradibus 3 constans in vnicum simplicem numerum cogetur; reductis primis illis 14 ad gradus 840: quibus si addantur gradus 3. fiet vnicus simplex numerus D 843 graduum, diuidendus per B 4. sec. ex qua diuisione nascetur quotiens C 210 secundorum maiorum iuxta tradita præcepta, & reliqui fient gradus 3. Qui reducentur ad prima minora E 180. p. Quibus diuisis per B, quotiens erit F 45. P. Quadraginta quinque prima maiora. Quod si prior quotiens C 210. S. Iam inuentus reducatur ad minuta maioris valoris, nempe tertia; eius facta diuisione per 60: habebuntur 3. T. tria tertia maiora & reliqua fient. 30 secunda maiora. Diuiso ergo numero A composito, per B: quotiens erit 3. T : 30. S : 45. P qui priùs inuentus fuerat.

Quartò. Si diuisor non vnus simplex numerus sed ex pluribus membris compositus fuerit: tunc reducendus erit ad simplicem numerum, vt diuisio

diuisio institui possit, siue diuidendus simplex fuerit, siue etiam ipse compositus. Vt si numerus A. Quatuordecim prima maiora cum gradibus tribus diuidi debeant per compositum diuisorem B. Reducentur omnia eius membra ad vltimi membri 45 P denominationem, ad prima scilicet maiora: eritque tunc diuisor, numerus C 12645. P. per quem diuidi debet numerus A; quem etiam expedit ad simplicem numerum reuocare, reductis 14 primis maioribus ad gradus 840: quibus si addantur gradus 3. fiet totus diuidendus numerus 843. 0. Cum autem hîc numerus 843 gradus, minor sit diuisore C, reducendus adhuc erit ad prima minuta minora D 50580. p. Hic iam numerus cum maior existat, quam diuisor C. (Si enim post hanc reductionem necdum maior foret, alia adhuc reductio iniretur) diuidetur D per C: eiúsque diuisionis quotiens erit E 4. sec. quatuor secunda minora. Vt par est. Nam diuiso numero A per E 4 sec. (hîc fuit diuisor num. 3. proximo) quotiens est B. Ergo per coroll. propositionis 65. Eodem numero A diuiso per B quotiens esse debet hîc numerus E inuentus. Atque ita quicumque numerus diuisor proponatur, methodus habetur diuisionis absoluendæ.

A 14. P: 3. 0
B 3. T: 30. S: 45. P.
C 12645. P.
D 50580. p.
C 12645. P.
E 4. sec.

Corollarium insigne.

Insigne sanè & per illustre est hoc, quod hîc expono, corollarium. deduco enim ea omnia, quæ hactenus non tantum de Astronomicis, sed etiam de decadicis minutis tradita sunt, ita ipsis in specie singulari conuenire: vt iure non minori minutis conueniant quibuscumque: quæ ex qualibet geometrica progressione; cuius scilicet termini quamlibet inter se rationem obseruent, sunt oriunda. Vnde cuipiam fortasse videatur disciplinas tractandi rectam methodum, quæ vniuersalia ex quibus singularia pendent præmitti iubet, minùs bene à me obseruatam: qui ad duas tantum minutorum species ea contraxerim, quæ ad omnes extendi possent. Verùm meum hoc institutum vix improbet quisquis attendat, & demonstrationes à me allatas vniuersales esse; & ad singularia duplicis huius minutorum speciei paradigmata applicari debuisse: ad Astronomica quidem, quia eorum singularis cognitio rebus Astronomicis maximè necessaria est, vt pote singularis ab authoribus perstricta potius quàm ex fundamentis explanata: ad decadica verò, quia vtilissima cum sit, leuiter tamen, & ieiuniùs quàm huius facultatis dignitas ferat, hactenùs tradita videbatur. Ne quid tamen huic tractationi deesset, hoc cauetur amplissimo perpaucis proposito corollario.

Extende ab vnitate initam progreſſionem per quamlibet datam rationem cuius denominator eſt ſecundus progreſſionis terminus vnitatem (qui primus eſt terminus) connotans vt lib. 1. Prop. 2. examinis quadraturæ circuli docui. Vt ſi progreſſionem componas: cuius termini rationem ſeruent duodecuplam, ſiue quam habet 12 ad 1. ſingulíſque adſcribas exponentes ſuos: in quorum deinde locum characteres ſufficiantur, vt ſuperiùs explicatum eſt: quæ eſt hoc ſchemate deſignata : eadem vti licebit, iiſ-

1.	12.	144.	1728.	20736. &c.
0.	1.	2.	3.	4.
o	P	S	T	Q

démque operationibus, quibus Aſtronomicâ vel decadica vti licet ad quaſlibet numeratorum rationes ſubducendas tam maiorum vnitate, quàm eadem minorum; adhibitis tam maioribus quam minoribus minutis. Nullam tamen progreſſionem vel facilitate, vel breuitate, vel claritate cum decadica componendam aliquando deprehenſurus es.

Finis libri ſecundi Inſtitutionum Arithmeticarum.

LIBER

LIBER TERTIVS

DE RADICVM E' NVMERIS extractione.

ARGVMENTVM.

NON in postremis habita fuit vnquam illa Arithmeticæ pars; quæ in radicum è numeris extractione versatur. Nec immeritò; cum difficiliora quæque circa numeros problemata non nisi eius ope, vt neminem latet, qui tractandis numeris delectetur, explicari soluíque possint. Est autem quædam quasi species diuisionis: per eam siquidem numeri diuiduntur; sed nullo dato diuisore numero, ita vt non antè diuisorem quàm quotientem ex eius generis diuisione ortum nosse queas: nec mirum cum vnus idémque sit diuisor, quotiénsque numerus. Vnde iam colligas difficultate carere non posse huiusmodi Arithmeticam artem. Si enim diuisio simplex præ simplicibus reliquis operationibus visa semper fuit difficilis, etsi datus notúsque sit, per quem iniri debet, diuisor; quid eo ignoto fore censendum est? Tum præsertim cum radix proponetur erüenda è remotiore ab ipsa gradu. Verùm, quidquid hoc in opere occurrat difficultatis ita me spero excussurum; vt negotij plus hic quàm in vulgaribus quatuor primis logisticæ Elementis nemo sit experturus. Cuius fidem vt præstem accuratiùs moneo inter cæteras numerorum radices, earum præcipuè rationem haberi, quas quadratas vocamus, & cubicas, tum quia occurrunt frequentiùs; tum quia reliquæ in eas vt plurimùm resoluuntur: tum etiam quia rationem quandam obseruant geometricam, & cum continua quantitate symbolizationem; quæ præ cæteris (quæ ea carent) eas commendat, & peculiarem, quâ de-

monſtrentur, methodum ſubminiſtrat. Itaque cum extractionis modum, qui duplici huic ſpeciei proprius eſt, exponam primò: tum vniuerſalem, quæ & his & cæteris conuenit, rationem tradam, cuilibet cumulatè ſatisfacturam.

PROP. I. *Definitio.*

Numeri cuiuſvis, potentiæ, ſiue poteſtates, ſunt numeri; qui ex eo, vel ſemel, vel ſæpiùs in ſe ducto generantur, ductus autem numerus, poteſtatum radix dicitur, ſiue latus.

Expoſitio.

Si proponatur numerus A 5 qui in ſeipſum ſemel ducatur, vt fiat B: erit B potentia numeri A. Quod ſi rurſùs idem A ducatur in proximè genitum B, vt fiat C: erit etiam hîc numerus C, eiuſdem numeri A potentia: ſicut & cæteri continua illâ multiplicatione producti numeri in infinitum, dicentur ſemper primi illius numeri A poteſtates. Ipſe verò eorum omnium, & ſingulorum, radix, ſiue latus vocari conſueuit; radix, quia ex eo poteſtates ſoboleſcunt: latus, quia numeri ex ea multiplicatione producti figuras geometricas imitantur, quarum latera hoc numero, vt declarabitur, determinantur. Porrò ſingulis huiuſmodi poteſtatibus impoſita ſunt varia nomina: quorum ecce aliquot, omnium inſtar.

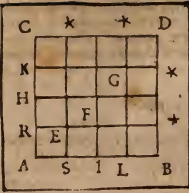
A 5 B 25 C 125 &c.

PROP. II. *Defin.*

Quadratus numerus, eſt planus numerus ſub radice contentus.

Expoſitio.

Vt in quantitate continua quadratum dicitur plana figura parallelogramma contenta ſub æqualibus lateribus ad angulum rectum commiſſis. Ita in diſcretâ ſi numerus quilibet in ſeipſum ducatur, fiet numerus planus vt lib. 1. Prop. 29. declaratum eſt: ſed planus, cuius latera ſint



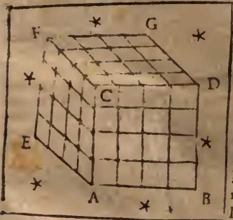
sint æqualia. Qualis exhibetur diagrammate apposito : cuius duo latera A B, A C quatuor lineolis, quatuor vnitates designantibus constantia, æqualia sunt, & quadratum figuram continent A D quadratulis 16 distinctam qui numerus ductâ radice A B 4 in numerum A C æqualem, siue in seipsam, generatur; ideóque radicis A B quadratus iure dicitur. Aliò spectant characteres reliqui huius figuræ.

PROP. III. *Defin.*

Cubus numerus, numerus est solidus ex radice in quadratum suum ductâ procreatus.

Expositio.

Omnis solidus numerus ex tribus numeris in se ductis generari debet, vt Prop. 30. lib. 1. definitum est. At si tres illos numeros æquales esse contigerit : tunc solidi species producitur, qui cubus propriè dicitur; eum omninò in modum ; quo cubus nuncupatur figura illa geometrica : cuius tria latera sunt æqualia, sibíque ad punctum vnum perpendiculariter connectuntur, & per ea plana tria quadrata expanduntur; sub quibus (tria enim illis opposita sunt æqualia) solidum illud contineri dicitur. Talis est figura solida A G, tribus planis quadratis C B, C E, C G æqualibus. Contenta quæ à lineis tribus C A, C D, C F æqualibus ad angulum C perpendiculariter commissis constituuntur.



Huius ergo duo latera C A, C D æqualia in partes æquales, verbi gratiâ, quatuor diuisa, si in se ducantur, fiet quadratus numerus C B 16. In

quem si ducatur tertium latus C F prioribus æquale, fiet, vt Prop. citatâ lib. 1. declaratum est, solidus numerus F B, cubis 64 minoribus constans, qui totum cubum F B complent. Patet igitur quomodo numerus ille, qui ex radice C F in ipsiusmet radicis quadratum C D ductâ generatur, cubus rectè nuncupetur.

PROP. IV. *probl.*

Radicis cuiusvis potestates cubo maiores exhibere: denominare: & in grâdus suos referre.

Expositio.

Mens fatigetur incassum, vt figuram quampiam regularem sibi fingat plurium, quàm cubum dimensionum. Cum enim tres tantùm quantitatis dimensiones dari possint, longitudo nimirum, latitudo & profunditas; eásque omnes complectatur cubus, tum geometricus, tum Arithmeticus: qui quartam, cum sit impossibilis, concipi possit accedere ad nouum quoddam quantitatis genus plus quàm solidæ constituendum? Verumtamen nihil obstat quin eadem radix, quæ in se ducta quadratum produxit; eíque duplicem asseruit dimensionem, latitudinem & longitudinem; & quæ rursùs ducta in quadratum, cubum generauit; donauítque profunditate; nihil, inquam, obstat quin eadem radix in cubum eodem modo ducatur; quo in quadratum ducta est, illúmque in aliud transtulit quantitatis genus; cur ergo cubum, cum par sit ratio, ad aliud perinde non transferat? Et verò vnde illæ tam crebræ, támque celebres in Algebraïcis denominationes, quadrato-quadratorum, quadrato-cuborum, supersolidorum &c. Numerorum? quorum omnium inuestigantur, & deteguntur radices, numeri scilicet, qui aliquoties continuâ multiplicatione in se ducti, ipsos producant; vnde eorum quasi latera, quibus non secùs ac quadrati, & cubi circunscribantur, & figuram quampiam effingant, censeri queant? hæc ergo vt se habeant hoc problemate exponendum est. Quod, vt patet, ei planè oppositum est, cui euoluendo diutiùs imposterum erit immorandum radicum scilicet generis cuiusvis extractioni: quæ, cum dissolutio quædam sit quantitatis, constitutæ, longè percipietur clariùs; si prius ipsa eiusdem quantitatis constitutio proponatur. Quam accipe huiusmodi.

Constructio

Constructio.

Data sit radix quælibet A 2. cuius potestates inquiruntur, vel plures deinceps, vel inter omnes, quæ infinitæ sunt, vna quædam aliqua certa.

A 2	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512	&c.
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&c.

Progressionem geometricam compone ab vnitate inchoatã: cuius terminus vnitati proximus sit data radix A 2: quam in infinitum extendere licebit per continuam vltimò productorum terminorum multiplicationem per ipsam radicem A 2 datam: qualem hîc productam licet intueri; & quales sæpiùs libro superiore propositæ sunt. In hac ergo progressione potestates omnes habes; quæ à data radice constitui natæ sunt. Nec vllus dari potest numerus; qui datæ radicis A potestas dici possit; qui scilicet ex radicis A aliquoties continuatâ multiplicatione nascatur: quin hac in serie progressionis locum quempiam occupet vt Prop. 61. lib. 2. demonstratum est. Habes ergo datæ radicis potestates omnes cubo maiores. Quod primo loco faciendum erat.

Quæritur secundò harum potestatum singularum nomen singulare. Vt huic quæstioni satisfiat; singulis terminis progressionis huius exponentes adhibe eosdem, eodémque ordine, qui superiùs terminis Astronomicæ progressionis adscripti fuêre, horum enim ope singulis terminis progressionis, siue radicis potestatibus denominationem assignare haud operosum futurum est. Ac in primis obseruandum est potestates illas, quibus exponentes obueniunt, quos numeros primos iuxta Propositionem 10. libri 1. nuncupamus, in genere dici numeros, vt quibusdam placet, surde-solidos; siue, vt alij volunt, supersolidos, & quidem, vt videtur, iure meliori: nequē enim radice carent huiusmodi potestates, vt propterea surdi numeri dici debeant; quemadmodum surdos vocamus numeros, quibus proposita radix aliqua non conuenit, ipsáque adeo surda, quòd efferri ac proinde nec audiri queat, nuncupatur: ex radice enim aliquoties in se continuè ducta, reuerà generantur, & potest aliorum numerorum more eorum radix vt suo loco patebit, educi. Propriè verò supersolidi dicentur: quia plures quàm tres dimensiones, siue radicis multiplicationes ad eos constituendos omninò sint necessariæ; contrà quam in reliquis potestatibus cubo etiam maioribus, vt statim constabit, fieri contingat, sed nominis omissa quæstione rem prosequamur. Omnes ergo potestates in quas incidunt exponentes, qui sunt numeri primi (si quadratum & cubum, quos primi numeri 2 & 3 afficiunt, exceperis) dicuntur supersolidi numeri: ea verò inter eos distinctio statuitur, vt potestas,

quam

quam primus poſt ternarium exponens primus numerus 5 afficit, ſuperſolidus primus, ſiue ſimpliciter, ſuperſolidus, dicatur: quam autem ſequens numerus primus 7 afficit, dicatur ſuperſolidus ſecundus. Tertius, cui conuenit exponens 11; cui autem numerus primus 13, quartus: & ita deinceps. His poteſtatibus, in quas incidunt exponentes numeri primi, ita denominatis; reliquæ, quarum exponentes ſunt numeri compoſiti, nomen facilè ſortientur ſuum hoc modo.

Quoniam igitur exponens termini, ſiue poteſtatis cuius denominatio quæritur, compoſitus ſupponitur; reſoluatur in partes ſuas incompoſitas ſiue numeros primos; qui ſcilicet in ſe ducti numerum datum compoſitum generant: iiſque partibus omnibus ſua cuilibet denominatio tribuatur: ea enim erit ipſa totius compoſiti exponentis, atque adeò poteſtatis tali exponente affectæ denominatio. At quomodo partes incompoſitæ, quæ in ſe ductæ datum exponentem generant, reperientur? Non alia arte quam diuiſione. Diuide datum exponentem per numerum primum primorum omnium minimum, per quem diuidi præcisè poſſit, vt, ſi numerus par eſt, per 2 ſi impar; per 3, aut per 5, aut alium quemlibet imparem tentando, donec per quempiam, ſi fieri poſſit, diuiſio præciſa occurrat (quo vſque verò, & per quos numeros diuiſiô huiuſmodi iniri debeat, habes propoſitione 19. lib. 2.) percurſis tandem diuiſionibus diuiſores cum vltimo quotiente attende: hi enim ſunt; qui datum numerum, ſi in ſe mutuò ducantur, producunt, vt patet; reſtituet enim multiplicatio, quod per diuiſionem diſſolutum eſt. Iis ergo ſingulis partibus incompoſitis debitum nomen aſſigna: erit nomen ex iis omnibus, compoſitum, ipſa dati exponentis, ſiue ab eo affectæ poteſtatis denominatio quæſita. Vt ſi terminus progreſſionis ſiue poteſtas, cuius exponens

A 24			
B 2	C 12		
	B 2	D 6	
		B 2	E 3

eſt numerus A 24. Ipſeque adeo terminus eſt vigeſimus quintus progreſſionis ab vnitate deductæ. Diuide A parem numerum per B 2; vt fiat C 12: qui iterum per B ſecetur quando quidem par eſt vt fiat D 6, ipſe etiam par; ac tertio per eundem B diuidendus: per quam tandem diuiſionem habebitur quotiens E 3 numerus primus, omniſque vlterioris diuiſionis incapax. In eo itaque ſiſtendum erit. Habes ergo tres diuiſores ſiue vnicum B 2 ter repetitum, & quotientem E 3 numerum primum. Cum ergo B 2 ſit exponens tertij termini progreſſionis, qui quadratus dicitur. Sit verò quotiens E 3 exponens termini quarti, ſiue poteſtatis cubicæ: Dic poteſtatem illam, cuius exponens datus erat A 24, quæque eſt terminus vigeſimus quintus progreſſionis, eſſe quadrato-quadrato-quadrato-cubus ter repetita denominatione quadrati propter tres

repetitâ

diuisores B 2, & cubi semel in recto propter quotientem E 3. Idem esto de reliquis potestatibus. Radicis cuiuslibet iudicium. Quare, assignata est ea, quæ singulis potestatibus debetur denominatio. Restat autem hac methodo eam rectè assignari paulò apertius declarandum: quod demonstrationis loco sit.

Demonstratio.

Propositione 28. libri. 2. superioris ostensum est inter cætera exponentium munera, quæ erga progressionum terminos, quos afficiunt, exercent: illud esse; vt ostendant quoties radix in se continua multiplicatione duci debeat; vt terminus quilibet generetur. Ita vt in allato exemplo; in quo exponens est suppositus 24. Radix in se contiuuè duci debeat vicies quater. Hîc ergo declarandum est potestatem, siue progressionis terminum vigesimum quintum; cui, vt paulò ante monui, adscribitur exponens 24. perinde generari; si iuxta traditam methodum, radicis quadratus in se ducatur, vt fiat quadrati-quadratus; tum hîc rursùs in se; vt inde nascatur quadrato-quadrato-quadratus; ac tandem hîc in se cubicè, hoc est, in se primum, ac secundo in productum. Vt tandem habeatur quadrato-quadrato-quadrato-cubus: ac si radix in se continuè ducatur vicies quater. Quod verum esse concluditur ex propositione 61. libri præcedentis. Ex ea siquidem constat, quod si quadratus numerus in se ducatur, terminum progressionis generari: cuius gradus (qui ab exponente determinatur) habetur per additionem exponentis 2 numeri multiplicantis ad exponentem 2 multiplicati, vt fiat exponens 4; quo significatur terminum productum (qui quadrati numeri quadratus est) gigni per radicis continuam multiplicationem quater repetitam. Quod si rursum hîc quadrati quadratus in se ducatur: fiet quadrati-quadrati-quadratus. Cuius exponens erit 8 ex additione exponentium 4 & 4 conflatus; qui indicat huiusmodi terminum progressionis, qui quadrato-quadrato-quadratus denominatur, generari per radicis multiplicationem octies continuè repetitam. Iam verò quia hîc terminus debet in se cubicè duci, hoc est, primò in se, deinde in productum vt fiat quadrato-quadrato-quadrato-cubus: dum in se primò ducitur; fit progressionis terminus, cuius exponens est 16, vt potè genitus ab exponente 8 ad 8 addito, & denominabitur quadrato-quadrato-quadrato-quadratus. Quod si tandem idem terminus, cuius exponens est 8, in hunc postremò genitum terminum, cuius exponens est 16, ducatur: terminus producetur, cuius exponens per citatam prop. erit 24 ex additis exponentibus 8 & 16 sese multiplicantium terminorum conflatus. Quo exponente 24 docetur terminum quem afficit, produci continua radicis multiplicatione vigesies quater repetita. Pa-

teri ergo termino progressionis, cuius exponens est 24, rectè tributam esse denominationem potestatis quadrato-quadrato-quadrato-cubicæ: quam definiunt in schemate superiori tres, diuisores B 2 vna cum vltimo quotiente E 3. Quandoquidem numerus ita denominatus producitur per radicem toties multiplicatam, quoties multiplicatur eadem radix ad terminum progressionis procreandum: vno verbo, idem vtroque modo numerus generatur: qui vt progressionis terminus est, suum sibi in eius serie debitum locum vendicat ab exponente assignatum. Vt verò tanquam potestas attenditur, à subgradualibus, vnde ascendit, denominationem haurit. Cumulatè itaque parti secundæ propositionis factum est satis. Imo & tertiæ.

Nam cum nihil aliud præstandum imponat quàm assignationem gradus progressionis; quem potestas quælibet data in progressionis serie nata est occupare huius autem gradus exponens producatur, vt ostensum est, per multiplicationem mutuam exponentium singulorum, singulas subgraduales potestates, per quas ad potestatem datam maximam ascenditur, afficientium: latere non potest gradus potestati debitus: si enim exponenti addatur vnitas; numerus habetur, qui indicat quotus sit terminus in progressionis serie, qui cum potestate identificatur; atque adeo ad quem gradum ea potestas referri debeat. Quare tandem radicis cuiusvis, potestates, & exhibuimus, & denominauimus, & in gradus suos retulimus. Quod faciendum erat.

Corollarium.

Hinc colligitur, cum potestatis alicuius radix inuestiganda proponitur, aliud nihil quæri, quàm radix progressionis cuiuspiam, in cuius serie data potestas gradum occupat, quem potestatis exponens indicat. Vt si potestatis quadrato-cubicæ radix quæratur: numerus quæritur, qui in se continuè ductus sexies datam potestatem dato numero expressam producat. Omnis enim numerus, qui quadrato-cubus supponatur, sextus & terminus progressionis, cuius radix in se ducta sexies, ipsum numerum producere debet: exponens enim 6 illius potestatis quadrato-cubicæ producitur ex multiplicatione exponentis 2, quadrati, per exponentem 3 cubi. Idem de omnibus supersolidis potestatibus: quarum exponentes sunt primi numeri: idem de reliquis compositis potestatibus censendum est.

Hinc etiam clarior sensus euadit, quo numerus dicitur quadrati quadratus, quadrati cubus &c. de quo in expositione propositionis huius actum est. Neque enim censeri debet quadratum numerum, vt talem, & vt planus est numerus, duci in alium quadratum, vel cubum, vt tales sunt; vt ex multiplicatione productus numerus denominetur quadrati quadratus

quadratus, vel quadrati cubus: id enim est, vt monui, impossibile: sed concipi tantùm debet exponentem quadrati in exponentem quadrati, aut cubi duci; & hinc nasci exponentem potestatis, quæ quadrati quadratus vel quadrati cubus dicatur: idemque sit exponens progressionis termini; qui huius capax sit denominationis, vt declaratum est paulo ante. Ita vt si numerus quispiam dicatur quadrati cubus; is ita vocetur; vt cubus sit radicis, quæ reuerâ secundum se quadratus est numerus, & quadratus denominatur denominatione extrinseca, quæ ipsis ex alio capite debetur; sed quam deponit; vt iam radicis cubi, & nomine potiatur, & munere fungatur. Vt numerus 4. quadratus est dum productus concipitur ex radicis 2 in se multiplicatione. Sed si idem numerus 4 in se tanquam radix ducatur; fiet eius quadratus numerus 16. denominabitur verò numerus hîc 16, quadrati quadratus, eò quod radicis, quæ numerus erat quadratus, quadratus sit tamẽ numeri 16 non simpliciter radix quadrata quæratur; sed radix quadrato-quadrata, ea erit 2; quam exponens 4 termini 16 progressionis, siue potestatis quadrato-quadratæ exigit in se duci quater; vt producatur is terminus, siue potestas.

PROP. V. *Theor.*

Potestatis cuiusvis compositæ nomina reciproca sunt.

Expositio.

Sensus est vt si dicatur quispiam numerus quadrati-cubus, exempli gratia, duci etiam possit cubi-quadratus. Ita vt quemadmodum potestas illa est cubus radicis, quæ quadratus est numerus, ita etiam sit quadratus radicis, quæ cubus sit numerus. Idemque est propositionis sensus, si aliæ magis compositæ potestates proponantur. Quod ita habere demonstrandum nunc est, vt propositio exigit.

Demonstratio.

Quæcunque tandem sit potestas illa composita: eius exponens generatur ductis in se exponentibus ipsam denominantes; vt ex præcedentis propositionis declaratione constat; quouis autem ordine in se ducantur hi exponentes, semper idem fiet numerus per prop. 32. lib. 1. quia verò termini progressionis, qui sunt ipsæmet variæ potestates, ad quas pertinent exponentes; si inter se ducantur etiam quouis ordine non secus, ac inter se ducti sunt exponentes, eundem numerum producunt, qui ad

eandem progreſſionem pertinebit per prop. 61. lib. 2. ad quam pertinent multiplicati termini: hinc fit, vt varias denominationes ſortiri poſſit poteſtas illa compoſita. Ecce enim conſtituatur progreſſio cuiuſvis rationis vt duplæ, cum ſuis exponentibus: in qua ſi terminus A qui quadratus

			A	C			B				
	1	2	4	8	16	32	64	128	252	512	1024
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

eſt, in ſe ducatur cubicè, vt fiat B 64: erit terminus B quadrati-cubus. Eiúſque exponens erit 6, qui fit ducto exponente 2 ad quadratam poteſtatem pertinente, in exponentem 3 poteſtatis cubicæ; quam quadratus A in ſe ductus cubicè produxit; vt patet ex propoſitione antecedente. Nunc verò ſi exponens 3, qui afficit poteſtatem cubicam, ſiue terminum C progreſſionis, qui cubus eſt; multiplicet exponentem 2 quadratæ poteſtatis A, producet exponentem 6, poteſtatis B compoſitæ, quæ reuerà erit cubi-quadratus. Vt pote genitus ex cubo C 8 in ſe quadratè ducto, non ſecus ac priùs eadem poteſtas B dicebatur quadrati-cubus, eò quod quadratus A ductus in ſe fuiſſet cubicè. Patet ergo poteſtatem compoſitam reciprocam eſſe ratione nominum: quæ ipſi conueniunt ex generatione. Nec alia foret ratio, ſi poteſtas compoſita produceretur ex pluribus quam duobus terminis in ſe mutuò ductis. Vt ſi diceretur quadrato-cubo-ſuperſolidus: eadem dici poſſet ſuperſolido-quadrato-cubus. Vel, ſuperſolido-cubo-quadratus &c. Semper enim idem exponens, 30 gignetur ex multiplicatione exponentium trium 2, 3, 5 ad quadratum, cubum & ſuperſolidum pertinentium quocunque ordine in ſe ducantur. Ergo etiam eadem poteſtas, cuius exponens eſt 30 ſemper generabitur; ſi poteſtates, quas exponentes 2, 3, 5, afficiunt, multiplicentur, iuxta ipſorum exponentium ſignificationem, quouis alioqui ordine ſeruato. Vt ſi ſuperſolidus 32, cuius exponens eſt 5; ducatur in ſe cubicè iuxta exigentiam exponentis alterius 3: tum productus quadratè ducatur, vt indicat reliquus exponens 2 ad quadratam poteſtatem pertinens: generabitur poteſtas ſuperſolido-cubo-quadrata 1073741824 cuius exponens erit 30. Eadémque ſemper fiet alio quocunque ſeruato multiplicationis ordine iuxta exigentiam exponentium. Atque ita reciproca ſemper ſunt poteſtatum compoſitarum nomina. Quod oſtendendum erat.

Corollarium.

Hinc fit, vt ſi proponatur eruenda radix alicuius compoſitæ poteſtatis, vt quadrato-cubi: poſſit radix cubica primo loco educi; deinde ex ea inuenta

inuenta radice cubicâ, radix quadrata extrahi, vel contra. Radix quadrata tum ex ea radix cubica: vtrouis enim modo ſemper habebitur eadem radix ſimplex; quæ dicetur vel cubo-Quadrata, vel quadrato-cubica. Ratio clara eſt ex ratiocinatione ad hanc Propoſitionem allata: quam apertiorem adhuc reddat, quod adiungo ſcholium.

Scholium. Hic minimè perperam obſeruaueris, non enim parùm lucis ex eo acceſſurũ eſt iis, quæ hac & præcedente Propoſitione adducta ſunt; multiplicationem & diuiſionem exponentium, terminos progreſſionis afficientium; quæ hîc adhibentur, rectè conuenire cum eorundem exponentium additione & ſubtractione; quarum ope reperitur terminus progreſſionis genitus ex duobus terminis vel in ſe ductis, vel per ſe diuiſis, vt Propoſitione 46. & 47. lib. 2. declaratum eſt. Ita vt hîc etiam verum ſit afferere additionem exponentium reſpondere multiplicationi terminorum, quos afficiunt: ſicut ſubtractionem diuiſioni. Quod quomodo contingat, cum inde alioquin poſſit quæpiam oriri confuſio, expono hac ratione, multiplicatio, & diuiſio additioni & ſubtractioni aduerſari nequaquam poteſt; cum reuerà, vt aliàs monui, vna eadémque ſit operatio multiplicationis, & additionis; vna item diuiſionis, & ſubtractionis. Quod in re noſtrâ licet obſeruare. Sit ergo progreſſio ſuperior

		A	C			B		
1	2	4	8	16	32	64	128	&c.
0	1	2	3	4	5	6	7	&c.

hîc repetita: In ea quadratus A multiplicatur cubicè, & gignitur inde quadrati-cubus B: cuius exponens eſt 6 genitus ex multiplicatione exponentium 2 & 3, ad poteſtates quadratam, & cubicam pertinentium: quod ita habere neceſſe eſt. Nam ſi terminus A in ſe ſemel tantùm ducatur, fiet terminus 16; cuius exponens 4 oritur ex additione exponentis 2, terminum A afficientis, ad ſeipſum, ex dictis ad Propoſitionem 46. lib. 2. Quod ſi rursùs terminus A ducatur in proximè genitum terminum 16, vt fiat B cubus termini A; addetur rursùs per citatam Prop. idem exponens 2 ad exponentem 4; vt fiat 6 exponens geniti cubi B. Exponens ergo termini B continet exponentem termini A ter, toties ſcilicet quot vnitates continet exponens 3 cubo debitus. At cum A ſit quadratus; quadrati autem termini exponens ſit 2 ex additione ſcilicet ad ſeipſum exponentis 1 radicem 2, vnde natus eſt A quadratus, afficientis, procreatus, ſiue etiam factus per multiplicationem eiuſdem exponentis 1 per 2, hinc euidens fit exponentem 6 termini B generati per multiplicationem exponentium 2 & 3 quadrati & cubi: qui idem generaretur; ſi radix 2, ſiue ſecundus progreſſionis terminus, ſexies continuâ multiplicatione in ſe duceretur: Tunc autem radicis exponens 1 ſibi in ſingulis multiplicationibus adderetur, ac tandem in vltima, qua producitur B; ex ea exponentis 1 additione perpetua coaceruaretur exponens 6, termini B. Nec aliter idem exponens

6 termini B naſcetur, cubica poteſtas C in ſe quadratè multiplicetur, & eius exponens 3 ſibi ipſi addatur, ſiue multiplicetur per 2: qui eſt exponens quadratæ poteſtatis. Terminus enim C, cum cubus ſupponatur, hoc eſt, terminus ex multiplicatione radicis 2 ter poſitæ, hoc modo 2, 2, 2, & in ſe ductæ; eius exponens fiet ex additione exponentis 1 radicem 2 afficientis, ter repetitâ, vt fiat 3, hoc eſt, ex multiplicato radicis 2 exponente 1 per numerum 3: qui rursùs multiplicatus per 2, vel ſibi additus exhibebit exponentem 6 poteſtatis B genitæ ductâ poteſtate cubica C quadratè, hoc eſt, in ſe ſemel. Ita vt B euadat, vt ante, poteſtas ex continua multiplicatione radicis 2 ſexies poſitæ, & ita multiplicatæ. Ex quibus confirmetur Propoſitio hæc, reciprocatio ſcilicet poteſtatis B. Eadem erit ratio, cum poteſtas compoſita erit ex pluribus, quàm duobus in ſe ductis terminis. Vt verum ſemper ſit exponentium additionem terminorum multiplicationi reſpondere; nec minùs etiam ſit verum exponentium ſubtractionem, terminorum diuiſionem comitari; ſi inuertatur ad multiplicationem allata ratiocinatio hæc, & ad diuiſionem adhibeatur. Quod non proſequor pluribus.

PROP. VI. *Theor.*

Quadratus quilibet integer numerus ex tot numeris imparibus ab vnitate ſimul additis componitur: quot vnitates radix eius continet.

Vel tot terminos Arithmeticæ progreſſionis per impares ab vnitate extenſæ continet: quot continet vnitates eius radix.

Expoſitio.

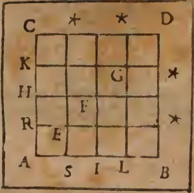
A 16. B 4
1. 3. 5. 7.

Sit quadratus A 16; cuius radix eſt B 4, quæ ſcilicet in ſe ducta ipſum producit. Dico quadratum A ex tot terminis Arithmeticæ progreſſionis per impares numeros extenſæ ab vnitate, ſimul additis coaleſcere: quot eius radix B 4 continet vnitates; nimirum ex quatuor prioribus 1. 3. 5. 7.

Præparatio.

Super rectam A B quatuor in partes æquales diuiſam (nihil clarius

quàm



quam geometrica diagrammata numericas huiuſmodi contemplationes, vt iam ſæpiùs docuit experientia, oculis ſubiicit) conſtituatur quadratum A D quod ductis per ſingula diuiſionum puncta, tam lineæ A B, quam lineæ A C ſimiliter diuiſæ, rectis lineis ad ipſas A B, A C perpendicularibus, diſtribuetur in minora 16 quadratula: quibus quadratus numerus A 16 hypotheſeos exprimetur. In hoc ergo quadrato totali A D attende varios gnomones ſeſe deinceps ambientes, quibus idem quadratum A D componitur: ſed primo loco conſidera quadratulum A E, tum gnomonem H F I, quo ambitur; deinde gnomonem K G L, priori circumiectum; ac denique C D B, & reliquos quotquot exiſterēt. Hi ſinguli gnomones exhibēt numeros omnes deinceps impares ab vnitate, quibus cum quadratus numerus A D conſtet; euidens eſt ipſum ex imparibus dictis numeris, & quidem tot; quod vnitates radix A B, vel A C continet, coaleſcere. Sed aſſumptum oportet demonſtrari.

Demonſtratio.

Gnomon H F I duo complementa quadrata E H, E I æqualia quadrato E A continet. Ergo duo ſimul quadrata E H, E I ſuperant quadratum E A vno quadrato. Ergo ſi eis addatur adhuc quadratum E F gnomonem complens, gnomon hîc H F I ſuperabit idem quadratum E A duobus quadratis, hoc eſt, gnomon binario excedet imparem numerum omnium primum, ſiue vnitatem ergo gnomon ille H F I impar eſt, & quidem primus poſt vnitatem numerus ſiue ternarius. Rurſus gnomon K G L duobus conſtat complementis F K, F L: quæ duobus rectangulis F R, F S ſunt æqualia. Ergo duo rectangula F K, F L excedunt gnomonem H F I quadrato F E, ſiue vnitate: Ergo ſi ad rectangula illa F K, F L addatur adhuc quadratum F G angulum nectens gnomonis: gnomon K G L ſuperabit gnomonem H F I duobus quadratulis; quibus exprimuntur duæ vnitates. Cum ergo gnomon H F I ſit oſtenſus numerus impar nempe ternarius, erit etiā gnomon K G L numerus impar proximè maior ternario: erit ſcilicet quinarius; binario enim ad quemlibet imparem numerum addito, naſcitur impar numerus proximè maior. Eadem methodo oſtendetur gnomon C D B ſuperare gnomonem antecedentem K G L duobus quadratulis, ſiue duabus vnitatibus; atque adeò eſſe imparem numerum

proximè

proximè maiorem numero impari K G L, siue quinario Atque ita pergetur in infinitum. His positis constat euidenter totum quadratum A D, cuius latus A D partes quatuor continet, continere quatuor etiam impares continuos ab vnitate. Nempe vnitatem A E, & tres circumiectos gnomones; quorum singuli ostensi sunt numerum quadratorum imparem continere continuè maiorem. Sic etiam intueri licet quadratum A G, cuius radix A L tres vnitates continet; tribus etiam constare numeris imparibus sese consequentibus in Arithmetica progressione ab vnitate inchoata. Quare quadratus quilibet integer &c. Quod erat probandum.

Corollarium.

Hinc colligas si imparium numerorum Arithmetica progressio ab vnitate inchoata in vnum numerum coalescat: numerum illum, quadratum semper fore, quotcunque terminis progressio constet; illiúsque quadrati radicem esse numerum tot vnitatibus constantem, quot fuerint progressionis termini. Id enim ex demonstratione huius Propositionis euidenter sequitur. Ipsam vnà cum diagrammate perpende. Vnde prӕterea colligi animaduertes quadratum quemlibet numerum, quadratum proximè minorem semper superare impari numero, sicút & impari numero superatur à quadrato proximè maiore. Hinc ergo.

PROP. VII. *Theor.*

Si ad quadratum numerum eius radix duplicata & vnitas addantur: fiet quadratus proximè maior.

Demonstratio.

Ecce enim in eadem figurâ. Si ad quadratum A G addantur complementa duo G C, G B inter se ӕqualia, & tot quadratulis, quot, tam radix G K, quàm ei ӕqualis altera radix G L, vnitates continent singulӕ, constantia, vnà cum angulari gnomonis C D B quadratulo G D, completur ipse gnomon C D B: qui cum quadrato proximè minore A G, quadratum A D proximè maius constituit. Nec obstat, quod radix vnitates lineares tantùm, non autem planas, quibus constare debet gnomon C D B addendus, vt totum quadratum A D componatur, contineat, modò par sit vtriusque vnitatum multitudo: cum semper verum futurum sit rectangulum G C tot quadratula contenturum; quot basis G K, siue radix quadrati G A lineas ӕquales, siue lineares vnitates continebit. Quare si

ad

ad quadratum numerum eius radix &c. Quod erat probandum.

Corollarium.

Hinc apparet quod, si duæ immediatæ radices simul addantur; habetur impar numerus ad quadratum minorem addendus, vt fiat quadratus proximè maior, cum enim duæ illæ radices vnitate tantum discrepent æquiualent simul additæ minoris quadrati radici duplicatæ, vnitate superadditâ auctæ.

PROP. VIII. *Theor.*

Si ex duplicata radice quadrati numeri dematur vnitas: tum reliquus numerus ex ipso quadrato subducatur habebitur quadratus proxime minor.

Demonstratio.



Si ex quadrato D A dematur gnomon C D B, reliquus fit quadratus G A proxime minor. Sed gnomon C D B æqualis est duobus rectangulis D K D L minùs quadratulo D G. Ergo dempta vnitate ex multitudine quadratulorum, quibus constant rectangula D K, D L; quæ tot vnitates continent, quot radix duplex D C, D B quadrati D A; & reliquo numero ex quadrato D A detracto, reliquus fiet quadratus G A. Qui idem etiam haberetur: si duplicata radix D C, D B, siue rectangula D k, D L ex quadrato D A demerentur, & reliquo numero adderetur vnitas. Atque ita in hæc verba efferri potuisset propositio. Si duplicata radix quadrati ex ipso dematur, & reliquo numero addatur vnitas: habebitur quadratus proximè minor. Vtrouis modo efferatur propositio, ostensa est vera.

PROP. IX. *Theor.*

Si ad quadratum radix eius duplicata addatur aliquoties, vna cum numero quadrato; cuius radix indicat quoties duplicata radix addita est, constituetur quadratus maior, cuius radix, maior est minoris quadrati radice, tot vnitatibus, quoties duplicata radix addita est.

Expositio.



Ad quadratum A F addatur duplicata radix, bis. Hoc est rectangula duo F B, F C (singula enim hæc duo rectangula bis continent radicem) addatur etiam quadratus numerus F D, cuius radix est æqualis lineæ H C, cuius vnitates H K, K C indicant quoties radix duplicata addita est, vt hîc bis. Dico quadratum A D maiorem constitui: cuius radix A C maior est radice A H, quadrati minoris A F, tot vnitatibus, quoties duplicata radix addita est, hoc est, hîc duabus.

Demonstratio

Demonstratio ex ipsa constructione, & proximè antecedentibus propositionibus aperta est. Quare si ad quadratum radix eius &c. Quod probandum erat.

PROP. X. *Theor.*

Si ex quadrata radix eius duplicata aliquoties dematur: & reliquo addatur quadratus, cuius radix continet tot vnitates, quoties radix duplicata subducta est; habebitur quadratus, cuius radix deficiet à prioris quadrati radice, tot vnitatibus; quoties duplicata radix subducta est.

Expositio

Expositio.

In eodem diagrammate à quadrato D A demantur duo rectangula D H, D I; quæ tot vnitates planas, siue quadratula continent singula; quot vnitates continent bis sumptæ (in hoc paradigmate) duplicatæ radices D C, D B: constat enim rectangulum D H, duobus rectangulis æqualibus; quorum alterum tot continet vnitates, quot radix ipsa D C, quadrati totius A D; eadémque est rectanguli D I ratio. Reliquo demum numero addatur quadratus D F; cuius radix æqualis lineæ C H, tot vnitates continet, quoties radix duplicata subducta est, id est, hoc in exemplo, duas. Dico remanere quadratum minorem A F: cuius radix A H deficiat à radice A C vnitatibus duabus H C, quoties scilicet subducta est à maiore quadrato D A radix eius duplicata.

Demonstratio.

Dum à toto quadrato D A demuntur duo rectangula D H, D I: ab ipso demitur non tantùm gnomon C D B F, quo solo dempto reliquum fieret quadratum A F; sed demitur etiam quadratum D F duobus rectangulis D H, D I commune ita vt bis dematur tantóque minor sit reliqua quantitas pertinens ad quadratum minus A F: Ergo si ei addatur, fiet debita quantitas illius, eiusque radix A H deficiet à radice A C, maioris quadrati A D; rectâ H C: quæ radix est quadrati F D, & indicat, vt ostensum est, quoties radix duplicata quadrati A D, ab ipso subducta est. Vera ergo est hæc propositio.

PROP. XI. *Theor.*

Nullus numerus integer inter duos quadratos numeros interceptus nullam radicem quadratam, etiam fractis numeris expressam habere potest.

Vel. Omnis numerus integer radice carens integra, caret & fracta.

Expositio.

Constat ex propositionibus proximè antecedentibus earúmque diagrammate hîc repetito, numeros dari infinitos quadratos, id est, quos numerus quispiam in se ductus generat. Tales sunt numeri A F, A G &c. quos radices A I, A L &c. in se ductæ producunt. Constat etiam inter



quoslibet sibi immediatos quadratos quorum scilicet radices vnitate tantum discrepant, alios intercipi numeros integros, vt inter quadratum A F, & quadratum A G intercipiuntur numeri omnes, qui conflantur ex quadrato A F & vnitatibus, quas gnomon K G L F continet; donec totus ipse gnomon assumatur; tunc enim quadratus proximè maior conflatur. Tales sunt hîc numeri 5, 6, 7, 8. Hos ergo assero omni radice siue integrâ siue fractâ carere. Dico præterea quasi vniuersalius, aut saltem explicatiùs, numerum nullum, qui integra radice careat, fractam habere posse. Atque hi sunt celebres illi in Algebra numeri; quos surdos, surdasque earum radices vocant; eò quod, nec sonare possint nec exaudiri: nec mirum, cum nullæ sint possibiles: adeo vt plures admodum reperiantur huiusmodi surdi numeri, quam non surdi, vel radice gaudentes. Hoc posito.

Præparatio.

In exemplum sumo numerum A 6 qui in superiori schemate ad quadratum A F 4 addit duas vnitates F K, gnomonis K G L F. Hîc ergo probandus est radice quadrata qualibet carere. Ad integrum quod attinet, clara res est. Nam cum radix A I 2 producat. Quadratum A F 4. Radix autem A L 3 immediata radici 2, producat quadratum A G 9, dari non potest integer numerus, qui in se ductus producat 6; is enim & maior, quàm 2, & quàm 3 minor, necessariò foret quod est impossibile. Ergo tantùm dari dici potest integer cum fracto, vt si ad radicem 2 numeri quadrati A F 4 addatur fractio quædam, vt in schemate est quiuis numerus C, qui maior sit, quam 2; & minor quam 3. At hoc etiam ostendetur impossibile, quæcumque tandem fractio adhæreat integro C 2. Quod vt perficiatur: reducatur numerus C ad simplicem fractionem D G per Prop. 21. lib. 2. ducatur autem tam numerator D 7; quàm denominator G 3 in se vt fiat fractio E F.

A 6	B 2	
1	D 7	E 49
C 2 —	—	—
3	G 3	F 9

Demonſtratio.

Fractus E F, cum ſit quadratus numerus fracti D G æqualis integro cum fracto C; qui ex ſuppoſitione in ſe ductus generat A; æqualis erit ipſi integro A: Ergo numerator E diuiſus per denominatorem ſuum F quotientem exhibebit numerum integrum (ſic enim reducitur fractio ad numerum integrum) A quadratus ergo F metitur quadratum E. Ergo radix G, quadrati F, metitur radicem D, quadrati E per Prop. 14. lib. 8. Eucl. ita vt numerator D ſit multiplex denominatoris G, aut ei ſaltem æqualis.

Ergo fractus numerus D G eſt integro numero præciſa omni fractione æqualis. Quod eſt abſurdum: cum ſit contra ſuppoſitionem. Supponitur enim fractus D G eſſe æqualis numero C integro cum fracto. Dici ergo nequit numerum integrum, qui quadrata radice careat, fractum habere poſſe. Quod erat probandum.

Scholium.

Quod de radice quadrata hîc probatum eſt in particulari, eò quod maxima primæ huius poteſtatis numericæ habeatur ratiò, eiúſque vſus præcipuus ſit ac frequentiſſimus: Quod etiam allatum diagramma geometricum huic inſeruiat: probari etiam poteſt eadem ratiocinatione ex eiſdem Principiis deductâ, de radice cubica, quadrato-quadrata, & cæteris omnibus maioribus poteſtatibus. Ita vt nullus numerus qui inter duos cubos ſibi immediatos, quorum ſcilicet. Radices vnitate tantùm diſcrepant radicem vllam, vel integram, vel fractam, habere poſſit; quales forent, verbi gratiâ, numeri omnes inter cubum 8 & cubum 27; quorum radices ſunt 2 & 3 intercepti. Idem eſto de reliquis poteſtatibus iudicium. Ita vt, hîc allata Propoſitio vniuerſaliùs aſſeri poſſit: ſi ita efferatur. *Nullus numerus integer inter duas quaſuis eiuſdem generis immediatas poteſtates interceptus, radicem vllam eiuſdem generis cum radicibus illarum poteſtatum habere poteſt.*

Si enim detur numerus A inter cubos 8, & 27, interceptus; quorum

A 12	B 2	
$C\ 2\frac{1}{2}$	$D\ \frac{5}{2}$	$E\ \frac{125}{8}$
	G 2	F 8

radices sunt 2, & 3: constat eum numerum A radicem habere non posse numerum integrũ. Vt verò etiam integer cum fracto excludatur: supponatur esse C, radix scilicet cubi minoris 8 cum aliqua fractione, quæcunque tandem illa fuerit. Numerus autem C reducatur per Propositionem 21. lib. 2 in fractum D G. Qui cubicè ductus generet fractum E F. Hîc æqualis erit numero A 12 integro. Ergo cubus F metitur præcisè cubum E. Sed si cubus F metitur cubum E; etiam illius radix G metietur huius radicem D per Prop. 15. lib. 8. Eucl. Ergo fractus D G æqualis est numero integro præciso. Quod est contra suppositionem; est enim æqualis numero C integro cum fracto. Ergo numerus A 12 non tantùm radice integra; sed etiam omni integra cum fracta caret.

Ad reliquas verò potestates cubo maiores, Propositio necessaria foret similis illis, quas Euclides protulit citatis locis ad quadratum, & cubum pertinentibus: quæ facilè eadem planè ratione, & simili constructione probaretur: qua vsus est. Quâ statutâ: quod hîc proponitur eadem omninò methodo, quam circa quadratum & cubum adhibui, demonstrabitur. Ex quibus videas quàm latiùs pateant hæc, quæ de surdis radicibus potestatum quarumcunque asseruntur; quàm quæ de quadrata solùm fuerant hactenùs obseruata. Hanc porrò vniuersalem Propositionem ad omnes potestates pertinentem habes inferius Prop. 41. ex qua deinde Prop. 42. quod hîc obiter asseritur: demonstratiuè concluditur.

PROP. XII. *Theor*

Quadratus quilibet numerus figuris numeralibus constat, vel duplò pluribus, quàm eius radix, vel vna minùs quam duplò pluribus.

Demonstratio.

Hæc, & insequens Propositio necessaria est ad numerorum quadratorum, vel cuborum quandam in membra varia distributionem ad radicis extractionem adhibendam (ne quid in iis ratione carere videatur) demonstrandum. Vtriusque porrò probatio pendet à figurarum numeralium institutione, & significandi propria facultate. Quare expositâ ipsa solùm quadratorum, & cuborum generationis ratione, vtriusque Propositionis veritas innotescet.

Ad quadratum ergo quod attinet. Perpende duos numeros A & B, 9 & 10: quorum ille maximus est omnium; qui vnâ figurâ designentur; hîc

hîc verò omnium duabus figuris expressorum minimus: alter denique ab altero vnitate tantùm differt. Ducatur vterque in se: fient duo quadrati numeri C & D. Quadratus autem D tribus figuris constat. Siquidem generatur additâ ad B 10, qui in se ducitur, vnica figura 0, vt ex obseruatis ad multiplicationem lib. 1. notum est. Est etiam idem quadratus D omnium quadratorum minimus, qui tribus figuris constent: est enim omnium numerorum tribus figuris constantium minimus. Vnde sequitur, vt quadratus C, radicis A duabus tantùm figuris constare possit.

A 9	B 10
C 81	D 100

In hoc ergo primo casu patet, quomodo quadrati C figuræ duplò plures sint, quàm figuræ radicis A. Radix enim A figurâ constat vnicâ; quadratus verò C ad summum, duabus. Duplò igitur plures sunt quadratorum, inter D 100 & 10, interceptorum figuræ figuris radicum; cum vnica sit earum figura, vt pote numeri numero A 9 minores, & vnicâ figurâ expressi. Atqui intercipiuntur quadrati inter 1 & 10, (qui duo sunt omninò, nempe 9 & 4; nisi etiam dicamus, vt dicere nihil vetat, vnitatem, quadratum esse numerum) radicem habent vnicâ figurâ constitutam. Ergo tunc quadrati illi figuris constant duplò pluribus, minùs vna; quàm ipsæ radices 2 & 3. Vera ergo tota Propositio quoad quadratos omnes quadrato D 100 minores, eorúmque radices. Figuris enim constant partim duplò pluribus, quàm radices; partim duplò pluribus vnâ minus. Sed vlterius eandem ratiocinationem promoueamus.

Quemadmodum se habent 9 & 10 inter se; ita se habent A 99 & B 100 quoad rem, de qua hîc habetur sermo. Vt enim 9 maximus est numerus omnium vna figura expressorum, & 10 omnium minimus expressorum duabus: ita numerus A 99 maximus est numerorum, qui duabus figuris exprimi queant, & B 100 minimus, qui tribus designentur. Quod si B 100 in se ducatur, quæ multiplicatio absoluitur additâ ad ipsum B 100 duplici, qua constat, figura 0: fiet eius quadratus D 10000 figuris quinque constans omnium numerorum minimus figuris quinque constantium, si enim ab eo, vel vnitas detrahatur; reliquus numerus erit 9999 quatuor constans figuris. Hinc fit vt radix A 99 minor quàm 100, quadratum producat figuris ad summum quatuor constantem. Omnes ergo radices duabus figuris constantes; qui sunt omnes numeri à numero 10 duplici figura expressorum minimo, vsque ad 99 maximo; quadratos nanciscuntur aut quatuor figuris expressos, aut minimum tribus. Ergo quadrati figuris constant, aut duplò pluribus, quàm radices, aut duplo pluribus vnâ minùs; vt vult Propositio. Quinam autem quadrati tribus, quinam quatuor figuris exprimantur: determinatio est hîc minimè necessaria: cum nobis satis sit definiisse radices quaslibet

A 99	B 100
C 9801	D 10000

duabus figuris expreſſas, quadratos generare; qui figuris nec pluribus, quàm quatuor; nec paucioribus, quàm tribus deſignentur. Hanc quæſtionem; quia iucunda eſt in Scholio reponam. Hac eadem ratiocinatione probabitur radices omnes tribus figuris conſtantes, omnes ſcilicet numeros à numero 100 ad numerum 999 quadratos generare; qui quinque minimùm figuris, & ſex ad ſummum conſtent; eoque nomine, vel duplò plures figuras, quàm radices continere; vel vnâ minùs quàm duplò, rectè aſſerantur. Quare quadratus quilibet numerus &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Quærebatur proximè: quinam quadrati figuris conſtent duplò pluribus quàm radices, quinam vnâ minùs quàm duplò? huic quæſtioni vt fiat ſatis obſerua Quadratum figuræ 3, qui eſt 9, tam propè accedere ad numerum duarum figurarum, nempè ad 10; vt vnitate tantùm ab eo diſtet. Quare cum radix erit vnica figura, quælibet figura maior, quàm 3, quadratum generabit duabus figuris, hoc eſt, duplò pluribus, quàm ipſa radix contineat, expreſſum. Quod ſi radix duabus figuris exprimatur: vt quilibet numerus à 10 vſque ad 100 exprimitur; certum eſt radicem 30, quadratum generare tribus tantùm figuris deſignandum, nempe quadratum 900. Vt ergo habeatur quadratus primus, qui quatuor figuris conſtet: neceſſe eſt vt in numeri 30, figuram o ſubſtituatur figura ſignificatiua, quæ ducta in 3 bis, figuras duas æquales generet: quæ ſimul ſumptæ adæquent, vel excedant 10, vt poſſit prior figura, dum multiplicationis numeri adduntur, ſeruari, & ad quadratum 9, quem duæ figuræ 3 & 3 in ſe ductæ generant, augere; vt figura 9 in numerum 10 abeat; & ſic augeatur figurarum multitudo. Id porro præſtare non poteſt figura 1, loco figuræ o ſubſtituta, vt ex numero 30 fiat 31. Nam figura 1 multiplicans 3, figuram 3 generat: quæ bis ſumpta non adæquat numerum 10. Ergo radix 31 inepta eſt ad quadratum quatuor figuris conſtantem producendum. At verò ſi ſumatur radix 32; quia figura 2 in figuram 3 bis, gignit numerum 12 duabus figuris expreſſum, ea quæſtioni ſatisfaciet: vt in ſchemate appoſito videre eſt: in quo quod ratus radicis 32 eſt 1024.

```
  32
  32
 ----
  64
 96
 1024
```

Omnes ergo numeri à numero 10 ad 32 excluſiuè, quadratum producunt tribus figuris conſtantem: reliqui verò omnes numeri numero 32 maiores vſque ad 99 maximum duarum figurarum numerum radices ſunt quadratorum quatuor figuris conſtantium. Iam verò in radicibus trium figurarum à numero 100 vſque ad 999, illud quidem certum eſt, primum quadratum numerum,

rum ; qui ſex figuris conſtet , ex radice naſci ; cuius prima figura ſit 3 propter rationem ſuperius allatam. Verum quia reliquæ duæ inſequentes figuræ variè ſe habere poſſunt ; vt addant ad quadratum 9 vnitatem illam neceſſariam ; ſubtilior quàm ſit operæ prætium , inquiſitio adhibenda foret. Fixum ergo, & ex dictis concluſum eſto ; non tantum cum radices tribus figuris conſtant ; ſed etiam cum pluribus , quadratos earum deficere vnitate à dupla multitudine figurarum radicum ; quoties radices figura prima 3 , cui adiungantur quotcunque figuræ o , conſtabunt. Vt radix 300 quadratum 90000 quinque tantum figuris conſtantem producit At vero 400, & reliqui deinceps numeri trium figurarum vſque ad 1000 , ſemper quadratos generabunt ſenis figuris conſtantes. Quod omiſsâ multiplici figurarum figuræ 3 adhærentium combinatione ſatis eſt determinaſſe : non tantum cum radices tribus figuris conſtant : ſed etiam cum quatuor , aut quinque , aut pluribus. Par enim eſt omnium ratio.

PROP. XIII. *Theor.*

Cuborum figuræ , aut ſunt triplò plurès , quam figuræ radicum ; aut à triplo , vnà , aut duabus tantum vnitatibus deficiunt.

Demonſtratio.

Sicut propoſitione antecedente oſtenſum eſt quadratorum figuras , aut duplo plures eſſe radicum ſuarum figuris ; aut à duplo vnà tantum figurâ poſſe deficere : ita ſimile quidpiam circa cubos contingit. Quacunque enim figurarum multitudine cubus quilibet conſtet , etſi , ſi placeat , mille : ſemper verum erit eam multitudinem aut triplam ad ſummum eſſe multitudinis figurarum , quibus conſtat radix , aut ab ea multitudine tripla , vna tantum , aut duabus , & non pluribus vnitatibus deficere. Quod ante radicum extractionem , vt patebit, demonſtratum oportet. Quod ſic conficio.

Perpendatur cubus ex minima radice duarum figurarum genitus : ea eſt A 10. Cubus autem eſt B 1000 figuris quatuor conſtans. Patet. Nam radix A 10 bis in ſe duci debet , vt fiat cubus iuxta Prop. 3. libri huius.

| A 10 — B 1000 |

Quæ multiplicatio abſoluitur ; ſi ad 10 addatur primò vnica figura o , vt fiat eius quadratus 100 : & ſecundò ad 100 addatur figura altera o ; vt fiat cubus B 1000. Qui quidem cubus minimus eſt omnium numerorum qui quatuor figuris conſtant. Deme enim , vel vnitatem ab eo , reliquus fiet numerus 999 tribus tantum figuris expreſſus. Quare ſi quælibet radix

minor, quam A 10: quæ scilicet vnica figurâ constet; ducatur in se cubice, non potest non producere cubum; qui tribus ad summum figuris exprimatur. Minor siquidem illa radix quam A 10, minorem cubum, quam cubum B 1000, radicis 10 generabit, atque adeò, vt proximè ostensum est, aut tribus ad summū figuris, aut duabus, aut denique vnicâ designatum. Si ergo tribus figuris designetur: quales sunt cubi C, D. E. F. G. Radicum 9. 8. 7. 6. 5. patet triplò plures esse cuborum figuras quam figuras radicum, cum vnica sit. Quod si cubi duabus figuris exprimantur, quales duo tantum existunt, nempe 64 & 27: quorum radices sunt 4 & 3; cuborum figuræ vnitate deficiunt à tripla multitudine figurarum radicis. Denique si cubus vnica figura constet, vt constat cubus 8; cuius radix est 2. Nequid non desunt figuræ duæ, vt cubi figurarum multitudo tripla sit radicis figurarum multitudine? In hoc ergo primo gradu, in quo radix cuborum vnica est figura; verum esse constat multitudinem figurarum cubum componentium maiorem tripla esse non posse, radicis figurarum multitudine, posse autem à triplo deficere, vel vnâ, vel duabus vnitatibus. Sed hoc ipsum in secundo gradu, in quo radix duabus figuris constat, eadem methodo certissimum esse demonstro; Atque ex eo, idem in radicibus quibuscunque in vniuersum contingere concludam.

C 729	9
D 512	8
E 343	7
F 216	6
G 125	5

Expendamus itaque cubos duos A & B: quorum prioris A radix est C 10, duabus figuris constans minimum numerum duabus figuris constantem exprimentibus: posterioris autem B radix D 100, sit etiam numerus minimus tribus figuris expressus. Omnes ergo cubi ex radice maiore quàm C 10, duabus tamen figuris expressâ oriundi, maiores quidem erunt cubo A; qui quatuor figuris constat, eiusque radix C 10 duabus: minores autem cubo B septem figuris expresso; qui ex numero D 100 trium figurarum minimo in se cubicè ducto generatur. Omnes ergo cubi ex radicibus duarum figurarum orti; omnes inquam, cubi; quorum radices sunt numeri à numero 10 vsque ad numerum 99 duarum figurarum maximum: figuris necessariò constant, vel quatuor minimum, vel quinque, vel ad summum sex. Nam minimus cubus A 1000 ex minimâ radice C 10 duarum figurarum genitus, quatuor iam figuris constat. Ergo saltem totidem constabunt cubi ex radicibus maioribus quam C 10 producti pluribus tamen, quàm sex figuris constare non possunt; cum minores sint omnes cubo B; à quo, si vnitas sola dematur; ex numero B septem figurarum, numerus euadet figurarum tantum sex. Itaque cubi omnes ex radicibus duarum figurarum geniti, vel quatuor minimum figuris, vel quinque, vel ad summum sex constare possunt

A 1000	C 10
B 1000000	D 100

possunt. Si figuris sex constiterint : erit figurarum ; eos exprimentium multitudo tripla multitudinis figurarum ;quibus constant radices ; quæ duabus constare supponuntur. Si cubi figuris tantùm quinque constiterint : vnica figura desiderabitur , ad hoc , vt multitudo figurarum eorundem sit tripla figurarum radicum. Si denique figuræ tantum quatuor, cubos componant ; earum figurarum multitudo minor est duabus figuris , quam multitudo tripla figurarum radicis : vt allata propositio exigit. Nec aliter idem probabitur de cubis ex radicibus triplici figura numerica constantibus , genitis : quorum minimus est cubus B , minimæ radicis D trium figurarum : maximus autem attingere non potest cubum E radicis F minimæ quatuor figurarum : Ita vt omnes cubi ex radicibus trium figurarum constent , vel figuris minimum septem , vt B. Vel , ad summum figuris nouem ; vna scilicet minus quàm cubus E radicis F quatuor figurarum propter paulò ante allatam rationem.

B	100 0000	D	100
E	100 0000000	F	1000

Si ergo constet cubus figuris nouem, cum radix tribus exprimatur : Cubi figurarum multitudo erit tripla multitudinis figurarum radicis. Si verò cubus octo figuris exprimatur ; eius multitudo figurarum, vnitate deficietà tripla illa multitudine. Denique si cubus figurarum tantùm septem extiterit : duæ deerunt vnitates , quominus cubi figurarum multitudo sit tripla multitudinis figurarum radicis. Eadem argumentatione demonstrabitur cubos ex quacunque deinceps maiori radice quatuor aut quinque &c. figurarum genitos , continere aut triplò plures ad summum figuras ,quam radicem , aut vnâ , aut minimum duabus pauciores. Quare cuborum figuræ aut sunt triplò,&c.Quod erat probandum.

Corollarium.

Ex antecedenti , & hac propositione deducitur hasce duas potestates , quadratum & cubum figuras continere posse toties tantùm plures , quàm contineant radices ; quot earum potestatum exponentes indicant:posse vero à summa illa figurarum supra figuras radicum pluralitate deficere tot figuris ; quotus est potestatis ordo , siue locus. Ecce enim ostensum est figuras quadrati ; cuius exponens in progressione est 2 , vt in superioribus progressionibus sæpiùs adductis videre est ; posse esse ad summum duplo plures , quam in radice reperiantur. Posse item vnâ vnitate ab illa dupla multitudine deficere ; sed non vnâ vnitate pluribus ; quadratus autem inter potestates est prima. Sic etiam , quia cubi exponens est 3. figurarum cubum exprimentium multitudo potest ad summum esse tripla multitudinis figurarum , quibus radix constat : quia vero cubus est potestas secunda ; potest ea tripla multitudo , aut vnâ , aut duabus ad summum , figuris esse manca.

Scholium.

Cum iis, quæ de quadratis & cubis hîc demonſtrata ſunt, & in Corollario obſeruata, ſimilia poſſint de reliquis poteſtatibus maioribus, vt quadrato-quadratis, ſuperſolidis &c. eadem adhibita ratiocinatione demonſtrari; quæ per radicum ſingulas quoad figurarnm multitudinem, mutatione deducitur: iis perſequendis fuſiùs noua fruſtrà impendatur opera. Sed poteſtates omnes hac vnica Propoſitione complectar: quam ex dictis de duabus primis quadrato & cubo, probatam ſuppono. Hæc autem ſic habet.

Qualibet poteſtas figurarum multitudinem continet toties ad ſummum multiplicem figurarum radicis; quoties earum exponentes continent vnitatem: ab ea tamen multiplicitate poſſunt deficere tot ad ſummum figuris: quotum ipſæ poteſtates locum inter cæteras occupant.

Ergo, exempli cauſa, quadrato-cubus (cuius exponens eſt 6) figuratum multitudinem continet; ſextuplam ad ſummum, multitudinis figuratum radicis. Quia verò ea poteſtas quinta eſt: poterunt eius figuræ ab ea ſextuplâ ratione, vel vnâ, vel duabus, vel tribus, vel quatuor, vel ad ſummum quinque vnitatibus, ſiue figuris deficere. Quæ quò ſpectent, patebit inferiùs.

PROP. XIV. *Probl.*

Numeri dati radicem quadratam inueſtigare.

Expoſitio.

Dum hic numeri dati radicem quadratam inueſtigandam propono: id non eo ſenſu propoſitum cenſeas, quaſi numerum quemcunque radice quadratâ potiri poſſe velim. Sunt enim ſiue numero numeri; quos nullus in ſe ductus numerus, ſiue fractus, ſiue integer producere poteſt. Conſule ſuperiorem Propoſitionem 11. ex qua diſces numeros longè plures reperiri; qui quadratâ radice careant, quàm qui gaudeant. Huius ergo Propoſitionis ſenſus eſt, vt, dati numeri radix quadrata exhibeatur; ſi reuerà ei conueniat: ſin minùs, radix quadrata deſignetur numeri quadrati maximi in dato numero contenti. Hoc ergo in ſenſu proponatur numerus A 412164, cuius radix quærenda eſt. Hæc inuenietur

ſequentibus

sequentibus obseruatis præceptis: quæ memoriæ causâ his versiculis complector.

Constructio.

Alternas numeri à dextris signato figuras
Tunc puncti summam radicem sume sinistri.
Déque superposito, radicis deme quadratum.
Et reliquum describe suprà. Sumptámque duplato
Radicem: vacuóque loco subscribe deinceps:
Vt fiat diuisor. At ipsa figura sequenti
Subdatur puncto; quæ est in quotiente notata.
Radicem duplam reliquus ne vincat; ac istum
Ne vincat numerus de multiplicantibus ortus.

Præceptum primum. *Alternas numeri à dextris signato figuras.* Præceptum hoc ad aptam numeri præparationem, ante ipsam radicis initam extractionem pertinet. Quæ apta futura est si numeri A figuras initio facto *à dextris*, ab vltimâ scilicet eius figurâ 4, alternatim versus sinistram puncto supposito inuras, vt hîc inustas vides. Quâ interpunctione totus ipse numerus in varia membra distribuitur: quarum singula binis figuris constant, vno interdum excepto membro primo: quod vnicâ figurâ constare necesse est; cum imparem esse contigerit multitudinem figurarum totum numerum componentium. In qua numeri in membra distributione iam cernis radicem futuram, quæ inquiritur, tot figuras numericas sibi vendicaturam; quot membra, vel puncta datus numerus continet. Constat enim per superiorem Propositionem 12. Quadratum numerum duplò plures figuras, quàm radicem continere, & vnâ figurâ posse ab ea duplicitate deficere: cum scilicet illa multitudo impar est, in quo casu membrum primum vnicâ figurâ constat. Hæ autem radicis figuræ singulæ reperiendæ sunt sigillatim non secùs quàm in diuisione (cuius radicum extractio species quædam est) sigillatim inquiruntur quotientis figuræ: quas eo modo faciliùs est constituere, quàm si vna omnes inuestigarentur, multitudine mentem obruente. Itaque vt in diuisione fieri solet, subducatur dato numero A lineola recta, & ad dextram locus B designetur radicem, siue quotientem excepturus. Atque hoc est ad præparationem præceptum obseruandum. Reliqua accipe.

A 412164
. . .
(B

Præceptum secundum. *Tunc puncti summam radicem sume sinistri.* Membri scilicet primi, nullâ sequentium habita ratione, præcisam radi-

ſam radicem, ſi verò membrum illud quadratus eſt numerus, ſin minùs, radicem *ſummam*, hoc eſt, maximi quadrati in eo membro contenti, ſtatue ad quotientem B: quæ neceſſariò figura erit vnica, vt ex dictis Prop. 12. apparet. Vt autem noſcatur quiſnam ſit maximus ille quadratus in primo illo membro contentus, & quænam eius radix ad quotientem ſtatuenda: habenda eſt præ oculis tabella continens quadratos omnes figurarum omnium nouem communium cum appoſitis reſpondentibus radicibus. Cuiuſmodi eſt hæc. In hac igitur

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Tabella inquire numerum 41 primi illius membri; cum in ea non reperiatur: inquire numerum proximè minorem. Is eſt quadratus 36: cuius radix eſt 6. ſtatue ergo ad quotientem B, figuram 6. tùm deme à numero 41 quadratum illum 36, & reliquum numerum 5, vt in diuiſione fieri ſolet, ſuperpone ſua in claſſe; ac denique expunge ipſum numerum 41, vt hîc factum vides iuxta illa eiuſdem præcepti verba reliqua. *Déque ſuperpoſito radicis deme quadratum: & reliquum deſcribe ſuprà,* Atque ita abſolutum eſt hoc præceptum ſecundum.

```
  5
A 4̶1̶ 2 1 6 4
   ·   ·   ·
___________
           | B 6
```

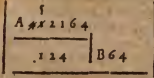
Quod ſicut & primum, ampliùs non vſurpatur.

Præceptum tertium. *Sumptámque duplato radicem: vacuóque loco deſcribe deinceps, vt fiat diuiſor.* Duplica ſcilicet radicem illam 6 proximè poſitam, vt fiat 12. Quem ita ſubſcribe numero A, vt eius figura ſecunda 2 *vacuo loco*, id eſt, ſub figura, quæ puncto caret, qualis eſt hîc figura 2, ſcribatur: prior verò eiuſdem numeri 12 figura 1 ſcribatur *deinceps* in præcedenti ſcilicet claſſe ſub figurâ 5 iuxta præceptum ſecundum ſtatutâ. Atque ita, vt hoc ſchema referr, habebit ſe numerus ad diuiſionem per diuiſorem illum 12 ineundam comparatus: quæ ſic abſoluetur.

```
  5
A 4̶1̶ 2 1 6 4
   ·   ·   ·
___________
  1 2      | B 6
```

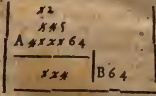
Præceptum quartum. *Ipſa figura ſequenti ſubdatur puncto: quæ eſt in quotiente notata.* Nondum habetur diuiſor integer habito licet numero 12 ſuo loco, vt traditum eſt, conſtituto, niſi ad illum accedat alia adhuc figura, quæ ſub *figura ſequenti* puncto affectâ reponatur: quam ipſa operatio determinat hoc modo. Ita age quaſi ſolum numerum ſuperpoſitum 52 diuideres per ſolum diuiſorem 12 ei ſubſcriptum. Per hanc ergo diuiſionem numeri 52 per 12, ad quotientem B ſtatueres figuram 4 poſt figuram 6 iam poſitam: hanc itaque figuram

ram 4 non tantùm ad quotientem, sed etiam ad diuisorem 12 repone; ita vt subdatur figuræ 1, puncto affectæ; totúsque diuisor fiat 124, diuidendus autem 521, non quidem absolutè: nam peracta est iam prima diuisionis operatio, siue inquisitio quoties 12 contineretur in diuidendo numero 52: sed quod reliquas diuisionis operationes, multiplicationem videlicet figuræ 4 quotientis in numerum 124 & producti numeri à superiore 521 subtractione; tum etiam reliqui superscriptione. Ita ergo se habet schema post figuram 4 tùm ad quotientem statutam, tum ad diuisorem.

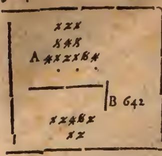


Tota ergo extractionis huius difficultas, sicut & in diuisione communi contingit, in eo versatur: vt apta eligatur ad quotientem B, siue radicem figura; non secùs ac in diuisione. Quæ tum apta censeri debet; si cautiones duæ obseruentur duobus postremis versiculis comprehensæ. *Radicem duplam reliquus ne vincat.* Ecce priorem. *At istum ne vincat numerus de multiplicantibus ortus.* Hæc est posterior. Per priorem cauetur ne tam parua ponatur figura ad quotientem, vt ea ducta in diuisorem, & per hanc multiplicationem genito numero, subducto à superposito; reliquus numerus maior sit duplo totius radicis hactenùs inuentæ: totius, inquam non autem solius figuræ vltimò positæ. Posterior autem cautio monet, ne tanta etiam figura ad quotientem statuatur, vt ea multiplicatâ in diuisorem tantus fiat numerus; vt à numero superposito demi nequeat. Atque hoc est perpetuò obseruandum, nec aliud quidpiam ad totum extractionis negotium expediendum desideratur: semper enim recurrunt eædem operationes instituendæ ad membra singula dati numeri. Quas in dato exemplo prosequor, vt tradita præcepta ipso vsu planiora euadant.

Itaque posteriorem ad quotientem positam figuram 4 duco in primam diuisoris figuram 1: productum 4 demo à superposito numero 5; relinquitur 1. Duco secundò 4 in diuisoris figuram 2 secundam, & productum 8 à superposito 12 subtraho; reliquus fit 4 superscribendus deletis interim decursis figuris: Ac tandem duco 4 in 4; productum 16 demo à superiore 41; & reliquum 25 superpono.



Atque ita absolutâ est operatio secunda. Vltima autem radicis figura seruatis eisdem præceptis 3. & 4. definietur. Duplico itaque radicem hactenus inuentam 64. & duplicatá 128 subscribo, vt præceptum



ptum est, nempe vltimam figuram 8 sub figura 6, quæ puncto caret, & reliquas deinceps læuam versus: ita vt figura 1 subiiciatur figuræ superiori 2. Quæro itaque quoties figura 1 contineatur in superposita 2? bis continetur. Ergo figuram 2 ad quotiẽtem B statuo, simúlque eandem puncto subscribo: ac tum demum figuram illã quotientis 2 in singulas figuras diuisoris 1282 duco, singulos productos à superpositis subtraho, reliquos repono more solito: hísque omnibus absolutis exhauritur datus numerus A; ita vt nihil remaneat. Quadratúsque reuera sit hîc numerus, ejusque radix sit B 642, quæ scilicet in se ducta ipsum generat. Quod si quid peractis operationibus superfuisset: quadratus minimè foret datus numerus; eius tamen radix B inuenta foret, eo cuius superiùs memini, sensu; nimirum radix foret quadrati in dato numero contenti omnium maximi. Atque hæc est tota radices quadratas extrahendi Ars & methodus: quam postmodum demonstrabo: sed priùs ipsius absolutæ operationis examen, cum paucis absolui possit, instituo; ante constructionis demonstrationem.

Examen siue probatio factæ extractionis.

Cum Arithmetica hæc operatio, diuisio quædam sit: quæ vulgati diuisioni probandæ apta sunt examina; huic inepta esse non possunt. Totidem ergo modis probabitur radicis extractio, quot diuisio.

A	412164
B	642

Et primò quidem per multiplicationem. Reperta radix B numeri A in se ducatur: gignetur, si in extrahendo erratum non est, per hanc multiplicationem numerus A. Quod si aliquid reliquum fuisset; addendum foret numero per multiplicationem radicis B in se genito, vt totus A haberetur. Ratio est per se manifesta.

Secundo. Potest examen extractionis iniri per diuisionem. Diuide A datum numerum per inuentam radicem B: diuisionis quotiens esse debet eadem radix B. Est & huius examinis clara ratio, & ex præcedenti nótissima. Si enim radix B in se ducta debet numerum A procreare: viciſsim si B, numerum A diuidat, debet seipsam producere, dissoluit enim diuisio, quod componit multiplicatio. Quod si quidpiam superfuisset absoluta extractione: idem absoluta diuisione superesse necesse est.

Tertiò compendiosiùs inibis examen huiusmodi per reiectionem nouenarij. Abiice nouenarium ex radice inuenta B, & reliquam figuram 3 sepone

A 412164
B 642
o
3X3
o

ſepone, tum ad læuam, tum ad dextram decuſſis: eamque duplicem figuram 3 in ſe multiplica, vt in multiplicatione fieri ſolet; & à producto reiice nouenarium ſepoſitâ reliqua figura. Huic enim ſi erratum non eſt, qualis figura relinqui debet reiecto nouennario ex numero A. Cum enim multiplicato numero B per numerum B producatur A. Adhiberi poterit hîc idem examen: quod ad probandum multiplicationem adductum eſt Prop. 38. lib. 1. Quod ſi quid relictum fuiſſet; nouenarius reiiceretur ex eo reliquo, ſimul & ex numero genito per multiplicationem figurarum 3 & 3 ſepoſitarum. Quod examen in hoc caſu examen potius diuiſionis, quam multiplicationis imitaretur. Eadem tamen vtriuſque certitudo. Conſule propoſitionem 43 lib. 1. in qua aperta eſt ratio examinis abſolutæ diuiſionis. Vt pluribus his exponendis immorandum non ſit. Iam ad conſtructionis ſuperioris demonſtrationem accedendum eſt.

Demonſtratio conſtructionis, qua radicem quadratam dati numeri inuenimus.

Conſtructionem totam problematis huius ad radicis quadratæ extractionem pertinentis quatuor omninò præceptis complexus ſum. Quorum ſi ſingula demonſtrentur; tota conſtructio demonſtrata cenſeri debet.

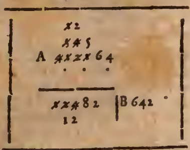
A 412164
· · ·
C 410000
D—2100
E ——64
B 642

Præceptum itaque primum; quo totus datus numerus A in membra diſtribuitur eo fine; vt ex ſingulis naſcatur vna tantum radicis B figura aliqua; eáque arte faciliùs obtineatur: demonſtratum eſt prop. 12. quâ conſtat quomodo quadratus quilibet numerus notis arithmeticis conſtet duplò pluribus, quam radix eius, vnà tamen dempta vnitate, ſi impar fuerit quadrati figurarum multitudo. Atque ita membra ſingula ſingulas exhibent radicis figuras. Quod vt clariùs adhuc proponatur; ſingula membra dati numeri A ſeorſim exhibeantur, vt ſchema refert; in quo ea membra ſunt numeri C, D, E: tantus enim eſt ſingulorum valor, quem ipſis aſſerit eorum gradus. Primum ergo membrum C ſeorſim ſumptum pro radice tres figuras ſibi vendicat duas, ſecundum D tertium E, vnicam. Sed quia priores ſunt figuræ o; quæ à poſterioribus ſignificatiuis ſupplentur; ideo ſingulæ tantum figuræ radicis B, ſingulis membris conuenire dicuntur, ſed quarum valorem incolumen tueatur ipſarum gradus, ſiue claſſis. Ex quibus patet: quomodo, & quo ſenſu datus numerus in membra diuiſus ritè

comparetur, vt singulæ ad eius radicem pertinentes figuræ statuantur.

Vt præcepta reliqua clarissimè exponantur diagramma construendum est: quod rem hanc totam ipsis etiam oculis cernendam exhibebit. Construatur quadratum Geometricum F L: quod tot quadratulis constare in-

Hic appone schema idem, quod in sequenti habes pagina 387.

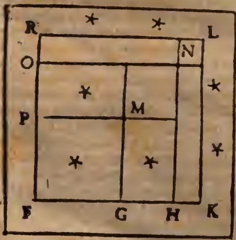


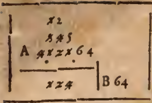
telligatur; quot vnitates continet datus numerus A. Eius ergo radix F K quæritur. Cuius quidem pars quędam F G habetur; dum per præceptum secundum ex tabella quadratorum ad simplices nouem figuras pertinentium supra in constructione allatâ eruitur radix maximi quadrati: qui in primo dati numeri membro 41, siue 410000 continetur. Hîc ergo quadratus cum sit 36, siue (ratione gradus) 360000: eius radix habetur 6, hoc est, 600. Atque tanta est linea F G: cuius quadratum F M numerum quadratum 360000 exhibet: qui demi iubetur per præceptum idem secundum à numero C 410000. Hac autem subtractione factâ relinquitur 50000. Qui superscribi censetur, dum in sua classe sola figura 5 superscribitur. Cernis ergo, opinor, euidenter rectè definiri primam radicis B figuram 6 per hoc præceptum secundum, quæ ratione gradus, est 600: rectè etiam superscribi figuram 5, quæ gradus etiam ratione, est 50000. Atque ita omnia ad hanc figuram 6 radicis B primam statuendam ritè perfecta sunt. Ad secundam ergo iuxta præceptum tertium ex secundo eliciendam accedamus

Ad numerum proximè reliquum 50000 ex prima operatione addi debet membrum secundum 2100 dati numeri A: ex qua additione fiet numerus 52100, vnde secunda figura radicis B deducenda est iuxta Præceptum tertium, quo iubetur vt per duplicatam iam positam radicis figuram 6 (hoc est 600) siue numerum 12 aut 1200, diuidatur superpositus numerus 52100. hîc diuidendus numerus 52100 ad secundum membrum pertinens constituit in diagrammate gnomonem quemdam circa quadratum F M circumiectum: qualis est O M H; cuius latitudo G H ignoratur adhuc

adhuc nota autem fit per tertium præceptum si gnomon O M H diuidatur per longitudinem M P & M G tanquam lineam vnam (quæ est radicis figura 6 duplicata) vna cum linea G H ; quæ est ipsa radicis definienda figura fit enim rectangulum vnum ex toto gnomone O M H : si duo rectangula M O , M H & quadratum M N (quod est quadratum lateris G H) in vnum rectangulum applicentur : cuius longitudo erunt duo quadrati M F, latera M P , M G vnà cum recta G H. Latitudo vero est ipsa recta G H. Rectè igitur præcipitur ad inuestigandam secundam radicis B figuram 4 iuxta tertium præceptum; vt gnomon O M H N ; qui , vt dictum est , est numerus 521 ; diuidatur per duplicatam radicis B figuram 6 , hoc est , per numerum 12 : cui statim apponatur figura noua radicis ; quæ habita ratione cautionum iusto nec maior, nec minor eligenda videbitur ; qualis est hîc figura 4 : ita vt totus diuisor, per quem totum membrum secundum 521 diuidi debet , sit ei subscriptus numerus 124 , siue gnomonis O M H latera M P , M G & G H (illis enim lineis numerus 124 exprimitur , vt declaratum est) hunc autem diuisorem 124 rectè statui constat duplicatâ , vt iubetur , radice 6, eiusque duplo numero 12 ita subscripto , vt eius posterior figura 2 sub figura puncto vacua collocetur , tum prior 1 (& reliquæ si plures forent) in anteriore gradu deinceps. Ex qua priore diuisoris figura 1 inhibitur diuisio , apta figura 4 tum ad radicem B statutâ , tum ad diuisorem adiuncta sub puncto. Facta autem diuisione membri 521 per diuisorem 124, hoc est , gnomonis O M H per M P , M G , & G H , habetur numerus 4 , siue latitudo G H gnomonis O M H , qui inquirebatur : & reliquus fit numerus 25 , vt hoc

	5	
	A 4̸ 1̸ 2 1 6 4	
	· · ·	
	1 2 4	[B 64





ſchema refert qui pertinebit ad vltimum membrum, & qui gnomone R N K, reliquo ex toto quadrato F L, deſignatur. Cui debita ad radicem figura (quæ eſt gnomonis latitudo H K) eodem modo determinatur, quo proximè determinata eſt puncto ſecũdo conueniens. Duplicabitur ſcilicet tota iam inuenta radix F H 64 ad inchoandam diuiſionem; ex qua habebitur figura 2, ſiue latitudo H K gnomonis R N K L vt figura 4 præcedens habita eſt eodémque demonſtrandi modo rectè haberi oſtendetur. Quotquot enim membra ſiue puncta extiterint; eadem ſemper methodus adhibetur: Ita vt ad abſolutam conſtructionis totius demonſtrationem ratio exponenda ſuperſit cautionis duplicis ad aptam radicis figuram eligendam adhibendæ. Quam apertiſſime declaro.

Dictum ergo eſt talem, ad radicem ſtatui debere figuram; quæ in totum paratum diuiſorem ducta numerum generet; qui à ſuperpoſito demi poſſit. Hæc eſt radicis extractioni cum vulgari diuiſione cautio communis: eiuſque in hac vtraque operatione eadem ratio. Si enim productus ille per multiplicationem numerus à ſuperpoſito demi nequeat: maior, quam par ſit, aſſumpta eſt radicis figura; cuius nimirum quadratus maior eſt, quam quadratus propoſitus. Euitandus ergo eſt exceſſus huiuſmodi; ſed ſtudio non minori defectus debet euitari. Silicet, non debet ad radicem ſtatui figura tam exigua, vt in paratum diuiſorem ducta, numerum generet: qui à ſuperpoſito ſubductus relinquat numerum radicis totius iam poſitæ duplo maiorem. Ratio deducitur euidenter ex propoſitione 7 ſuperiori, quâ conſtat: ſi ad quadratum quemlibet numerum radix eius duplicata cum vnitate addatur, fieri quadratum proximè maiorem: cuius ſcilicet radix vnitate maior eſt radice quadrati prioris. Quare, ſi reliquus numerus abſoluta quauis operatione ad quampiam radicis figuram ſtabiliendam præſcripta, maior foret radicis totius iam inuentæ duplo; maior vtique foret eo duplo, ſaltem vnitate. At ſi ad radicis duplum accedat vnitas, quadratus generatur proximè maior; cuius radix, vt dictum eſt, vnitate priorem ſuperat. Ergo in eo caſu figura ad radicem poſita à vera & iuſta figura deficeret, vnitate. Quod fieri non debet. Rectè igitur duplex illa cautio præſcripta eſt, ne maior, vel minor, quàm par ſit, radicis figura vlla conſtituatur. Quare, vt totius conſtructionis demonſtrationem colligam. Cum dati numeri figuræ alternatim rectè interpungantur, vt ſingulæ radicis figuræ inquiri poſſint, vt iubet præceptũ primum: & vt vult ſecundum, prima radicis figura rectè ſtatuatur. Cum item reliquæ poſt primam, quotquot extiterint, iuxta præceptum tertium & quartum duplici illa adhibita cautione rectè inueſtigentur: conſtat dati numeri radicem tradita methodo rectè eſſe inuentam. Quod faciendum erat.

PROP.

PROP. XV. *Probl.*

Numeri cuiuſcunque radicem quadratam ex quadam noua, tuta, iucundáque formula inueſtigare.

Expoſitio. Cum lib. 1. de diuiſione ageretur, tradita eſt à me Prop. 44. & 46. diuiſionis quædam formula: quæ illud commodi præ communi, & antiquâ methodo continet; vt nulla vnquam deleatur Arithmetica nota; ſed omnes ad finem vſque diuiſionis, integræ, diſtinctæque perſeuerent, & ſi quando erroris alicuius admiſſi dubium occurrat, exhiberi, & in examen reuocari poſſint abſque omni totius operationis repetitione; quæ alioqui deletis figuris foret neceſſaria. Cum ergo radicis quadratæ è dato numero eductio, diuiſio quædam ſit: eandem illam methodum diuiſionis; huic, de qua agimus radicum extractioni applicare ſtudio non omninò inani conatus ſum: quam ſeruatis eiſdem planè præceptis expono.

Conſtructio & Demonſtratio.

Sit idem, qui ſuperiùs, datus numerus A. Diſtinguatur in primis iuxta præceptum primum in ſua membra punctulis diſtincta ab inuicem.

```
A 4 1 | 2 1 6 4
B 3 6 | 6 C
  D 5 2 1
  E 1 2 4
  F 4 9 6 | 4 G
    H 2 5 6 4
    K 1 2 8 2
    L 2 5 6 4 | 2 M
    N o o o o
  P 4 1 2 1 6 4
    C  G  M
    6  4  2
```

Deinde iuxta præceptum ſecundum ſumatur ex tabella quadratorum, ſuperiùs allata maximus quadratus in primo numeri A membro 41 contentus, nempe B 36: qui eidem membro 41 ſeruatis claſſibus aptè ſubiiciatur. Radix autem 6, eiuſdem quadrati 36, ſubſcribatur figuræ primæ (quæ eſt 2) membri ſequentis, quæ puncto vacat, vt habetur in ſchemate. Ad characterem C. Tum dematur quadratus B 36 ex ſuperpoſito ſibi membro 41, reliquo numero D 5 ſubſcripto: vt abſolui ſubtractio ſolet. Quo peracto duplex primum præceptum expeditum eſt.

Tertium autem, & ſimul quartum eodem, quo priùs, modo, ſolo ſitûs figurarum diſcrimine ſeruato abſoluentur. Ad numerum D 5 reliquum antè factum appone in

eademmet classe sua membrum secundum 21, vt, cernis appositum. Ad hæc duplica radicem C 6 iam appositam, eiúsque duplum E 12, eidem radici seruatis classibus subiice. Erit itaque E 12 diuisor, per quem superpositus numerus D 52 diuidi debet. Initâ autẽ diuisione D per E, quotiens est figura 4: quam & ad radicem G (talis enim ad radicem locus nunc destinatur) & ad numerum E diuisorem constitues sub figura 1 numeri D puncto affectâ, vt iam totus diuisor habeatur E 124. In hunc ergo integrum diuisorem duci debet figura 4 radicis, vt fiat numerus F 496. qui totus subducendus est à numero D 521 reliquo H 25 subscripto suis in classibus. Quibus absolutis perfectum est totum, quod circa membrum secundum præstari debet: quod idem, exceptâ formulâ, in priori methodo præstitum est, vt patet. Nec secùs membrum tertium 64 tractabitur. Illud ergo ad reliquum ex præcedenti operatione numerum H 25 seruatis semper gradibus appone, vt totus fiat diuidendus numerus H 2564: cuius diuisor erit duplicata iam statuta radix C G 64. id est, numerus K 128. Apta autem quotientis, siue radicis figura debitis cum cautionibus electa est M 2, numero k etiam adhibenda, vt integer diuisor creetur K 1282 hîc ergo diuisor k multiplicandus est per figuram M 2 quotientis, vt productus L 2564 tollatur à toto superposito numero H. Qua subductione factâ, nihil relinquitur, vt refert N. Quadratus ergo præcisus est numerus A, eiúsque radix sunt numeri C, G, M in vnum collecti. Eadem porro est hæc cum priore methodus, nec aliis nititur fundamentis, vt patet attendenti, nec aliâ præter præcedentem demonstratione eget.

PROP. XVI. *Probl.*

Quadratæ radicis præcedenti methodo erutæ operationem ex ipsamet formula examinare.

Constructio.

Illud præter cætera superiùs annotata commoda ex methodo præcedenti deriuatur: vt sese ipsam operatio probet. Quod hoc modo perficitur. Ad numeros omnes, qui ex multiplicatione singularum figurarum radicis in diuisores ductarum procreati sunt. Adde autem prout in schemate constituti sunt seruatis classibus: debet enim (si erratum non est) ex ea additione nasci datus numerus, cuius radix est inuestigata. Si quid autem absolutâ totâ extractione supersit reliquum; ita vt tunc datus numerus minimè quadratus præcisè sit; genito illi ex additione numero iungendum est, vt tunc totus habeatur datus numerus. In exemplo itaque

itaque nostro numeri B 36 F 496, L 2564 prout in schemate iacent, addendi sunt. Si enim ex ea additione oriatur datus numerus A: de recta extractione dubitare non licet; sin secùs, lapsus haud dubiè incursus foret alicubi.

Demonstratio.

Ratio huius constructionis etsi paulò abstrusior primâ specie videatur, euadit apertissima ex superiori diagrammate geometrico, eiúsque allata ex-



A 412164
B 36|6.C
D 521
E 124
F 496|4 G
H 2564
K 1282
L 2564|2 M
N 0000
P 412164
C G M
6 4 2

positione. Totum enim quadratum F L repræsentat totum datum numerum A, cuius radix inuestigatur. Quadratum verò F M est primus quadratus B 360000 in primo membro 410000 (talis enim est horum numerorum valor ratione gradûs, quem occupant eorum notæ Arithmeticæ; quem suppleri necesse est multitudine illa figurarum o, vt suprà factitatum etiam est.) Numerus autem F 49600, est gnomon O M H. fit enim ductâ radicis figura G 4, siue 40 (habitâ ratione sequentis figuræ 2) in numerum E 124 conflatum ex dupla radice 6, & appositâ radicis figura G 4; sicut gnomon O M H æquale est rectangulo sub M G, M P, G H tanquam vna recta linea, & sub G H. Ecce igitur iam quomodo duo numeri 360000, & 49600 æquales sint quadrato F N. Eodem modo ostenditur numerus L 2564 æqualis gnomoni R N K. Atque ita cum hi tres numeri B 360000, F 49600, & L 2564 æquales sint, siue exhibeantur per totum quadratum F L, per quod etiam repræsentatur numerus A: Patet tres numeros B, F, L eidem A æquales esse. Si ergo in numerum vnicum P colligantur: produci debet datu,

datus numerus A. Quod si reliquum quidpiam post absolutam extractionem factum foret, cum iubeatur addi ad numerum P; remanebit etiam in hoc casu æqualitas numeri A cum numero P ita aucto. Rectè igitur probata est radicis extractio hac posteriore methodo absoluta, per additionem dictorum numerorum. Quod faciendum erat.

PROP. XVII. *Probl.*

Figuram iusto vel maiorem vel minorem inter extrahendum radicem quadratam, ad quotientem positam expeditissimè in veram commutare.

Expositio.

Memineris, opinor à me traditam libro 1. Prop. 46 in Scholio vbi de diuisione agebatur, rationem emendandi figuras ad quotientem perperam positas absque omni iam promotæ operationis repetitione; expunctis etiam percursis figuris non leui sane compendio, tædiique, quod repetitiones huiusmodi creare solent, leuamine. Cui industriæ similem in simili operatione (diuisioni siquidem radicum extractio persimilis est) hîc adducam, vt non adeò te sollicitum habere debeat illa, quæ negotium non rarò facessit, figuræ ad radicem statuendæ electio; cum ex inepta tam facilè restituatur. Ecce quomodo.

Constructio in qua sumitur figura iusto maior.

Proponatur numerus A, ex quo radix eruenda est. Factâ numeri in debita membra distributione; statutâ etiam ad radicem C figura 2, eiusque quadrato 4 subducto à numero 7 primi membri, ac tandem superscripto numero 3 reliquo, vt præscribit primum & secundum extractionis præceptum. Inquirenda est secunda radicis figura ad membrum secundum, quod est 393, pertinens. Duplicatur itaque radix C 2, duplicata, nempe numerus 4, subscribitur sub diuidendi numeri 39, figurâ 9 puncto vacuâ: quæritur quoties diuisor 4 in diuidendo 39 contineatur? Supponatur nouies contineri: & ad radicem statuatur figura 9, & simul sub figura 2 punctulo insignita iuxta præceptum tertium & quartum. Hæc demum

```
        E
     3 3 8
A  7 9 2 8 5
   ----- -----
     4 9       | C 2 9 8

  8 1   D 5 7
  3 2   B 4 9
  ---   -----
B 4 9   E 8
```

demum figura 9 ducitur in figuram 4 diuisoris, & productus 36 demitur à superposito numero 39; quo expuncto, reliquus 3 superponitur. Tandem ducitur 9 in 9, vnde fit 81: qui à superposito numero 32 demi nequit. Ergo figura illa 9 ad radicem C posita iusto maior est: ac proinde in aliam commutanda, totáque operatio corrigenda. Quod præstabitur etsi deletæ euanuerint figuræ omnes, & quidquid superesse debet, obtinebitur, vt exigit problema, cuius hæc erit constructio breuissima.

Demi debuerat numerus 81 à superposito numero 32 diuidendi numeri: conuersâ ergo operatione deme 32 à numero 81: reliquus fiet numerus B 49. Tum duplica radicem C 29, & ex duplo 58 deme vnitatem; reliquus fiet D 57. à quo demes B 49, relinquetur E 8, loco numeri superpositi 32 substituendus. Figura verò 9 radicis iusto maior minuetur vnitate, eiúsque loco reponetur figura 8. Atque ita tota operatio emendata fuerit & numeri omnes necessarij ad operationem prosequendam comparati.

Demonstratio.

Euidens primò est, si loco numeri 32, à quo fieri debebat numeri 81 subductio: repertus fuisset numerus 81: figuram 9 ad radicem rectè fuisse statutam, ipsúmque adeò numerum iam percursum, esse præcisè quadratum: cuius præcisa radix foret C 29. Deest ergo illi numero, quo minus quadratus sit radicis C 29, numerus B 49.

Nec minùs euidens secundò est per Propositionem 8. aut 10 libri huius, si ex quadrato radicis C 29 dematur numerus D 57, qui duplus est radicis C 29, minùs vnitate: haberi quadratum radicis, qui vna vnitate minor est quàm radix C 29, hoc est, haberi quadratum radicis 28.

Hæc cum ita sint. Quadratus maior radicis C 29, quadratum minorem radicis 28, superabit numero D 57: numerum autem A 792, numero tantùm B 49. Ergo numerus A 792 maior est, quàm quadratus radicis 28 numero E 8 qui determinatus est per constructionem dempto numero B 49 ex numero D 57. Ergo si loco radicis C 29 sumatur radix 28 vnitate minor, & numerus 8 substituatur in locum reliqui numeri prioris 32: restituta erit extractio tota absoluìque ex his restitutis numeris tutò poterit.

Quod si post subtractionem numeri ex ineptâ ad radicem posita figurâ

reliqui (qualis fuit hîc 32) à numero ex figurâ radicis inepta in diuiſorem ductâ (qualis eſt hîc 81) ſupereſſet numerus B adhuc maior, quam radix D duplicata minus vnitate; ita vt B ex D ſubduci non poſſet: Tunc ſemel adhuc duplicaretur eadem radix C 29 ſed ex eius duplo 58 non vnitas demeretur tantùm, verum tres vnitates ſubducendæ forent, vt ſtatim declarabo, & ex reliquo D 55 demeretur numerus B paratus vt prius Vel certè planius, radix C 29 duplicaretur, eáque duplicata 58 bis ſumeretur; vt fieret numerus 116: ex quo ſubducendus foret numerus 4 iuxta demonſtrata propoſitione 10. Vt haberetur quadratus; cuius radix eſſet duabus vnitatibus minor, quã radix C 29, eaque foret 27. Ex quo patet, cur tres vnitates demendas aſſeruerim in ſecunda duplicatæ radicis cõſtitutione, licet in prima vnitas tantũ ſubducta ſit à radicis duplo. Debet enim iuxta citatá Prop. 10. Vt habeatur quadratus radicis non vna vnitate tantum; ſed duabus aut pluribus minoris, quã ſit radix quadrati maioris toties duplicata radix maioris quadrati, minus quadrato, ex differentia radicum genito, demi ex quadrato maiore, vt habeatur minor quadratus quæſitus. Ergo hîc, vbi radicum differentia eſt 2, demi debet huius differentiæ 2, quadratus 4 à radice duplicata bis ſumpta. Quare cum in primo radicis duplo vnitas dempta fuerit: debebit vnitas triplex in ſecundo ſubduci: vt ſcilicet quadratus 4 à radice duplicata bis ſumpta, præcisè tollatur. Idem obſeruabitur ſi radices ternario, aut quaternario &c. à ſe inuicem differrent. Demendus enim foret numerus quadratus 9 aut 16, à duplicata radice, ter ſumpta, aut quater: vt ex citata Prop. 10. Eiuſque geometrico diagrammate clarè perſpicitur.

E
2̸ 3 8
A 7̸ 9̸ 2 8 5
· · ·
———
49   (C 29̸8
81   D 57
32   B 49
———   ———
B 49   E 8

Constructio cum assumpta est radix iusto minor.

Idem reponatur paradigma ſuperius A: & eò vſque, vt in præcedenti caſu promota ſit operatio: donec quæratur; quoties diuiſor 4 contineatur in numero ſuperpoſito 39. Ex allata priore conſtructione certum quidem

x6
xx3
A 79x85
47 (C 27
B 63
D 55
E 8

quidem factum eſt ad radicem ſtatuendam eſſe figuram 8. ſed ad hoc inſtitutum noſtrum ſtatuatur figura 7, & ad radicem C, & ad diuiſorem, vt hîc cernis. Ducta igitur figurâ 7 in diuiſoris figuram 4; & producto 28 dempto ex numero ſuperpoſito 39, reliquus fit numerus 11 ſuperſcribendus. Tum eadem quotientis figura 7 ductâ in diuiſoris figuram 7, & producto 49 ſubtracto à ſuperpoſito numero 112 reliquus fit numerus 63 ſuperſcribendus. Quia verò hîc numerus 63 maior eſt quam numerus 54 radicis C 27 duplus contra ſecundam cautionem: ex cuius demonſtratione conſtat reliquum numerum peractis operationibus duplo radicis maiorem nunquam eſſe debere. Ideo emendari debet tum figura 7 radicis, tum reliquus ſuperpoſitus numerus 63. Quod hoc modo abſoluetur expeditiſſimè.

Duplica radicem. C 27, vt fiat 54. Huic adde vnitatem. vt fiat D 55. hunc deme à numero B 63, reliquus fiet E 8. Quem aſſero relinqui debere; ſi vera ad radicem figura poſita fuiſſet: vera autem eſt figura 8, vnitate maior quàm 7; vnitate, inquam, eò quod vnica ſubtractio duplicatæ radicis à ſuperpoſito numero 63 facta eſt. Quod ſi bis ſubduceretur radix duplicata, aucta numero quadrato 4 orto ex numero 2, qui indicat quoties ablata ſit radix C, duplicata ex numero ſuperpoſito, tunc etiam duæ vnitates ad figuram radicis priùs poſitam adderentur; vt debita figura reſtitueretur.

Demonſtratio.

Apertiſſima eſt huius compendij demonſtratio ex propoſitione 7 & 9. Quibus conſtat quomodo ex dato quadrato eiuſque radice generentur quadrati maiores immediatus quidem, & radicis vnitate maioris, ſi duplicetur radix, & duplicatæ addatur vnitas, factuſque numerus ad priorem quadratum minorem addatur. In noſtro ergo caſu, cum numerus A 792 ſuperet quadratum radicis C 27, numero B 63 (reuerà enim quadratus radicis 27 ſubductus eſt à numero A 792, vt exponam, & reliquus factus eſt numerus 63 habeatur autem quadratus radicis 28 vnitate maioris radice 27, ſi duplicetur radix 27, & eius duplo 54 addatur vnitas, vt fiat 55: euidens eſt numerum A 792 ſuperare hunc quadratum radicis 28 numero 8; qui reliquus fit dempto D 55 ex numero B 63. Quæ eadem ratio probat rectè emendari operationem; etſi pluries à reliquo ſuperiore

numero dematur duplicata radix quadrato numero aucta; qui fit ex differentia duarum radicum iuxta propositionem 9. huius.

```
      x6
     3x3
   A 7928 5
     .  .  .
   -----------
      47        (C 27

      B 63
      D 55
   ------
      E 8
```

Quod autem ex numero A 792 subductus fuerit quadratus radicis 27, cum reliquus factus est numerus 63: quod assumpsi paulò ante, ita ostendo. Quadratus radicis 27 æqualis est per 4. Prop. lib. 2. Elemen. duobus quadratis 400 & 49 partium 20, & 7, numerum 27 componentium; & prætereà duobus rectangulis: qui fiunt ex parte 20 in partem 7 ductâ. Sed quadratus 400 partis 20, ipso primo operationis initio subductus est à numero A 792. Cum maximus quadratus 4 in figura 7 comprehensus ab ea subductus est, & reliqua figura 3 fuit superscripta; factúsque propterea est reliquus numerus 392: à quo subducta sunt rectangula duo nata ex multiplicatione partis 20 in partem 7: cum duplicata fuit radicis figura 2 (hoc est 20) & eius duplus numerus 4, siue 40, subscriptus est figuræ 9 diuidendi numeri; ac idem multiplicatus per figuram 7 radicis, & productus 28, siue 280 (qui est duplus ille rectangulus numerus ex 20 in 7 ducto genitus, vt patet (demptus ex superposito numero 392, ac reliquus 112 superscriptus. Denique subductus est ex numero hoc reliquo 112 quadratus 49 figuræ 7 radicis: cum hæc in figuram 7 diuisoris ducta est; & genitus 49 ex 112 subtractus est, reliquo 63 superscripto. Ita vt numerus A 792 superet quadratum radicis C 27 numero 63. Vt supponebam. Ex quo sequebatur deinde vera numerorum restitutio: dum figura 7 radicis, vnitate aucta fuit; & ex 7 facta est 8: & loco prioris numeri 63 reliqui, substitutus est reliquus numerus 8. Iuxta quem promouebitur, & absoluetur extractio inchoata. Quare figuram iusto vel maiorem, vel minorem, ad radicem statutam emendauimus. Quod faciendum erat.

PROP. XVIII. *Probl.*

Numeri non quadrati radicem propinquiorem veræ inuestigare.

Expositio.

Ex Propositione 11. superiori constat quàm multi occurrant numeri quorum

quorum radicem quadratam (cum nulla dari possit) nec integri nec fracti numeri exprimere præcisè queant. Attamen radix dari potest, quæ in se ducta numerum quadratum generet, propiùs & propiùs accedentem ad datum numerũ non quadratum:eáque radix, etsi vera nulla sit, propior tamen veræ dici consueuit. Eo sensu, vt si vera daretur ad eam magis ac magis accederet, nisi mauis ita vocari, quod ad radicem surdam propior fieri queat. Hic ergo quæritur huiusmodi radix veræ propinquior quã fractione aliquâ constare necesse est: radix enim integra alicuius numeri non quadrati est illa radix, quæ in se ducta generat numerum integrum; qui sit quadratus maximus in dato numero comprehensus: Quæ si vel vnitate augeretur, quadratum procrearet dato numero maiorem, augeri ergo debet fracto aliquo numero, vt possit in se ducta numerum quadratum procreare maiorem quadrato maximo, quem datus numerus continet; minorem verò quadrato numero proximè maiore, quam sit idem datus numerus.

Porrò radix huiusmodi veræ propior non minùs potest esse verâ maior quam verâ minor: cum vtroque modo, ad datum numerum non quadratum accessus fieri possit; eóque nomine vnius eiusdemque numeri duplex radix exhiberi potest, verâ scilicet tum maior, tum minor. Quam vtramque definiendi modum sic expono.

Constructio

Datus sit numerus A 792 in medium paulò ante allatus; & cuius radix C 28 inuenta est. Factus est autem reliquus numerus B 8. Quo scilicet numero datus numerus A 792 superat quadratum radicis C 28. Itaque duplica radicem C 28 fiet numerus D 56. Hîc esto denominator fractionis: cuius numerator sit reliquus ille numerus B 8 post extractionem radicis C 28. Dico radicem integram C 28 vna cum fractione BD esse radicem numeri A verâ maiorem. At si denominatori D 56 qui præcisè est radix C duplicata addatur vnitas, vt fiat E 57 fractionis denominator, cuius numerator sit idem reliquus numerus D 8. Dico radicem C 28 cum fractione B E, esse radicem verâ minorem. Quod vtrumque verum comperietur; si radix C 28 tam cum fractione B D, quam cum fractione B E, in se ducatur. Ex priori fiet numerus maior quam sit datus numerus A 792: minor tamen quam quadratus radicis 29 proximè maior numero A. Ex posteriori verò multiplicatione nascetur quadratus minor numero A, sed maior quam quadratus radicis 28, ma-

A 792	
	B 8
(C 28	
	D 56
	B 8
C 28	
	E 57

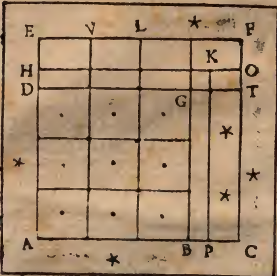
ximus in eodem numero comprehensus. Quod quamquam ita sit à posteriori manifestum. Vt tamen absoluta habeatur cognitio; exponenda est à priori ratio.

Præparatio.

Propono de industria paradigma paucioribus notis Arithmeticis expressum ad faciliorem demonstrationem. Sit, verbi gratia, eruenda radix è numero A 11: ea est C 3 integra: huic addatur fractio B D. cuius numerator B 2 est reliquus absolutâ extractione numerus: denominator autem est D 6, radix scilicet 3 duplicata. Addatur etiam ad eandem radicem C 3 fractio B E: cuius denominator E 7, est radix C 3 duplicata aucta vnitate; illa maior est, hæc minor radice vera numeri A 11.

A 11 B 2
C 3 D 6
B 2
C 3
E 7

Ad hæc diagramma geometricum describatur exemplo huic exprimendo aptissimum. Super recta linea A C in partes quatuor diuisa erigatur quadratum A F: cuius latus A E in partes itē quatuor æquales diuidatur: quarū tres sint A D, sicut tres alterius lateris A C, sunt A B: per quarum partium diuisiones rectæ agantur cancellatim, quadratum A G in quadrata nouem æqualia distribuentes. Quæ quadratum numerum 9 maximum in dato numero 11 comprehensum repræsentant. Gnomon verò E G C exhibet quadratum numerum 16 proximè maiorem quadrato 9; cuius scilicet radix 4 latere A E designata superat radicem 3, siue A D, quadrati A G, vnitate D E. Denique rectangulum D L duo minora quadrata continens exhibet numerum illum 2, qui relinquitur ex numero 11; detracto quadrato 9 maximo, in eo contento: quique numerus 2 est



numerator

numerator fractionis; cuius denominator eſt numerus 7, duplus ſcilicet radicis 3 vnà cum vnitate ad duplum illum 6 additâ. Fractio autem illa euidenter deſignatur rectangulo D L, & gnomone E G C F; rectangulum enim D L tanquam numerator duo quadrata continet ex ſeptem quadratis, in quæ gnomon E G C diſtinguitur. Atque hactenùs ea omnia pertinent ad hoc vtrumque diagramma. Quæ verò ſequuntur, ad vnum eorum quodlibet ſigillatim tanquam propria ſpectant. Prior itaque caſus hâc præter dicta eget præparatione propriâ fiat, vt duplex latus G D, G B quadrati G A tanquam vna recta linea; ad latus E L rectanguli D L: ita D E alterum eiuſdem rectanguli D L latus, ad eius partem D H tum ſuper tota linea A H quadratum A K conſtituatur gnomone H G P ad quadratum A G circumiecto.

Poſterior autem caſus ad radicem verâ minorem pertinens; ſic ad demonſtrationem compatabitur. Fiat vt latus G D duplicatum ſiue latus G D & G B tanquam vna recta linea, vnà cum recta linea D E, ſiue G T. rectæ D E æquali, hoc eſt. Vt duæ rectæ D T & G B tanquam vna, ad rectanguli D L latus E L; ita eius alterum latus D E ad ſui partem D H, Tum ſuper totâ lineæ A H, quadratum A k deſcribatur, & lineæ H K, D G producantur vſque ad O & T, in quibus punctis ſecant lineam F C. His poſitis.

Demonſtratio ad radicem verâ maiorem pertinens.

Demonſtrari debet radicem, C 3 cum fractione B D: cuius denominator eſt B 2 reliquus numerus poſt abſolutam extractionem; denominator autem D 6 duplicata ſcilicet radix C 3 eſſe vera maiorem, hoc eſt, eius quadratum maiorem eſſe dato numero A 11. Cum ergo in diagrammate, recta A D tribus vnitatibus conſtet: recta autem D H, ſit numerator B 2; cuius denominator eſt D E. Eſt enim ex præparatione vt duplicata radix G D 3 & G B 3 hoc eſt, duæ ſimul tanquam vna, continens 6 vnitates; ad rectam E L duas vnitates continentem: Ita D E vnitas ad ſui partem D H. Adeo vt ſi vnitas D E in 6 partes æquales diuiſa concipiatur; earum binas exhibeat recta D H: atque ita D H verus ſit fractionis B D, numerator B 2: cuius denominator eſt recta D E 6. Quo poſito oſtendi debet totus quadratus A K radicis C 3 cum fractione B D, maiorem eſſe dato numero A 11, ſiue gnomonem H G P (dempto ex numero A 11 quadrato 9 maximo, qui in A 11 contineatur) maiorem eſſe rectangulo D L: qui cum quadrato A G 9 complet datum numerum A 11. Id porrò ita oſtenditur.

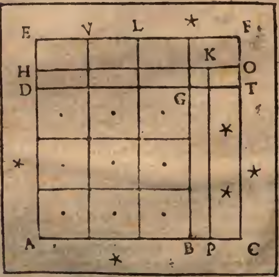
		B 2
A 11	C 3 —	
		D 6

		B 2
A 11	C 3 —	
		E 7

Ex

Ex præparatione ita est duplex linea G D, G B tanquam vna ad lineam E L; vt linea E D ad D H. Ergo rectangulum sub prima G D, G B tanquam vnâ, & quartâ D H, hoc est duo rectangula G H, G P tanquam vnum, æquale est rectangulo D L per Prop. 16. lib. 6. Elem. Sed duo rectangula G H, G P minora sunt gnomone H G P. Ergo rectangulum D L minus etiam est eodem gnomone H G P. Addatur commune quadratum G A: fient duo rectangula G H, G P & quadratū G A æqualia quadrato G A, & rectangulo D L. Sed quadratum G A 9, & rectangulum D L 2 simul æqualia sunt dato numero A 11. Ergo quadratum G A 9, & duo rectangula G H, G P æqualia etiam sunt numero A 11. Sed quadratum G A & duo simul rectangula G H, G P minora sunt quadrato A K (hoc enim quadratum excedit quadrato G K quadratum G A cum duobus rectangulis G H, G P.) Ergo etiam quadratum G A, & rectangulum D L; hoc est, numerus A 11 minor est quadrato A k: cuius radix A H est radix C 3 cum fractione B D: cuius numerator est B 2 reliquus post extractionem numerus, & denominator est D 6, radix C 3 duplicata.

Demonstratio ad radicem vera minorem spectans.



Ex præparatione. Ita est recta D T, & G B tanquam vna, ad rectā E L; vt E D ad D H. Ergo duo rectangula H T, & G P simul, æqualia sunt rectangulo D L per citatam Propositionem 16. lib. 6. Elem. Addatur cōmune quadratum G A fient rectangulum D L, & quadratū G A simul, æqualia quadrato G A, & duobus simul rectangulis H T, G P. Sed quadratum G A, cum rectangulo D L æquale est dato numero A 11. Ergo etiam eidem numero A 11 æquale est quadratum G A cum duobus rectangulis H T, G P. Sed quadratum H P minus est, quàm quadratum G A cum duobus rectangulis H T, G P simul (deficit enim à duobus illis rectangulis cum quadrato G A, excurrente rectangulo

rectangulo K T) ergo quadratum A K minus est dato numero A 11. Ergo huius quadrati A k radix A H, siue C 3 cum fractione B E (cuius numerator B 2 est reliquus post extractionem numerus: denominator autem est E 7 duplicata scilicet radix 3 & vnitas addita) generans quadratum numerum minorem dato numero A 11, minor est vera.

Constat porrò hanc vtramque radicem A H tam verâ maiorem, quàm verâ minorem ad veram propiùs accedere, quàm radicem solam A D numero integro C 3 absque fractione siue B D, siue B E. Additur enim ope harum fractionum ad quadratum A G radicis integræ A D, siue C 3 gnomon H G P, addita recta D H ad rectam D A. Quare numeri non quadrati radicem veræ propinquiorem tam verâ maiorem, quam verâ minorem rectè inuestigauimus. Quod erat faciendum.

Scholium.

Habes ergo modum ex hac Propositione radicem numeri non quadrati ad veram propiùs admouendi: sed minimè tam propè, quin propior ad eam accessus possit obtineri. Si enim quadratum G K, quo quadratum A K datum numerum A 11 excedit, detrahatur à quadrato A K seruata quadrata figura; habebitur radix noui huius quadrati, minor radice A H quadrati A K: quæ tamen vera maior adhuc existet; sed excessu minore quàm radix A H. Similiter ad veram promouebitur radix vera minor A H diagrammatis: si rectangulum K T, quo quadratum A k deficit à dato numero A 11, circumponatur quadrato A k: erit noui huius quadrati radix maior quàm A H; minor tamen adhuc erit quàm vera: deerit enim rectangulum quoddam eius quadrato, simile rectangulo k T; quo deficiet à numero datô A 11. Quod autem tam quadratum G k, quo numerus A 11 exceditur à quadrato A k; quàm rectangulum k T, quo alterum quadratum A k ab eodem numero A 11 deficit; possit in numeris (in quantitate enim continua difficultas non est) applicari ad vtraque quadrata A k, ad illud per detractionem; ad posterius, per additionem; patet. Nam in numeris notum est tam quadratum G k, eiúsque latus D H; quàm rectangulum k T, eiúsque vtrumque latus. Verùm huic vtrique promotioni, cum operosior sit, & breuissimam traditurus sim inferiùs: fusiùs exponendæ supersedeo. Obseruo tantùm hanc duplicem à vera alienam radicem per excessum & defectum, nunquam posse æqualiter hinc inde à vera recedere: sed necessariò vnius excessum ab ea, inæqualem esse alterius ab eadem defectui. Si enim à verà media æqualiter hinc inde recederent: fieret Arithmetica progressio ex minore, & maiore quàm vera simul additis. Ergo iuxta Arithmeticæ progressionis proprietatem: additis maiore & minore; ex ea additione conflati numeri

semissis foret ipsa media siue vera radix in numeris rationalibus nota. Quod impossibile esse demonstratum est propositione 11. huius. Quomodo autem se habeat inæqualis ille à verâ radice recessus, quod scitu pernecessarium, & periucundum non potest non esse sequenti Theoremate definire conabor.

PROP. XIX. *Theor.*

Si è numero radix quadrata eruta numerum relinquat minorem numero radicis inuentæ: radix maior verâ ad veram propiùs accedit, quàm minor vera: At si æqualem radici, aut ea maiorem. Radix verâ minor, verior est quàm maior verâ

Expositio.

In superioris propositionis paradigmate inuestigata est radix quadrata numeri A 11: quæ est C 3; & superest reliquus numerus B 2. Cui tanquam numeratori si subscribatur radix duplicata D 6: vt fiat tota radix C 3 cum fractione BD. erit hæc radix maior verâ, vt Prop. antecedente probatum est: minor verâ erit, si ad duplicatam radicem 6 addatur vnitas; vt fiat E 7 denominator eiusdem numeratoris B 2: quæ fractio BE cum radice integra C 3 sit radix dati numeri A 11.

A 11 C 3 $\frac{B\ 2}{D\ 6}$

C 3 $\frac{B\ 2}{E\ 7}$

Quia igitur reliquus ille numerus B 2 minor est numero radicis C 3 integro. Dico radicem verâ maiorem C 3 cum fractione B D esse veriorem, ad veram scilicet magis accedere; quàm radicem verâ minorem C 3 cum fractione B E.

Rursus. Si è numero 12 radix eruatur: quæ erit C 3, vt priùs: sed relinquetur numerus B 3 æqualis ipsi radici C 3 inuentæ. Dico in eo casu radicem C 3 cum fractione B D verâ maiorem, ad veram minùs accedere, quàm verâ minorem C 3 cum fractione B E. Idémque contingere assero, si reliquus numerus post absolutam extractionem maior sit quàm ipsa radix C 3. Vt si à numero 13 eruatur radix: ea erit C 3: sed relinquetur facta extractione numerus 4 maior, quàm radix C 3. Assero ergo radicem

A 12 C 3 $\frac{B\ 3}{D\ 6}$

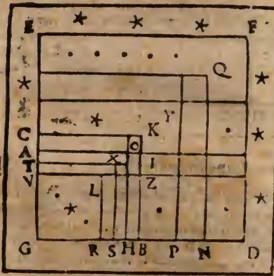
C 3 $\frac{B\ 3}{E\ 7}$

A 13	C 3	$\frac{B\ 4}{D\ 6}$
	C 3	$\frac{B\ 4}{E\ 7}$

dicem vera maiorem C 3 cum fractione B D longiùs à vera radice abesse, quàm absit radix C 3, cum fractione B E verá minor. Quos tres casus demonstro hac constituta præparatione.

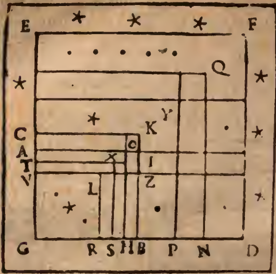
Præparatio ad casum secundum.

In superiori diagrammate perpendendum est quadratum G F: in eo



siquidem latet tam excessus radicis vera maioris: qui semper est quadratus G K; quàm defectus radicis vera minoris, qui semper est rectangulum K T. Exponatur itaque quadratum illud G F formâ paulò ampliori & distinctiori. Ac primò in eo statuatur casus, in quo reliquus numerus est æqualis radici, qui trium propositorum secundus est, & in eo radix eruitur è numero 12. Quo quidem in casu latus G B quadrati G K, quod est excessus quadrati radicis vera maioris supra datum numerum A 12. Est semissis lateris G D, siue G E: secatur enim G E (quæ lineæ D E superioris diagrammatis respondet) proportionaliter in medio C, vt duplicata radix D 6 secatur à reliquo illo numero B 3. Hoc est, in duas partes æquales. At verò quia in eodẽ casu, vt habeatur radix vera minor, iuxta superius diagramma, secari debet latus G E, vel G D in septem partes æquales, referentes scilicet duplicatam radicem 6 cum vnitate ipsi duplicatæ radici 6, addita, & ex eis sumi debet numerus 3 reliquus post extractionem ipsimet radici C 3 æqualis: recta G A, vel G H, tres illas partes æquales (qualium G E, vel G D est septem) assumens, minor erit semisse G C, vel G B, earumdem rectarum G E, vel G D. Iam per A, & per H ducantur perpendiculares ad G E, & G D sese in O intersecantes: constituent illæ quidem quadratum G O (cum G A, & G H sint æquales) at A O producta rectangulum O D ef-

formabit; quod reffert rectangulum K T diagrammatis superioris; & hoc



ipsum erit, quo quadratum à radice minore, quam verâ C 3, cum fractione B E, genitum, à dato numero A 12 superatur. Demonstrandum ergo est rectangulum O D minus esse quadrato G K. Sic enim constabit defectum radicis verâ minoris minorem esse, quam excessum radicis vera maioris: atque adeo radicem verâ minorem ad veram propiùs accedere; quam verâ maiorem. Hoc autem clarè demonstratur.

Demonstratio secundi casus.

Duo rectangula I G, I D super bases æquales B G, B D, & æqualis altitudinis æqualia sunt. Æqualia item sunt duo complementa O C, O B per Prop. 43. libri 1. Elem. Quare si ad rectangulum I D addatur rectangulum O B, vt fiat rectangulum O D: ad rectangulum verò A B addatur rectangulum O C: erit rectangulum O D æquale gnomoni, qui componitur ex quadrato O G & duobus rectangulis O C, O B. Sed quadratum K G gnomonem illum superat quadrato K O. Ergo etiam idem quadratum K G superat rectangulum O D, eodem quadrato K O. Quod cum ita sit constat in hoc casu, in quo numerus reliquus æqualis est radici integro numero expressæ; radicem verâ minorem, veriorem esse quàm verâ maiorem.

Præparatio ad primum casum.

Primus hîc casus supponit numerum absoluta extractione reliquum ipsa radice esse minorem: eóque posito demonstrari debet radicem verâ maiorem præcisiorem esse, quàm verâ minorem. Sit ergo eadem recta G D, quæ in casu proximo, diuisa in sex partes æquales, vt radix duplicata 6 (idem resumo paradigma antecedens) exigit: diuisa item in partes

tes ſeptem, vt eadem radix duplicata, & aucta vnitate poſtulat. Sit verò numerus A 11 datus ex quo eruta radix, eſt C 3, & relinquitur B 2; qui

A 11 . C 3	$\frac{B\ 2}{D\ 6}$
	$\frac{B\ 2}{E\ 7}$

erit numerator fractionis B D radicem verâ maiorem exhibentis; ſicut & fractionis B E; quæ verâ minor eſt. Cum ergo reliquus numerus facta extractione, ſit B 2. ſumantur ex linea G D in ſex partes diuiſæ, duæ partes G S: duæ item G R eiuſdem lineæ G D, dum in partes ſeptem diuiſa fuit. Fiat autem ſuper G S quadratum G X: & ſuper A D rectangulum, cuius altitudo R L æqualis ſit lineæ R G. Erit ergo quadratum G X, vt ex Prop. antecedente conſtat, exceſſus quadrati ex radice verâ maiore geniti, ſuper datum numerum A 11. Rectangulum vero L D, erit defectus, quo quadratum radicis verâ minoris à numero A 11 deficit. Demonſtrandum ergo eſt iuxta hypotheſim Propoſitionis, quadratum G X minus eſſe rectangulo L D: ſic enim conſtabit radicem verâ maiorem minùs à vera abeſſe, quam verâ minorem. Quod vt concludatur euidenter: eſto G B ſemiſſis totius rectæ G D, ita vt G B tres eius ſenas partes contineat recta autem G H, tres eiuſdem ſeptenas. His poſitis, ita ratiocinabere.

Demonſtratio caſus primi.

Vt G B trium partium ad G S partes eius duas: ita G H trium partium ad G R partes eius duas. Et permutãdo. Vt G B ad G H; ita G S ad G R. Ergo per Prop. 16. lib. 6. Elem. rectangulum B V ſub prima B G, & quarta R G, ſiue G V ipſi poſitâ æquali, æquale eſt rectangulo H T ſub ſecundâ H G, & tertia G S, ſiue G T contento. Sed rectangulum H T maius eſt quadrato G X. Ergo etiam rectangulum B V ſiue ei æquale Z D (ſunt enim ex hypotheſi B G, B D æquales) maius eſt eodem quadrato G X. Quod ſi ad rectangulum Z D addatur rectangulum Z R: multò magis rectangulum L D maius erit quadrato G X. Sed quadratum G X, vt dictum eſt, eſt exceſſus quadrati ex radice verâ maiore producti ſupra datum numerum A 11. Rectangulum autem L D, eſt defectus quo quadratum ex radice verâ minore genitum ab eodem numero A 11 deficit. Ergo præciſior eſt radix maior verâ, quam minor verâ: cum facta extractione relinquitur minor numerus, quàm ſit ipſa radix.

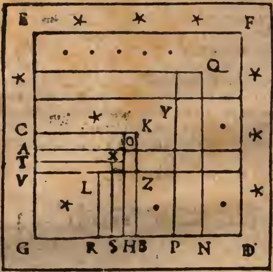
Præparatio ad tertium caſum.

Tertius hîc caſus occurrit: cum abſoluta extractione ſit numerus reliquus maior ipſa radice inuentâ. Vt radix numeri A 13, eſt, C 3; & relinqui-

A 13 $\quad C\,3\,\frac{B\,4}{D\,6}$

$\quad C\,3\,\frac{B\,4}{E\,7}$

tur B 4 maior, quam radix C 3. In hoc ergo casu asseritur radix C 3 cum fractione B D maior verâ, minùs ad veram accedere, quam minor vera C 3 cum fractione B E. In hoc diagrammate recta G P contineat quatuor septenas partes totius lineæ G D: recta autem G N, quatuor item eiusdem lineæ G D partes senas: fiant demum super ipsis duo quadrata G Y, G Q. Erit ergo rectangulum Y D quadrati numeri ex radice C 3 cum fractione B E geniti defectus à dato numero A 13. Quadratum autem G Q, erit excessus; quo quadratus numerus à radice maiore verâ C 3 cum fractione B E productus superat datum eundem numerum A 13. probandum ergo est quadratum G Q maius esse rectangulo Y D. Sic enim constabit radicem verâ maiorem à verâ longiùs recedere, quàm verâ minorem. Probatur autem sic.



Demonstratio tertij casus.

Vtraque linea G P, G N maior est semisse G B totius lineæ G D; linea enim G P continere supponitur quatuor partes ex septem, in quas diuisa est tota G D, linea verò G N quatuor item ex partibus sex eiusdem lineæ. Adhæc, constat rectam G N quatuor partes senas lineæ G D continentem, maiorem semper fore lineâ G P; quæ eiusdem lineæ G D in septem partes diuisæ, partes item quatuor continet. His positis quadratum G Q super recta G N maius semper erit quadrato G Y super rectâ G P constructo. Deinde. Cum recta G P superet semissem B G, siue B D totius G D: erit quadratum Y G maius rectangulo Y D per Prop. 1. lib. 6. element. Sed quadratum Q G maius semper est quadrato Y G: multò ergo maius erit quadratum Q G rectangulo Y D. Constat ergo excessum supra datum numerum A 13, ex radice vera maiore ortum, quando reliquus numerus superat

ſuperat radicem, eſſe maiorem; quàm defectum ex radice verâ minore emanantem: Atque adeò in hoc caſu radicem vera minorem præciſiorem eſſe, quàm verâ maiorem.

Vera ergo eſt ſecundum tres eius caſus tota Propoſitio. Quod demonſtrandum erat.

PROP. XX. *Theor.*

Si quadratus numerus quadratum numerum multiplicet: quadratus numerus producitur: cuius radix eſt numerus ex radicibus multiplicatorum quadratorum in ſe ductis genitus.

Expoſitio.

A 4.	B 9.	C 36
D 2.	E 3.	F 6

Quadratus A, quadratum B multiplicet; & producat numerum C. Dico numerum C quadratum eſſe. Cuius radix eſt F, ex radice D quadrati A, in radicem E, quadrati B ductâ.

Demonſtratio prioris partis.

Plani numeri ſimiles in ſe mutuò ducti, quadratum numerum producunt per Prop. 1. lib. 9. Elem. Sed A & B plani ſunt ſimiles. Sunt enim quadrati, quorum ſcilicet latera illos generantia proportionalia ſunt, in ratione æqualitatis. Ergo productus numerus C ex mutua multiplicatione A & B; eſt quadratus numerus.

Demonſtratio partis poſterioris.

Numerus D multiplicans D ſeipſum, generat A; & multiplicans E, generat F. Numerus autem E multiplicans E, & D, generat F & B. Ergo per Prop. 11. lib. 5. Elem. ita eſt A ad F; vt F ad B: vtraque enim ratio æqualis eſt rationi D ad E. Cum ergo tres numeri A, F, B ſint continuè proportionales: idem numerus fiet ex primo A, in tertium B ducto; qui fit ex ſecundo F in ſe. Per Prop. 20. lib. 7. Elem. Fit autem quadratus C ex A in B. Ergo idem quadratus C fiet ex F in ſe ducto. Hoc eſt, numerus F eſt radix quadrata quadrati C. Quare ſi quadratus numerus &c. Quod erat probandum.

PROP.

PROP. XXI. *Theor.*

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur, ſiue diuidat: illum metietur per quadratum numerum: cuius radix producitur; ſi radix quadrati diuiſi per radicem diuidentis diuidatur.

Expoſitio.

Quadratus numerus B diuidens quadratum C producat numerum A. Dico A quadratum eſſe: Dico inſuper eius radicem D gigni diuiſâ quadrati C, radice F, per radicem E quadrati B

Demonſtratio prioris partis.

Numerus C diuiditur per B, & generat A ex ſuppoſitione: idem numerus C diuiſus per ſuam radicem, F ipſammet ſuam radicem F producit. Ergo ita eſt productus F ad productum A, vt diuidens B ad diuidentem F per Prop. 65. lib. 2. qua conſtat diuiſo quouis numero per duos diuerſos numeros, numeros produci diuidentibus reciprocè proportionales: ita vt F medius ſit proportionalis inter B & A. Cum itaque tres ſint continuè proportionales B, F, A: primus autem B ſit quadratus, quadratus erit & tertius A per Prop. 22. lib. 8. Elem. Quod primò erat probandum.

A 4	B 9	C 36
D 2.	E 3.	F 6

Demonſtratio partis poſterioris.

Oriatur numerus D ex diuiſione radicis F, per radicem E probandus itaque eſt numerus D eſſe radix quadrati A. Quod ita concluditur. Numerus B diuidens numerum C produxit ex ſuppoſitione numerum A. Ergo ex definitione diuiſionis lib. 1. Prop. 40. allata, ita ſe habet A ad vnitatem; vt C diuiſus, ad B diuidentem. Sed quadratus C ad quadratum B (ſunt enim ex ſuppoſitione quadrati ambo) per Prop. 9. lib. 8. Elem. habet rationem duplicatam radicis ſuæ F ad radicem E quadrati B. Ergo numerus A ad vnitatem habet rationem duplicatam radicis F ad radicem E. Cum autem E diuidens F producat D: ſitque propterea D ad vnitatem ex definitione diuiſionis iam citatâ, vt diuiſus F ad diuiſorem E: erit ratio numeri A ad vnitatem duplicata etiam rationis numeri D ad vnitatem. Eadem ergo eſt ratio numeri A ad numerum D, & numeri D ad vnitatem (ſic enim duæ rationes æquales rationi ad vnitatem ſtatuentur inter A & vnitatem; ſiue ratio A ad vnitatem in duas rationes æquales reſoluetur.)

Sunt ergo tres numeri. Vnitas, D & A continuè proportionales. Quare per Prop. 20. lib. 7. Eucl. ſi in ſe ducatur medius numerus D; idem producetur numerus, qui fit ex vnitate ductâ in numerum A. Vnitas autem multiplicans A, ipſummet A generat. Ergo & D ſeipſum multiplicans producit A. Ergo D eſt radix quadrati numeri A. Quod ſecundo loco propoſitum erat. Quare. Si quadratus numerus quadratum numerum &c. Quod erat oſtendendum.

PROP. XXII. *Theor.*

Si quadratus numerus, numerum non quadratum multiplicet: numerum non quadratum generabit.

Demonſtratio.

A 4	B 6	C 24

Quadratus numerus A numerum non quadratum B multiplicet, & generet C. Probatur C non eſſe quadratum. Si enim quadratus foret C; cum producatur ex multiplicatione numeri A per B: ſi idem C quadratus per quadratum A diuidatur, produci debet quadratus per Prop. antecedentem. Cum ergo producatur B: erit B quadratus. Quod eſt abſurdum. Quare ſi quadratus. Quod probari debuit.

PROP. XXIII. *Theor.*

Si numerus non quadratus per numerum quadratum multiplicetur: cuius radix ſit numerus impar ille, qui additus ad maximum quadratum numeri non quadrati multiplicati quadratum proximè maiorem conſtituit: numerus producetur non quadratus per Propoſitionem proximam, cuius maximus quadratus maior erit quadrato, qui fit ex eodem multiplicante quadrato, in quadratum maximum multiplicati numeri non quadrati.

Expoſitio.

Implicatior prima ſpecie apparet hæc Propoſitio: quæ tamen terminis benè perceptis planiſſima futura eſt. Detur ergo numerus quiſpiam non

quadratus A 11: cuius maximus quadratus, hoc est, maximus quadratus in eo contentus est B 9: ad quem si addatur impar C 7, notus ex Propositione 7. Fit quadratus D 16 proximè maior. Dico igitur, si huius imparis C 7 quadratus numerus E 49, ducatur in datum numerum A 11 non quadratum; vt fiat non quadratus numerus F 539. Dico inquam, maximum quadratum huius numeri F 539, hoc est, in eo numero contentum; maiorem esse numero quadrato: qui iuxta Propositionem 20 producitur ex numero E 49 quadrato in quadratum B 9 maximum in numero A 11 contentum ducto siue, quod idem est, dico quadratum, qui iuxta citatam Propositionem nascetur ex quadrato E 49 in quadratum B 9 ducto non fore quadratum maximum in numero F 539 genito ex quadrato E 49 in datum numerum A 11 ducto contentum.

A 11	E 49	F 539
B 9	B 9	
C 7	G 441	H 529
D 16	k 21	L 23

Hanc quidem ita expositam Propositionem probabit à posteriori calculus iuxta hypothesim initus. Si enim quadratus E 49 ducatur in quadratum B 9, fiet quadratus G 441: cuius radix est k 21 ex radicibus 7 & 3 quadratorum E & B in se ductis genita per Prop. 20. At verò educta radix ex numero F 539, est L 23: cuius quadratus est H 529, maximus proinde in numero F contentus, maior quàm G 441 inter quem & numerum F 539 duo quadrati intercipiuntur, vt radix L 23 duabus vnitatibus superans radicem k 21 demonstrat. Verùm probatio à priori adduci debet. Quæ ad solutionem sequentiũ non leuis momenti problematum, apertura est.



Præparatio.

Resumatur schema Propositionis 18. Huic

A 11.	E 49.	F 539.
E 49.	R 10.	T 490
C 7.	E 49.	6
B 9.	V 484	
441		

paradigmati

paradigmati apprimè conueniens in eo siquidem eruebatur radix quadrata è numero 11 : in quo maximus quadratus erat A G 9; & fiebat reliquus numerus 2, rectangulo D L expressus : qui, vt radix veræ propinquior haberetur, conuersus est in gnomonem H G k B. & radix A H veræ propinquior, quàm sola radix A D inuenta; dum recta E D secta est in H secundum rationem, quam habet gnomon E G F C ad rectangulum D L. Quæ ratio est ea; quam definit numerus impar 7 (qui ad quadratum A G 9 additus quadratum proximè maiorem A F 16 componit) ad numerum D L 2 relatus. His ad citatam Propositionem spectantibus refricatis. Aduertendum est hîc præterea : dum numerus A 11 huius schematis multiplicatur per E 49; & fit F 539. Omnia illa 11 quadrata tam 9; quæ totum quadratum A G continet; quam 2, rectangulo D L comprehensa, diuidi in quadrata 49. Vnde fit, vt cuiuslibet illorum 11 quadratorum; quadrati, verbi gratiâ, D V; latus, siue radix D E, diuidatur in 7 partes; vt scilicet in se ducta quadratum numerum generet 49. His positis, quæ certissima sunt & apertissima, non minùs manifesta euadit Propositionis conclusio.

Demonstratio.

Si linea D E in partes 7, vt proximè monui, diuisa est: duæ lineæ G D, G B; quæ ambæ simul sex lineas continent æquales ipsi lineæ D E, súntque duplicata radix quadrati A G, diuidentur in partes 42: hæ autem particulæ singulæ erunt bases vnius quadrati ex illis 49, in quæ diuiditur, vel diuidi concipitur quadratum D V. Ita vt; si H D in hoc diagrammate supponatur nunc esse pars septima lineæ D E; rectangulum G H contineat quadrata 21, totidémque rectangulum G P : & ambo simul quadrata 42 : rectangulum verò G O ex eisdem quadratis continebit septem, & verò ex demonstratis Propositione superiori 18. tria rectangula simul G H, G O, G P æqualia sunt quadrato D V 49. Si ergo ex rectangulo G O septem quadrata continente assumatur quadratum vnum G k; vt totus gnomon H G k B constituatur: absoluetur totum quadratum A K; conflatum ex quadrato A G, & ex gnomone H G k B, qui minor est quàm quadratum D V 49, rectangulo k T. Cum ergo quadratus numerus E 49; cuius radix est C 7, impar ille qui multitudinem quadratorum ad quadratum A G, quadratis 9 minoribus constans addendam definit, vt fiat quadratum A F 16 proximè maius quadrato A G 9. Cum, inquam, quadratus E 49 multiplicans quadratum A G 9, cum quadrato D V 1, hoc est, multiplicans in schemate numerum R 10 producat quadratum A k vnà cum rectangulo K T, siue numerum T 490 : euidens fit quadratum E 49 è numero illo impare C 7 genitum, dum multiplicat R 10; nu-

merum T 490 generare, qui contineat quadratum maiorem A K numero V 484 expressum (qui fit reliquus si rectangulum K T 6 dematur ex numero T 490) quam sit quadratus G 441 quem generat per propositionem 20. Quadratus numerus E 49 ductus in quadratum B 9 maximum in numero R 10 contentum. Quod si in hoc casu, in quo quadratus E 49 ex impari illâ radice C 7 oriundus, multiplicat numerum R 10 vnicâ tantùm vnitate maiorem quadrato B 9 maximo in eo incluso: vera sit ostensa Propositio: multo potiori iure vera futura est: si idem quadratus E, 49, duceretur in numerum maiorem quam sit 10, vt in 11, 12 &c. vsque ad proximum quadratum numerum 16, quadrato 9 maiorem. Quæ demonstratio cum vniuersalis sit, etsi ad hypothesim particularem clarioris expositionis gratiâ, eam applicuerim, vniuersaliter etiam vt vera admitti debet Propositio. Quod erat ostendendum.

Corollarium.

Colligitur ex allata ratiocinatione, quò maior quadratus numerus duceretur in numerum 10 quadrato A G & quadrato minore D V diagrammatis expressum, eo plures haberi gnomones quadraro A G circumponendos: vnde fiat radix A D integra numeri A G 9 maior ac maior in infinitum; prout maiores quadrati ad multiplicationem assumentur. Id enim eodem modo demonstrabitur: quo ostensum est assumpto quadrato numero 49 in multiplicatorem quadratulos ministrare, qui in gnomonis formam circumponi queant circa inclusos quadratos A G, A K. Deficient tamen semper nec attingent datum numerum; eò quod rectangulum velut rectangula K T semper reliquum habebitur extra gnomones quadrata componentes.

PROP. XXIV. *Theor.*

Fractionis cuiusvis quadratus, fractio est: cuius numerator est quadratus numeratoris illius; & denominator illiusmet denominatoris quadratus. Contrà verò fractionis radix quadrata; est fractio: cuius numerator est numeratoris illius radix quadrata; denominator autem denominatoris radix.

Demonstratio.

Sit fractio A B. Dico eius quadratum esse fractionem E F: cuius numerator

A 3	E 9	C 3
B 5	F 25	D 5

merator E est quadratus numeratoris A : & denominator F est quadratus denominatoris B. Nam ponatur fractio C D iisdem terminis constans, quibus constat A B : tum in se ducantur mutuò fractiones illæ iuxta propositionem 24. lib. 2. duci debet A in C, & B in D : vt habeatur verus numerus ex duplicis huius fractionis A B, C D mutua multiplicatione genitus. Habetur autem E F. Ergo E F fractio est, cuius numerator fit ducto A in C, siue A in seipsum cum C positus sit numeratori A æqualis. Denominator autem eodem modo fit ex B in se, cum fiat ex B in D illi positum æqualem. Quod est primum.

Ex primo secundum euidẽter sequitur. Radix enim quadratæ fractionis E F non potest alia esse, quàm fractio A B: cuius numerator A est radix numeratoris E, denominator autem est radix denominatoris F. Siquidem quadrati numeri radix est numerus: qui in se ductus numerum illum quadratum generat. Proximè autem ostensum est fractionem A B in se duci si tam numerator A quàm denominator B ducantur in seipsos: ex qua multiplicatione fit fractio quadrata E F. Quare fractionis cuiusvis quadratus est fractio &c. Quod erat probandum.

PROP. XXV. *Probl.*

Numeri cuiusvis integri; qui quadrata radice præcisâ careat; radicem quadratam, quàm proximam veræ libuerit constituere.

Expositio.

Numeri radice vera carentis radicem veræ propiorem inuestigauimus Propositione 18. Ita tamen vt in propinquitatis certo quodam gradu sisteretur: quem definiuimus addita ad radicem integro numero constantem inuentam, fractione; cuius numerator foret reliquus post absolutam extractionem numerus; denominaror autem conflaretur ex inuentâ radice duplicata, si vera maior radix desideraretur; aut si exigeretur verâ minor; ad duplicatam radicem adderetur vnitas. Hîc verò longè celebriorem radicis numeri non quadrati ad veram, promotionẽ expositurus sum: cum nullo promouendi termino claudatur; sed in infinitum maior, & maior fieri queat: & quidem, quod acceptius futurum est, planissimâ methodo, planissimáque demonstratione confirmata.

Constructio.

Detur numerus A quilibet, siue quadratus reuera fuerit; siue non quadratus, veraque radice carens; quod operationis prosecutio aperiet. Hunc numerum A multiplica per quadratum quempiam numerum decadicum: qui ex radice quapiam scilicet decadica in se ductâ nascatur (posset idem per alium numerum quadratum, imò etiam non quadratum multiplicari, vt docebitur in scholio: sed per nullum compendiosiùs, quam per decadicum, vt patebit) ex radice nimirum: cuius prima figura sit vnitas quam sequantur aliquot figuræ 0: cuiusmodi sunt numeri 10 100. &c. Nunc multiplicetur A per B 100 quadratum ex radice G 10 in se ductâ genitum, vt fiat C. Deinde ex eo numero C eruatur radix D 56. Neglecto interim numero, qui post extractionem superest, (qui hîc est 64) hanc radicem inuentam D 56 diuide per G 10 radicem quadrati B 100 multiplicantis: fiet quotiens numerus integer E 5 cum fractione F G.

A 32.
B 100
C 3200
D 56 F 6
E 5
G 10 G 10

Dico igitur hunc quotientem radicem esse numeri A, verâ quidem minorem, veræ tamen propiorem, quam ea radix foret: quæ ex solo simplici numero A 32 educeretur: quæ solâ figurâ E 5 absque fractione F G exprimeretur. Quod si præcisior adhuc quàm sit E 5 cum fractione F G desideretur: ea obtinebitur: si per quadratum decadicum maiorem 10000 radicis 100 maioris quam 10, numerus A multiplicetur, & ex producto 320000 radix eruatur. Ea foret 565 (neglecto reliquo) Quæ diuisa per radicem 100 quadrati 10000 in multiplicatorem assumpti, exhiberet pro quotiente integrum numerum 5 cum fractione, cuius numerator esset 65; denominator autem esset, vt esse solet, diuisor 100.

Demonstratio.

Numero A 32, cuius radix quæritur, subscribatur vnitas H, vt fiat fractio A H. Quæ multiplicetur per quadratum decadicum B 100: fiet fractus C B æqualis fracto A H.

A 32 C 3200 E 56 R 6
B 100 F 5
H 1 B 100 L 10 L 10

Cum enim duo numeri A, H, per numerum B multiplicentur, & producantur C B: eadem erit ratio producti C ad productum

ductum B; quæ est multiplicati A ad multiplicatum H per Prop. 3. lib. 2. Ergo per Prop. 5. lib. 2. fractio C B æqualis est fractioni A H. Radix ergo fractionis C B radix est eadem fractionis A H. Radix autem fractionis C B ex constructione iuxta propositionem præcedentem 24, est fractio E L. Ergo eadem fractio E L radix etiam est fractionis A H. Si itaque numerator E 56 diuidatur per denominatorem L 10: fiet quotiens F 5 numerus integer, cum fractione R L adhærente: cuius fractionis R L accessione ad integrum F; nascetur radix numeri A siue fractionis C B ei æqualis, veræ propinquior; quam foret sola radix F 5 numero integro designata: quæ numero integro A 32 conueniret, si ex eo tantùm erueretur. Habetur ergo iam radix numeri A 32 radice præcisâ carentis, veræ propinquior, si per quadratum 100 multiplicetur. Quod si per quadratum maiorem quàm 100 idem A 32 multiplicaretur: radix haberetur adhuc præcisior. Nam

Schema præcedenti simile componatur assumpto in multiplicatorem

$$\frac{A\ 32}{H\ 1}\ B\ 10000 \qquad \frac{C\ 320000}{B\ 10000} \qquad \frac{E\ 565}{L\ 100} \qquad F\ 5\ \frac{R\ 65}{L\ 100}$$

quadrato B maiore 10000: cuius radix est L 100. absoluta operatione habebitur radix numeri A 32, ea quæ exprimitur fractione E L, siue numero integro F 5 cum fractione R L: quæ maior est quàm sit prius inuenta: cuius numerator erat tantum 6, denominator autem 10. Quod quidem verum apparebit; si vtraque radix in se ducatur. Hæc enim posterior numerum genitura est, minorem quidem quam numerum A 32) est enim radix verâ minor, cum è numero C 320000 erutâ, aliquid reliquū fiat, quod negligitur) maiorem tamē, quam sit numerus genitus ex priore radice eruta tantùm è numero C 3200. Sed hac omissa à posteriori deducta ratione: idem eleganter & euidenter colligitur ex ratiocinatione & diagrammate ad probationem propositionis 23 superioris allatis, eiusque corollario. Quæ consulas. Quod cum ita sit aperta euadit propositio; cuiuscumque enim numeri radice carentis, radicem inueniemus in infinitum veræ propiorem assumptis in infinitum maioribus quadratis numeris, vt assumi nihil obstat; per quos datum numerum multiplicemus; & ex multiplicato radicem educamus. Problemati ergo factum est satis. Sed quædam restant. Obseruanda in hoc scholium congesta.

Scholium.

Ex problematis huius solutione generali demonstratâ patet; cui fundamento nitatur praxis illa satis vulgaris radices numerorum non quadratorum

torum, eóque nomine minimè præcisas ad præcisiores admouendi. Quæ sic instituitur. Detur numerus A 32, vnde radix quadrata eruenda est; apponãtur ad datum numerum A binarij aliquot figurarum o, vt habet numerus C. Tum à numero C radix eruatur E 565: à qua tot abscindantur figuræ eius posteriores, quot binarij figurarum o ad numerum datum appositi sunt: eæque abscissæ figuræ fiant numerator fractionis; cuius denominator sit numerus constans vnitate cum tot sequentibus figuris o, quot sunt figuræ numeratoris; quot scilicet sunt abscissæ ex radice, siue quot binarij figurarum o appositi sunt ad datum numerum. Hæc enim fractio addita ad numerum integrum; qui post figurarum abscissionem superest in radice: radicem veræ propiorem constituit. Vt in hoc exemplo. Additi sunt duo binarij figurarum o, & ex facto numero C eruta est radix E 565. abscindantur ergo ex ea duæ posteriores figuræ R 65: quibus subscribatur numerus L 100 vnitate, & duplici figura o constans; vt fiat fractio R L: quæ adiungatur ad integrum numerum E 5 reliquum ex radice 565 post abrasas figuras duas 65. Erit hîc integer E 5 cum fractione R L radix numeri A 32 ad veram propior facta. Hæc est illa methodus vulgaris. At quis non videat eam cum hîc traditâ planè conuenire? Additio enim illa binariorum aliquot figurarum o; est ipsamet hîc imperata multiplicatio numeri A 32 per quadratum radicis alicuius decadicæ, verbi gratiâ, radicis 10. 100 &c. Huiusmodi enim quadrati figuris o semper constabunt duplò pluribus, quàm ipsorum radices, vt patet. Nam 10 in se ducitur, dum 10 in 10 ducitur: quæ multiplicatio absoluitur, vt libro 1. ostensum est, dum vtriúsque numeri 10 & 10, figuræ o simul colliguntur, hoc est, figura o bis sumitur ad figuram 1 præfixam addenda. Similiter quadratus radicis 100 habetur; si duplex figura illa o, bis apponatur ad figuram 1. & ita de cæteris. Dum autem ex radice inuenta, vt superiori 565, iubentur abscindi duæ posteriores figuræ, quia duplex binarius figuræ o appositus est ad numerum A 32: eásque figuras abscissas constitui numeratorem fractionis, cuius denominator sit vnitas cum tot figuris o, quot abscissæ sunt figuræ in numeratorem, assumptæ: aliud nihil præcipitur, quàm vt radix inuenta diuidatur per radicem quadrati decadici, qui numerum A 32 multiplicauit. Ex qua diuisione radix numeri A habetur. Siquidem per Prop. 21. si quadratus C 320000 diuidatur per quadratum 10000, fiet quadratus A 32 (etsi quadratus præcisè non sit hîc numerus; habetur enim tantùm ratio quadrati in eo contenti maximi) cuius radix habetur diuisâ quadrati C, radice

A 32. C 32 00 00 | E 565

R 65
E 5 —
L 100

E 565, per radicem L 100, quadrati 10000. Ex qua diuisione fit radix E 5 cum fractione R-L. Habes ergo methodi illius radices promouendi hactenus admissæ, sed hactenùs non probatæ claram demonstrationem ex Propositione præcedenti deductam.

Secundò hic illud recolo, cuius memini initio. Nimirum si proposi-tus numerus, cuius radix quæritur, verè quadratus fuerit. Quod quia necdum notum est; multiplicatur numerus huiusmodi per alium quempiam quadratum numerum vt radix eius præcisior postmodum habeatur: fore vt id ex ipsâ operatione colligatur. Proponitur numerus A 225: cu-ius radix quæritur: quæ an præcisa futura sit, nec ne, notum minimè est. Illum interim multiplico per quadratum C 36, cuius radix est D 6. Fit autem ex ea multiplicatione numerus B 8100. Cuius radicem inuenio E 90, hanc iuxta solutionem huius Propositionis diuido per radicem D 6: fit autem quotiens integer numerus F 15.

A 225	C 36	B 8100	
	D 6	———	
			(E 90
			———
			D 6 (F 15

Qui est radix numeri A præcisa. Ergo numerus A præcisè quadratus est. Quare seruatâ hîc præscripta methodo radix habetur, vel præcisa, si propositus numerus verè quadratus est; vel ad præcisam proximè accedens: si diuisio E per D quotientem F generat integrum cum fractione.

Tertiò. Obseruandum est, cum numerus occurrit non quadratus, qualis est A 32. Qui multiplicatus per quadratũ 10000 genuit C. Vnde eruta est radix F 5 cum fractione R L. Obseruandum, inquam, radicem hanc verâ minorem esse, dum enim eruta est, omittitur quispiam reliquus numerus tanquam nullius momenti, vt hîc 795: Ac proinde radix hæc in se ducta minimè genitura est integrum numerum A 32, sed alium eo minorem. Vt ergo habeatur radix maior verâ, adde ad numeratorem R 65 fractionis R L, vnitatem, vt fiat nouus numerator V 66, qui nouam fractionem V L constituat. Erit integer F 5 cum fractione V L radix maior verâ; numerúmque, si in se ducatur, gignet maiorem dato numero A 32. Clara est ratio. Nam ad radicem F 565 numeri C, loco figuræ 5 vltimò positæ, posita fuisset figura 6 maior haud dubiè posita fuisset, quàm par sit: subtractio enim numeri ex ea in numerum diuisorem ductâ geniti, à superiore subduci non posset: quod aduersatur traditis ad extractionem radicum præceptis Propositione 14. Vtra verò fractio ex

		R 65	V 66
A 32.	C 320000. F 5	—	—
		L 100	L 100

duabus R L, V L cum integro F 5 numeri A 32 radicem veræ propinquiorem præstet: id ex Propositione 19. superiore definitur: quâ constat in proposito exemplo verâ minorem radicem, veriorem esse, quàm verâ maiorem: eò quod reliquus ille numerus 795 post absolutam extractionem maior sit quàm radix inuenta F 565. Hinc ergo habetur numeri dari radix, & verâ minor, & verâ maior; & vtra ex duabus ad veram magis accedat, eóque nomine sit præ altera eligenda.

Quartò. Obseruabis rationem quandam habendam esse inter assumendum quadratum numerum; quo datus numerus, vnde radix eruenda, multiplicetur; determinationis illius, cuius mentio habetur Propositione 23. Superiori. Vt scilicet, quadratus ille maior sit quadrato, qui fit ex impari numero quadrati dato numero proximè maioris constitutiuo iuxta Propositionem 6. contingat alioqui interdùm radicem nullo modo ad veram promoueri ope huius operationis huius exemplum esto. Eruenda est radix à numero A 26. Hunc multiplicas per quadratum B 100; cuius radix est C 10. Producitur D 2600. Ex eo radix educta est E 50: quæ diuidi debet per radicem C 10 quadrati numeri B in multiplicatorem assumpti. Sed diuisa radice E 50 per radicem C 10, nascitur quotiens siue radix F 5 quæ illa ipsa est, quæ educeretur ex ipso solo dato numero A 26, vt patet: nec promota est per multiplicationem numeri A per quadratum B. Quid ita? quia radix C 10 quadrati B 100, minor est impare numero 11 constitutiuo quadrati proximè maioris quadrato maximo, 25; quem datus numerus A 26 continet: qui impar numerus ex Propositione 7. est idem cùm duplicata radice quadratà 5, numeri 25; si ad eam accesserit vnitas vt fiat 11. Quare tunc maior quadratus, quàm B 100 assumendus erit ad multiplicandū datum numerū A 26, vt eius radix præcisior habeatur. Raró tamen hîc casus occurrere potest & occurrēti facile cōsuli potest per alium quadratū decadicum maiorē, addita tantùm duplici figurâ 0 ad iam positum numerum D 2600, vt fiat 260000: à quo radix eruatur. Non debuit tamen omninò prætermitti etsi rarissimus ille casus; cum eius causâ falsa sit illa vniuersalis plurimorum assertio; qui, vt radicem non præcisam ad veram promoueant; iubent ad numerum datum, à quo radix eruenda est, apponi, nulla cautione adhibita, aut vnum, aut multiplicem binarium figurarum 0. Quod tum ex proximè dictis, tum ex citatâ Propositione 7. minimè sufficere ostenditur; vt vel hinc constet, quanti sit momenti, vt quid certi de re quapiam statuatur, & pronuncietur; ipsius causas, & naturam priùs mente complecti.

A 26.	B 100	D 2600		
	C 10			
			E 50	
			C 10	F 5

PROP.

PROP. XXVI. *Theor.*

Fractus numerus quadratus eſſe poteſt, verámque radicem habere: etſi ipſe terminis non quadratis exprimatur.

Demonſtratio.

Perpende fractionem A B; cuius tam numerator A, quàm denominator B quadratus ſit numerus. Vtrumque multiplica per quemcunque numerum C, non quadratum; vt producatur noua fractio D E æqualis per Propoſitionem 5. lib. 2. fractioni A B. fractionis itaque huius C D termini quadrati non ſunt per Prop. 22. libri huius 3. qua conſtat neutrum quadratorum A, B; dum multiplicat non quadratum C, producere poſſe quadratum. Ecce ergo fractum numerum D E, qui reuerà quadratus eſt; cum ſit æqualis quadratæ fractioni A B; eádemque ſit vtriúſque radix: terminis tamen D & E non quadratis expreſſum. Ergo fractus numerus quadratus eſſe &c. Quod erat probandum.

A 4		D 8
	C 2	
B 9		E 18

PROP. XXVII. *Probl.*

An datus numerus fractus, quadratus ſit, vel non quadratus examinare.

Expoſitio.

Ex præcedenti Propoſitione conſtat offerri poſſe fractionem: quæ quadrata ſit, veráque radice potiatur: cuius tamen termini, numeri quadrati non ſint. A quibus proinde ſi radix eruatur, vt habeatur ipſius fractionis radix quadrata, vt Prop. 14. oſtenſum eſt, minimè præciſa habeatur: ac propterea habeatur falſa, cum non deſit, vera, quæ haberi queat. Debet ergo in primis noſci, antequàm radicis inueſtigatio incatur è fracto numero educendæ, an fractus numerus quadratus eſſe poſſit: & quinam ſint illi numeri quadrati, qui eandem fractionem conſtituant.

Constructio.

Detur fractio quælibet A B. quæritur an quadrata sit. ducito in se inuicem fractionis terminos A & B, & producatur C. Ex numero C erue radicem quadratam: quæ primò præcisa sit; qualis est hic radix D. Dico igitur in eo casu fractionem A B quadratam esse; & radicem habere quadratam præcisam, datique fractionem æqualem fractioni A B: quæ terminis constet quadratis: hæc enim omnia connexa sunt inter se; & ex eodem consequuntur principio.

A 12
—— C 324
B 27 ——(D 18

Demonstratio.

Cum numerus C productus sit per constructionem ex numero A in B ducto: idémque produci aptus sit ex radice D, si in se ducatur: erunt tres numeri A, D, B proportionales continuè per Prop. 20 lib. 7. Elem. Ergo per Prop. 20 lib. 8. elem. duo numeri A & B plani sunt similes. Sed per 26 Prop. lib. 8. plani similes rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum ergo dantur duo quadrati numeri in ratione A ad B. Ergo fractionem constituunt æqualem fractioni A B per propositionem 5 libri 2. huius. Tunc ergo fractio illa quadrata erit radicémque quadratam obtinebit.

At verò si fractionis A B duo termini in se mutuò ducti generent numerum C: ex quo radix D præcisa nequeat obtineri: qualis est hîc 9; quâ eductâ reliquus fit numerus 9. Tunc asserendum est fractionem hanc minimè quadratam esse, veráque ac præcisa omni radice carere.

A 6
—— C 90. 9
B 15 ——(D 9

Demonstratio.

Si enim fractionis termini A & B in eo câsu radice quadrata potirentur; ipsíque forent, aut reuerà quadrati, aut certè plani similes, atque adeo habentes per Prop. 26. lib. 8. elem. rationem quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum: caderet inter eos medius numerus proportionalis per Prop. 18 lib. 8 elem. Ergo numerus ille medius proportionalis inter A & B; in se ductus numerum generaret æqualem numero qui fit ex A in B ducto. Per Prop. 20. libri 7. Eucl. vel Prop. 49. libri 1. huius. Fit autem ex A in B ex constructione numerus C. Ergo etiam idem

idem numerus C fieret ex medio illo proportionali in ſe ducto. Ergo medius ille proportionalis radix foret quadrata numeri C. Quod eſt abſurdum: cum ex ſuppoſitione conſtructionis numerus C radice quadrata careat. In hoc ergo caſu, in quo numerus ex fractionis terminis in ſe mutuò ductis genitus radicè caret: caret & ipſa fractio radice. Rectè igitur tradita methodo examinauimus. An data quælibet fractio quadrata ſit, aut non quadtata, quod præſtandum erat.

PROP. XXVIII. *Probl.*

Quadratæ fractionis terminos, ſi quadrati ipſi non ſint, ad quadratos reuocare.

Expoſitio.

Conſtat ex Propoſitione 26. dari poſſe fractionem quadratam; quæ terminis conſter non quadratis: eamque à fractione non quadrata dignoſcendi methodum tradidi propoſitione anrecedenti. Cum ergo conſtet etiam ex demonſtratione proxima terminos quadraræ huiuſmodi fractionis, ſi minus quadrati ſinr ipſi; habere tamèn inter ſe rationem; quam habent inrer ſe duo quidam quadrari numeri: eos noſſe iure quis deſideret. Cui ſequente ſolutione ſatisfiet.

Conſtructio.

A 12	C 4
B 27	D 9

Detur fractio quadrata A B: cuius termini quadrati non ſunt. Reducatur ad minimos terminos per Prop 20. lib. 2. huius (ſi enim ipſi quadrari non ſunt vt non eſſe ſupponit hæc Propoſitio; data fractio terminis minimis non exprimitur, vt ex demonſtratione patebit) iíque ſint C & D: ex quibus fiat fractio C D æqualis fractioni A B. Dico huiuſmodi terminos C & D quadratos eſſe.

Demonſtratio

Duo termini A & B plani ſimiles ſupponuntur, quando-quidem fractio quadrata ſupponirur: ex qua ſuppoſitione ſequitur iuxta demonſtrationem prioris caſus Propoſitionis antecedentis, medium cadere proporrionalem inter A & B: vnde fit, vt ſint ipſi plani ſimiles per Prop. 20. lib. 8. Elem. Ergo & inter duos numeros C, D; eandem cum A & B rationem habentes vnus medius cadit proportionalis numerus per Propoſitionem

8 lib. 8 Elem. cum ergo termini C & D, minimi sint ex constructione in ratione A ad B : erunt C & D numeri inter se primi per Prop. 3. lib. 8. Eucl. Inter quos, vt dictum est, cum cadat medius proportionalis: erunt tres numeri continuè proportionales; quorum extremi C & D sunt primi inter se : ergo sunt quadrati per corollarium 1. Propositionis 2. lib. 8. elem. Ex quo prætetea illud constat, cuius in constructione memini, nimirum. Posito quod A & B quadrati non sint, vt non esse supponit Propositio. Ipsos A & B non esse in sua ratione minimos, minoresque propterea inquiri posse : si enim minimi forent, forent & quadrati contra suppositionem. Rectè igitur quadratæ fractionis terminos non quadratos ad quadratos reuocauimus. Quod faciendum erat.

PROP. XXIX. *Probl.*

Radicem quadratam è data quauis fractione educere.

Expositio.

Perpendendum in primis est per Propositionem 27. an quadrátus sit datus fractus numerus; an non quadratus : ita vt duo sint diuersi casus problematis huius.

Constructio casus prioris, & Demonstratio.

Detur fractio A B reuera quadrata. Quæ terminis A, & B exprimatur siue quadratis, siue non quadratis. Si quadrati ambo fuerint (neque enim alter tantum quadratus sufficit, vt fractio quadrata dicatur, vt ipsa solutio propositionis 27. declarat) vt in hoc exemplo contingit : eruatur ex vtroque radix C & D; & ex hac radice duplici fiat fractio C D. Hæc erit radix quadrata fractionis A B. Vt constat ex dictis Propositione 24. superiore in scholio.

A 100	C 10
B 225	D 15

Quod si quadrati non sint termini (quod ex alterutro radicis extractio inita indicabit) reducatur fractio ad minimos terminos, Tunc enim terminus vterque quadratus erit, vt Prop. 28. antecedente ostensum est, vt si detur fractio A B; ea reducetur ad fractionem C D minimis terminis; atque adeò quadratis constantem. Tunc vero ex vtroque termino radix eruetur : vt fiat fractio E F. Hæc enim, vt paulò

A 12	C 4	E 2
B 27	D 9	F 3

paulò ante dictum est, erit radix fractionis C D, atque adeò fractionis A B ei æqualis.

Constructio casus posterioris & demonstratio.

Detur iam fractio A B. Quam constiterit quadratam non esse per Propositionem 27. Ducti scilicet termini A 15, & B 24 producunt numerum 360: ex quo radix non potest præcisa educi. Tunc educetur ex singulis terminis radix integris numeris C & D expressa. Quæ erit quidem radix quadrati maximi in A & B contenti, non autem ipsorum numerorum A & B. Tunc ergo vtraque radix C & D ad præcisiorem reuocanda erit aliquo ex his modis, qui superiùs traditi sunt.

$$\frac{A\ 15.}{B\ 24} \qquad \frac{C\ 3}{D\ 4}$$

Vt quia post extractionem radicis C ex numero A reliquus fit numerus 6: si radix C duplicetur; & duplicatæ addatur vnitas, vt fiat F 7: cui tanquam denominatori superponatur reliquus ille numerus E 6: vt fiat fractio E F. Erit radix C 3 cum fractione E F radix præcisior verâ minor numeri A. Similiter radix præcisior verâ minor numeri B, erit radix D 4 cum fractione G H. Iam ex his radicibus fit fractus numerus non simplex, sed complexus: cuius numerator est C 3 cum fractione E F: denominator autem est D 4 cum fractione G H. Atque hîc fractus numerus erit radix fractionis A B.

$$\frac{A\ 15.\quad C\ 3\quad \frac{E\ 6}{F\ 7}}{B\ 24.\quad D\ 4\quad \frac{G\ 8}{H\ 9}}$$

Vt autem valor huiusmodi compositæ radicis aptè possit exprimi, hac arte vtere. Reuoca integros C 3 & D 4 ad denominationem fractionum suarum per Prop. 21. lib. 2. cum quibus addantur: fiet ex numero C 3 cum fractione E F, fractio K L; at ex numero D 4 cum fractione G H, fiet fractio M N. Quarum prior erit radix numeratoris A, posterior verò denominatoris B datæ fractionis A B. Rursùs. Hæ duæ fractiones K L, M N reducantur ad eandem denominationem per Prop. 21. lib. 2. fractio K L vertetur in fractionem R P; fractio verò M N in fractionem T P. Iam communi expuncto denominatore P: fiat ex numeratoribus R & T fractio R T. Hæc erit radix datæ fractionis A B. Nam cum K L, & M N, siue R P, T P sint radices fractionis A B: ita autem se habeat per

$$\frac{K\ 27}{L\ 7} \qquad \frac{M\ 44}{N\ 9}$$

$$\frac{R\ 246}{P\ 63} \qquad \frac{T\ 308}{P\ 63}$$

$$\frac{R\ 246}{T\ 308}$$

Prop.

Prop.10.lib.2. fractio R P ad fractionem T P : vt se habet numerator R ad numeratorem T; propter eundem denominatorem P, ita erit R ad T, vt numeratoris A, radix K L; ad radicem M, N denominatoris B. Cum ergo fracti numeri illi sint æquales: quorum termini eandem habent rationem per Prop.5.lib.2 Erit fractio R T æqualis fractioni, cuius numerator statuitur R P, & denominator T P. Ergo fractio R T radix est quadrata fractionis datæ A B. Inuenta igitur est radix fractionis A B non quadratæ. Quod faciendum erat.

ALITER.

Breuiùs fortasse datæ fractionis A B siue quadratæ siue non quadratæ radix habebitur hoc modo.

Constructio.

Ducantur in se datæ fractionis A B termini A & B. Vt fiat numerus C. cuius radix minor verà numero interim integro tantùm expressa sit D 18 (omisso post extractionem radicis reliquo numero 36.) Iam fractio fiat A D ex numeratore A datæ fractionis & denominatore D proximè inuento. Dico hanc fractionem A D radicem esse quadratam datæ fractionis A B, & quidem verâ maiorem. Quod si idem numerus D fiat alterius fractionis D B numerator; cuius denominator sit idem datæ fractionis A B denominator. Dico hanc etiam fractionem D B esse radicem eiusdem datæ fractionis A B, sed verâ minorem. Vtrumque ostendo.

A 15
— C 360 D 18
B 24

A 15 D 18
— —
D 18 B 24

Demonstratio.

Cum data fractio A B verè quadrata est, vt fert prior Propositionis casus. Radix D numeri C verè quadrati iuxta Propositionem 27. est media proportionalis inter terminos A & B: ita vt, sit A ad D, vt D ad B. Ergo ratio A ad B duplicata est rationis A ad D, vel D ad B. Sed ratio eadem A ad B est etiam duplicata rationis per Prop. 18. lib. 8. Elem. eius quam habet radix numeri A ad radicem numeri B. Ergo eadem est ratio A ad D, vel D ad B: quæ est radicis numeri A ad radicem numeri B. Cum ergo per Prop. 5.lib. 2. illæ fractiones sint æquales, quarum termini eandem rationem habent: erit fractio, cuius numerator est A, & denominator

tor D; vel, cuius numerator est D, & denominator B radix quadrata datæ fractionis A B quadratâ.

Quod si quadrata non sit fractio A B, quale est paradigma hîc propositum, numerúsque C ex termino A in B ducto genitus præcisâ radice careat: sed eruta ex eo radix D, sit vel maior verâ, vel verâ minor: idem eadem demonstratione concludetur. Illud solum discrimen intererit: quod altera ex duabus radicibus A D, & D B maior sit verâ, altera minor. Maior quidem verâ erit radix A D fractionis A B: si numeri C radix D sumatur minor verâ. Tunc enim maior erit ratio numeratoris A ad denominatorem D vero minorem, quàm ad verum ipsum, per Prop. 8. lib. 5. Elem. Ergo maior erit fractio siue radix A D fracta, quàm par sit. Contra verò. Quia alterius fractionis D B numerator D est vero minor; minor erit eius ratio ad denominatorem B, quàm veri numeratoris, qui maior est. Ergo in eo casu radix D B est minor verâ. At verò si sumatur numeri C, radix D maior verâ: eadem ratiocinatione concludemus tunc radicem A D esse verâ minorem; maiorem autem verâ, radicem D B: siue ea radix D numeri C, sit numerus integer, & simplex, siue fractus cum integro; atque adeò complexus: quem in simplicem reuocabimus, vt in solutione priori factum est. Datæ ergo fractionis siue quadratæ, siue non quadratæ radicem quadratam inuenimus: & hanc quidem tam verâ maiorem, quàm verâ minorem. Quod præstandum erat.

Atque hactenus de singulari radicis quadratæ Extractione. Nunc de radice cubica agendum.

PROP. XXX. *Theor.*

Si numerus in duas partes secetur: cubus totius, æqualis est duobus partium cubis; & parallelepipedo quod toto numero, & eius partibus continetur, ter sumpto.

Expositio.

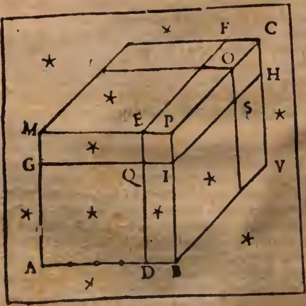
Quid cubus sit definitum est Propositione 3. libri huius tertij. Parallelepipedum verò, de quo hîc mentio habetur, figura est solida parallelogrammis sex comprehensa; quorum tria quæ ex aduerso sunt tribus parallela: quod solidum non ineptè vocaueris, si illud dicas esse solidum parallelogrammum: aut etiam ad numeros aptiùs, quod tribus terminis linearibus in se ductis continetur. Consule Propositionem 30. libri 1.

A 8. B 6 C 2	E	216
D 512. E 216. F 8	F	8
	H	288
G 96. H 288	D	512

Iam sit numerus A; qui in duas partes quascunque B & C secetur Dico cubum totius numeri A æqualem esse duobus partium B & C cubis; & prætereà parallelepipedo, quod fit ex tribus numeris A toto, & partibus B, C, in se ductis mutuò ter sumptum. Vt si D cubus sit numeri A: & E, F sint cubi partium B & C; G verò sit numerus ex mutua trium numerorum A, B, C multiplicatione genitus, eiúsque triplus sit numerus H dico hosce tres numeros E, F, H æquales esse cubo D totius numeri A. Id quidem verum esse probatur à posteriori, si quicunque fuerit numerus A datus, quæcunque etiam eius partes B, C; tres numeri E, F, H simul addantur. Semper enim ex ea additione orietur cubus D totius numeri A. Sed causa perpetui huius effectus, vnde scientifica cognitio petitur, inuestiganda est: quam geometricum diagramma appositum apertissimam exhibebit. Sit ergo.

Præparatio.

Linea A B designet datum superiorem integrum numerum A 8: eiúsque partes A D, D B partes B 6, C 2 eiusdem numeri exprimant. Super A B, cubus describatur A C (designabo huiusmodi figuras solidas characteribus ad oppositos earum angulos positis, non secùs quàm figuræ planæ parallegrammæ eodem modo literis Alphabeticis ad oppositos earum angulos appositis exprimuntur) sumptâ autem A G æquali segmento A D, ducantur D E, G I secantes hedram quadratam A P totius cubi A C conspicuam: per quas agâtur



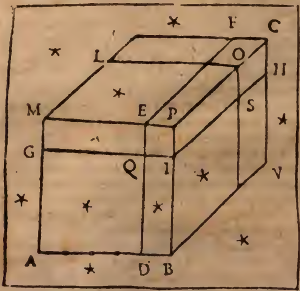
tur plana cubi totius planis lateribus parallela: vt fiant parallelepipeda duo, siue vocare malis rectangula solida duo G C, D C. Sumptis item M L, P O eidem parti A D æqualibus, agatur per rectam L O (quæ parallela erit rectæ M P in parallelogrammo M C per Propositionem 33. lib. 1. Elem.) planum lateribus planis eiusdem cubi totius parallelum, abscindens ex eodem cubo parallelepipedum L V: quod oculos fugit, mentem tamen huiusmodi solida concipere assuetam non latet. His positis in varias partes distributus est cubus totus A C; quas nunc attendere conuenit. Inter eas occurrunt primò duo cubi perfecti partium A D, D B dati lateris A B; qui ambo fere latent intra inconspicuam soliditatem immersi: prioris tamen sese offert facies quadrata G D; posterioris autem facies duæ licet obliquè spectatæ O F, O H: quos reuera cubos per factam constructionem constitutos & ad latera A D, D B pertinere demonstrandum primo loco erit. Sese deinde offerunt tria parallelepipeda. Vnum quidem est G F; cuius duæ hedræ M Q, M F conspicuæ sunt, quatuor reliquæ latent. Alterum, est parallelepipedum D O: cuius tres cernis hedras parallelogrammas E O, E B, B O. Tertium denique est, cuius vnica facies est S V, reliquum verò eius corpus extenditur per totam totius cubi latitudinem demõstrandum ergo erit tria hæc parallelepipeda æqualia esse inter se; & sub tota A B, eiúsque partibus A D, D B contineri: Id enim, si cum priore capite demonstretur, demonstrata fuerit tota Propositio. Vtrumque operâ haud adeò graui ostendetur hunc in modum.

Demonstratio.

Primo quidem loco tria dicta parallelepipeda & æqualia esse, & sub lateribus A B, A D, D B contineri apertissimum fit. Nam parallelepipedi G F basis rectangula E G sub duobus lateribus M G, M E continetur; quæ æqualia sunt duabus partibus A D, D B, totius A B; patet. Est enim M E in parallelogrammo M D æqualis opposito lateri A D per Prop. 24. lib. 1. Elem. latus verò M G, cum reliquum fiat demptâ A G, æquali A D, ex A M æquali posita A B. Duas reliquas M G, D B necesse est esse æquales. Hac E G posita basi parallelepipedi G F, eius altitudo E F est ex constructione æqualis toti datæ lineæ A B. Parallelepipedum ergo G F continetur sub tribus lineis A B, A D, D B. Eodem modo parallelepipedum D O sub eisdem tribus lineis contineri probabitur. Eius enim basis rectangula E O æqualis est prioris solidi basi E G; eò quod lateribus P E, P O contineatur æqualibus, illius lateribus E Q, E M; altitudo etiam P B altitudini illius E F sit æqualis. Tertium denique parallelepipedum, cuius basis est S V, æquale duobus præcedentibus esse constat ex eo, quod rectangulum

S V contineatur duobus lateribus H S, HV, quæ æqualia sunt lateribus PE, PO rectanguli O E: ac proinde eidem rectangulo O E sit æquale: & quod eius altitudo altitudini P B sit æqualis; cum in hisce tribus solidis ipsa semper sit linea tota A B, siue latera totius cubi A C. Atque ex iis iam constat cubum totum A C complecti tria parallelepipeda æqualia: quæ comprehenduntur sub tota linea A B; & sub partibus eius duabus A D, D B.

Restat ergo ostendendum eundem cubum totum A C præter tria illa solida æqualia continere cubos duos partium A D, D B Quod ita colligitur euidenter. Iam habemus basim G D quadratam, cuius latera sunt æqualia lineæ A D. Quod si attendamus eius altitudinem siue latentem profunditatem, æqualem esse lineæ M L, siue P O; quæ ambæ æquales sunt ipsi AD, habebimus cubum, cuius radix est A D, quem complectuntur tria illa æqualia solida superiora: ipsúmque effingunt. A quibus pariter efformatur cubus alter S F, dum spatium illud non subeunt sed ambiunt: si aptè concipiantur. Attende enim quomodo solidum G F extendatur; quomodo DO; quomodo denique illud cuius vnica facies S V apparet. Deprehendes siquidem ad angulum C spatium S F ad nullum eorum trium parallelepipedorum pertinere, sed ab eis ambiri. Quod cubicum esse constat, eo quod eius basis O H quadrata sit: sunt enim latera S O, S H æqualia: æqualis item altitudo C F, lineis P E, P I, hoc est, parti D B lineæ totius A B. Habes ergo quomodo cubus A C totius lineæ A B constet tanquam ex partibus integrantibus, cubis duobus partium A D, D B; & tribus parallelepipedis æqualibus ex tota linea A B, & eius partibus A D, D B compositis. Hæc cum ita se habeant Geometricè, non aliter se habere Arithmeticè censendum est vt alias sæpe sed præsertim libro 1. Prop. 30. declaratum est. Quare si numerus in duas partes secetur &c. Quod erat ostendendum.



PROP.

PROP. XXXI. *Theor.*

Si numerus in duas partes ſecetur vtcumque: cubus totius æqualis eſt duobus partium cubis; & ſimul ſex parallelepipedis: quorum terna & terna ſunt æqualia inter ſe quorum baſes ſunt quadrata partium, altitudines verò ſunt ipſæ partes reciprocè ſumptæ.

Expoſitio.

Secetur numerus A in duas partes quaſcumque B & C. Dico cubum D totius numeri A æqualem eſſe partium B, C, cubis E, F, & ſimul ſex parallelepipedis: quorum tres æquales continentur ſub quadrato partis B, & altitudine alterius partis C. Tres item æquales ſub quadrato partis C, & viciſſim altitudine B. Vt ſi quadratus 36 partis B ducatur in partem C 2 tanquam altitudinem; fiet G: cuius tribus eſt K; ſi item quadratus 4. Numeri C, ducatur in alteram partem B 6 tanquam altitudinem, vt fiat H: cuius tribus eſt L: iunctis cubis E, F; & numeris k, L; fiet, vt factum vides ad dextram ſchematis, cubus D, totius numeri A.

A 8	B 6	C 2	E 216
D 512	E 216	F 8	F 8
	G 72	H 24	K 216
	K 216	L 72	L 72
			D 512

Demonſtratio.

Suppoſitis præcedentis propoſitionis & præparatione, & diagrammáte, & concluſione: euidens fit huius theorematis veritas. Demonſtratum ſiquidem eſt cubum totũ A C, æqualem eſſe duobus partiũ A D, D B cubis; & ſimul tribus parallelepipedis æqualibus, & ſimilibus parallelepipedo D O verũ parallelepipedum D O in duo ſecatur parallelepipeda D S, Q O per planũ Q I S: quorum D S baſim habet quadratum B S; cuius radix eſt B I, æqualis parti A D, totius A B: altitudo verò eſt B D altera pars eiuſdẽ A B. At baſis alterius parallelepipedi Q O, eſt quadratum Q P partis D B: altitudo verò eſt P O, æqualis alteri parti A D totius lineæ A B. Si itaque duo reliqua parallelepipeda ſecentur velut ſolidum D O ſectum eſt: fient ſex parallelepipeda: quorum terna, & terna erunt inter ſe æqualia: co-

rúmque tria basem habebunt quadratam partis A D, & altitudinem, partem alteram D B: tria vicissim basem quadratam partis D B sibi vendicabunt; quorum altitudo erit altera pars A D totius lineæ A B. Quæ si numeris applicentur: constabit veritas Propositionis. Ergo Si numerus in duas partes secetur &c. Quod erat probandum.

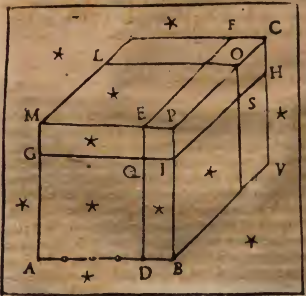
PROP. XXXII. *Theor.*

Si cuiusvis cubi radix in se ducatur: terque sumpto genito quadrato addatur radix ipsa ter sumpta, & insuper vnitas: producetur cubus proximè maior cubo posito: cuius scilicet radix, radicem cubi positi vnitate superabit.

Expositio.

A 8 B 2. C 4 D 12 E 18. F 19 H 27 L 3

Sit A cubus; cuius radix est B. Ducatur B in se; vt fiat eius quadratus C: quadratus hîc ter sumptus sit D: cui addatur ter radix B fiet E 18. Numero denique E addatur vnitas, vt habeatur F. Dico numerum hunc F additum ad cubum A, cubum generare H proximè maiorem cubo A: cuius scilicet radix L vnitate sit maior radice B.



Demonstratio.

Assumatur Diagramma duabus proximis Propositionibus adhibitum. In quo supponatur A B radix L 3, cubi H 27: quem exhibet totus cubus A C. Si ergo radicis A B pars vna A D statuatur 2, & reliqua D B vnitas. Totus cubus A C qui est cubus H 27) æqualis est duobus cubis partium A D, DB, & tribus parallelepipedis

rallelepipedis sub tota A B 3, & partibus A D 2, D B 1. Sed singula trium horum parallelepipedorum sunt quadratus radicis A D vnà cum radice ipsa A D probatur perpenso parallelepipedo D O, cuius basis supponatur rectangulum B O, & altitudo B D, siue P E, aut P I. Basis hæc B O generatur ductâ I B in I S (hoc est, A D in se) vt fiat rectangulum B S, & ductâ I P in eandem I S, vt fiat rectangulum I O. Per Prop. 1. lib. 2. elem. Sed rectangulum B S, est quadratus radicis I S hoc est, A D 2; rectangulum autem I O est numerus, qui fit ex I P (vnitate) in I S radicem; atque adeo est ipsa radix A D 2, vnitas enim multiplicans, multiplicatum non immutat. Ergo parallelepipedi D O, basis B O conflatur ex quadrato radicis A D 2 (qui est 4) & ex ipsa radice AD 2; ita vt basis hæc B O sit numerus planus 6. In hanc basim B O 6 ducatur altitudo B D 1: fiet solidũ D O; eritque idem numerus 6: vnitas enim B D multiplicans B O 6, ipsum non immutat. Si igitur numerus 6 ter sumatur: erit factus numerus 18, triplex illud parallelepipedum parallelepipedo D O æquale, & continebit quadratum 4 radicis A D ter, & ter etiam ipsam radicem A D 2. Huic numero 18 ex tribus illis solidis conflato addatur cubus partis D B siue vnitatis, qui est 1 habebitur numerus 19: qui ad cubum radicis A D 2 (qui est 8) additus, cubum A C generat: cuius radix A B 3 vnitate superat radicem A D 2, cubi 8. Atque adeo cubus A C proximè maior est cubo 8. Ergo si cubi minoris 8 radix quadretur & quadrato ter sumpto addatur ter ipsa radix cum vnitate; factúsque addatur cubo minori, fiet cubus proximè maior. Quod erat probandum.

PROP. XXXIII. *Theor.*

Cubus numerus coalescit ex tot terminis naturalis Arithmeticæ progressionis simul additis, quot vnitatibus constat eius radix. Eius autem progressionis, si cubus impar fuerit, medius terminus, est eiusdem radicis quadratus. At si cubus fuerit par medius quadratus bis repetendus erit.

Expositio.

Miranda est hæc cuborum generatio; & quæ perpendatur maximè digna. Notanda ergo duplicis generis cuborũ differentia; cuius fit in propositione mentio. Alij enim cubi pares sunt, impares alij. Illi non nisi ex radice pari, ex impari isti gigni possunt. Radix siquidem par in se ducta quadratum parem, parémque cubum in quadratum parem rursùs ducta necessariò generabit

rabit per Prop. 28. lib. 9 Eucl. radix autem impar, per prop. 29 non nisi imparem quadratum, & ex eo imparem cubum producere potest. Quo posito. Proponatur cubus impar A, ex impari quadrato B, imparique radice C natus. Dico cubum A conflari ex additione terminorum quinque: (quot scilicet vnitates continet radix eius impar C 5) vulgaris Arithmeticæ progressionis: quorum medius est eiusdem radicis C 5 quadratus B 25. Cuiusmodi sunt termini D. E. B. F. G.

A 125.	B 25.	C. 5.		
D 23.	E 24.	B 25.	F 26.	G 27.

Sed si cubus H par proponatur: cuius proinde, vt ostensum est, tam quadratus L, quàm eius radix k, par sit numerus: coalescet cubus H ex tot terminis vulgaris numerorum progressionis, quot vnitates continet radix eius k, nempe 6: quorum medius terminus est quadratus L 36, sed bis sumptus; qualis est progressio apposita terminorum M. N. L L. P. Q. Quos cubum H producere si addantur, probandum est.

H 216.		L 36		K 6	
M 34.	N 35.	L 36	L 36.	P 37.	Q 38.

Demonstratio prioris casus.

Cubus A impar gignitur ductâ radice C in quadratum suum B. Ergo quadratus B in cubo A toties continetur; quot sunt in radice C vnitates. Sed si seriei communis numerorum D, E, B, F, G, in

A 125		B 25	C 5	
D 23	E 24	B 25	F 25	G 27

qua medius terminus est quadratus B, duo termini à medio B æqualiter hinc inde dissiti simul addantur; ex ea additione oritur numerus duplus medij termini B ex Prop. 3 lib. 1. Iordani, & aliis passim dum Arithmeticæ progressionis facultates exponunt. Ergo duo termini quilibet ita sumpti in apposita progressione, quales sunt D & G: E & F: & B bis, dupli sunt medij quadrati B. Ergo semissis illorum singulorum aggregatorum æqualis est quadrato B. Tot autem sunt semisses, quot sunt in progressione termini: tot verò sunt termini ex suppositione: quot sunt in radice C vnitates. Ergo progressio illa toties numerum quadratum B continet: quot sunt in radice C vnitates. Sed cubus A toties etiam continet quadratum B, quot sunt in radice C vnitates, vt paulò ante ostensum est. Ergo progressio illa est cubo A æqualis. Cubus ergo impar æqualis est communi numerorum progressioni tot terminorum: quot sunt in ipsius cubi radice C vnitates, si modo medius progressionis terminus sit eiusdem radicis C quadratus B. Qui est prior casus.

Demonstratio

Demonstratio casus posterioris.

Secundus hic casus modo haud absimili demonstratur. Cubus H toties continet quadratum L: quot sunt in radice K vnitates. Nam K multiplicans L producit H. Sed si seriei numerorum communis M, N &c. Sex terminorum, termini æquè à medio L dissiti addantur, fit numerus duplus medij L ex facultate Arithmeticæ progressionis. Ergo tria fient aggregata ex illis sex terminis; quorum singula dupla erunt quadrati L. Ergo sex illi termini simul sumpti æquales sunt sex quadratis L, radicis K. Sed cubus H æqualis etiam est sex quadratis L. Ergo progressio illa M, N, &c. cuius duo medij termini L sunt æquales, æqualis est cubo H. Quare cubus quilibet par, est æqualis tot terminis communis progressionis numerorum; quorum medius sit quadratus bis sumptus radicis cubi: quot vnitates ipsa radix continet. Qui secundus casus erat probandus. Quare cubus numerus coalescit ex tot &c. Quod erat probandum.

H 216.		L 36.			K 6
M 34.	N 35.	L 36.	L 36.	P 37.	Q 38.

Corollarium.

Ex allata Propositione, eiúsque probatione constat quamlibet Arithmeticam progressionem: cuius medius terminus sit quadratus ex cubi cuiusvis radice genitus: & cuius terminorum multitudo æqualis sit multitudini vnitatum, quibus radix constat: æqualem esse ipsi cubo; quisquis alioqui fuerit terminorum excessus. Cuiuscúnque enim progressionis termini duo, æqualiter à medio termino distantes, simul sumpti, semper sunt æquales medio termino bis sumpto, si terminorum multitudo impar fuerit; vt in imparibus cubis contingit: aut si pares cubi fuerint, terminis duobus mediis æqualibus. Quod ex Arithmeticæ progressionis proprietatibus colligitur. Ita cubo A superiori: cuius quadratus est B 25, & radix C 5; non tantum progressio D, E, B, F, G: sed etiam alia quæcunque H L B K I totidem terminorum, æqualis erit eidem cubo A 125. Cum enim medius terminus in omnibus progressionibus perstet, siue simplex, vt in imparibus cubis; siue bis positus, vt in cubis paribus; fiat autem ipsi

A 125.	B 25.	C 5.		
D 23	E 24	B 25	F 26.	G 27
H 15	L 20	B 25	K 30	L 35
H 21	L 23	B 25	K 27	L 29

medio termino æquales aggregati numeri ex duobus teminis æqualiter à medio diſſiti: euidens fit omnes huiuſmodi progreſſiones, & inter ſe, & cubo æquales eſſe.

PROP. XXXIV. *Theor.*

Cubi ex radicibus geniti, quæ ſint termini Arithmeticæ communis progreſſionis: ita componuntur ex terminis Arithmeticæ progreſſionis per impares numeros propagatæ. Vt impares omnes numeri ab vnitate ad eorum compoſitionem aſſumantur.

Expoſitio.

Propoſitionis huius ſenſus eſt huiuſmodi. Sit vulgaris numerorum progreſſio A B C D &c. eius termini ſinguli cubum ſuum apti ſunt generare, & verò hi ſunt E, F, G &c. ſeſe ordine conſequentes immediatè nullo omiſſo; ſicut eorum radices ſeſe immediatè cōſequuntur vnitate ſeſe perpetuò ſuperantes. Exponatur progreſſio Arithmetica per impares numeros extenſa ab vnitate, qualis eſt progreſſio K L, M &c. Certum eſt per Propoſitionē antecedentem cubos ſingulos E, F, G H componi poſſe ex terminis progreſſionis Arithmeticæ K, L, M &c. tot numero, quot vnitatibus radices ſingulæ A, B, C &c conſtant: eorúmque terminorum tot eſſe quadrato radicis cubicæ maiores, quot eadem minores. Vt cubus G radicis C 3. tribus terminis progreſſionis imparium numerorum K, L, M &c. æqualis eſſe debet; eò quod eius radix C 3, tribus vnitatibus conſtat. Et præterea, quia eiuſdem radicis C 3 quadratus eſt O 9 impar; quem propterea inter numeros impares progreſſionis K, L, M &c. cum omnes impares complectatur, reperiri neceſſe eſt: tot termini minores quadrato O aſſumuntur ad hanc compoſitionem, quot eodem quadrato O maiores, nempe vnus. Ita vt cubus G 27 coaleſcat. Si tres impares numeri N, O, P 7, 9, 11, ſimul addantur. Id omne certum eſt ex Propoſitione citatâ, præcedente. Quod ergo maximè ſingulare hîc aſſeritur, iſtud eſt: nimirum, cubos ſingulos ex radicibus ſingulis progreſſionis communis numerorum ſeſe immediatè conſequentibus genitos ita componi ex terminis progreſſionis Arithmeticæ ab vnitate per impares numeros extenſæ, vt omnes deinceps

A B C D
1 2 3 4
E F G H
1 8 27 64

K L M N O P Q
1 3 5 7 9 11 13

deinceps illius termini ad cuborum compositionem adhibeantur. Rem contemplatione dignam proposito schemate declaro. Cuius primus ordo A, B, C &c. est communis numerorum series, siue radicum cuborum quos ordo secundus M exhibet. Ordo tertius N est progressio per impares numeros extensa: quæ in membra varia distincta est: quorum singula respondentem cubum componunt. Hîc ergo intueri licet quomodo radix A 1 cubû generet 1 ex primo termino 1, progressionis N imparium nu-

	A	B	C	D	E
	1	2	3	4	5
M	1	8	27	64	125
N	1	3.5	7.9.11	13.15.17.19.	21.23.25.27.29

merorum (si vnitatem componi ex vnitate dicere liceat) compositum. Secunda verò B 2, cubum producit 8 ex duobus imparibus sequentibus 3 & 5 simul additis conflatum: inter quos quadratus 4 eiusdem radicis B 2, iuxta Propositionem 33. intercedit medius. Tertia autem radix C 3, cubum tertium 27 producit: qui tres insequentes terminos impares, tot scilicet, quot vnitates radix C 3 continet; in sui compositionem postulat, nempe 7, 9, 11, qui consequenter duos præcedentes 3 & 5, nullo intermedio omisso impare; sequuntur: quorum medius est radicis C 3 imparis quadratus impar 9. Sic radix D 4 quartum cubum 64 procreat: cui æquales sunt quatuor deinceps termini 13. 15. 17. 19. progressionis N imparium numerorum in quorum medio inter 15 & 17 reperitur quadratus 16, radicis D 4 & ita de cæteris; ita vt omnes termini progressionis N ad cubum quendam certum componendum concurrant. Aperiendum ergo est, quomodo ista connexio inter huiusmodi numeros progressionis N per impares terminos propagatæ, ad cubos ex naturali numerorum ordine 1, 2, 3 &c. nascentes componendos obseruetur.

Præparatio.

Ex Propositione 7. libri huius constat quadratum-quadrato proximè maiorem generari addito ad quadratum minorem numero quodam impari: qui habetur, vt etiam ostensum est; si ad radicem quadrati minoris duplicatam addatur vnitas. siue si ambæ radices duorum quadratorum, simul addantur, sic addito ad quadratum 9 ex radice 3 genitum, impare numero 7; producitur quadratus 16 proximè maior: cuius scilicet radix est 4 vnitate superans prioris quadrati 9, radicem 3. Vnde fit vt à quadrato 9 minore excluso ad quadratum vsque 16 proximè maiorem in-

clusum reperiantur numeri septem nempe 10, 11, 12 &c. Ergo etiam exclusô, ipso quadrato 16, inter vtrumque quadratum, minorem 9, & maiorem 16, reperiuntur numeri sex: quorum scilicet multitudo exprimitur numero pari. Ergo cum sequantur vulgarem numeralē progressionem, cuius termini vnitate sese superant, eorum sex numerorum dimidia pars, erunt numeri pares, pars dimidia, impares. Tres scilicet 10, 12, 14, pares erunt; reliqui 11, 13, 15, impares. Nunc ergo ostendendum est hosce tres impares numeros inter quadratum minorem 9, & maiorem 16 interceptos, ad cubum minorem 27, & ad cubum maiorem 64 constituendos, assumi partim à minore partim à maiore: ita vt omnes tres assumantur ab vtroque sed semel tantùm, nec vllus bis adhibeatur. In quo tota demonstratio versatur. Illud ergo ex iis annotatis colligo.

Demonstratio.

Ad cuborum constitutionem ex terminis progressionis per impares numeros extensæ, tot accipi debent impares, quadrato eiusdem radicis cùm

A	B	C	D	E
1	2	3	4	5
M 1	8	27	64	125
N 1	3. 5	7. 9. 11	13. 15. 17. 19.	21. 23. 25. 27. 29

cubo, maiores, quot eodem quadrato minores per Prop. 33. tot autem sumi debent termini ex ea progressione imparium numerorum: quot vnitates continet ipsa cubi radix per Prop. citatam. Ergo ad compositionem duorum cuborum sibi proximorum, & immediatorum; quorum scilicet radices vnitate differunt, tot adhiberi debent impares termini; quot numeri reperiuntur interiecti inter quadratum radicis minoris, & radicis maioris quadratum per corollarium Propositionis 7. libri huius 3. quo constat. Si ad radicem quadrati minoris addatur radix vnitate maior, fieri numerum; quo inter se differunt minor & maior quadratus. Ergo semissis illius numeri (par enim est excluso maiore quadrato, vt in præparatione docui (quo inter se differunt quadratus minor, & quadratus maior; indicat quot adhibeantur ad vtriúsque cubi constitutionem impares numeri inter duos quadratos interiecti: alia enim imparium dimidia pars, sumitur partim supra quadratum maiorem, partim infra minorem. Dimidia autem pars numerorum inter duos quadratos interiectorum sunt numeri impares; dimidia, pares (sunt enim termini progressionis Arithmeticæ, vnitate sese superantes.) Ergo impares omnes inter duos quadratos

dratos positi assumuntur partim ad minoris, partim ad maioris cubi constitutionem, nec eorum vllus bis sumitur: ne plures quàm tres assumi dici queat. Cum itaque omnes impares inter duos quosvis quadratos immediatos ad cuborum ex eadem quâ quadrati ambo radice genitorum constitutionem concurrant: ad quam assumantur etiam ipsi impares quadrati. Constat quomodo cubi ex numeris vulgaris Arithmeticæ progressionis continuato ab vnitate ordine producti; ex terminis omnibus Arithmeticæ progressionis per impares numeros ab vnitate in infinitum promotæ, componi possint. Quare cubi ex radicibus geniti &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXXV. *Probl.*

A dato quouis numero cubicam radicem educere.

Constructio

Totam problematis huius satis alioqui prolixam, & implicatam constructionem paucis, quoad fieri poterit, præceptis traditurus sum: quæ his versiculis memoriæ causâ complector.

Vltima signetur puncto nota dextra: sequentes
Linque duas; quartámque nota. Sic perge secando
In ternis numerum constantia membra figuris
Primo deme cubum membro. In quotiente notetur
Radix hanc quadra. Quadrata tripletur: & ortus
Membri diuisor reliqui esto. Quotúmque prioris
Iungito radicis triplo. Ducatur in ortum
Iam positus quotiens: & idem ducatur in ortum
Ad tria radicis iunctum quadrata prioris
Déque superposito genitum subducito membro
Scribe super reliquum: membróque appone sequenti
Radicem triplam, & radicis terna quadrata
Nec superet reliquum: nec qui subducitur, illud
Excedat membrum: quod supra ponitur ipsi

Primum Præceptum. *Vltima signetur nota* &c. Primum hoc Præceptum pertinet ad aptam sequentibus operationibus totius dati numeri

in certa membra distributionem: quarum singula tribus figuris constāt vno interdum excepto membro primo, cui aut vnica, aut duplex figura potest obuenire, vt exiget dati numeri figurarum multitudo.

A 634328125
· · ·
A--34328125
· · ·
A—4328125
· · ·

En, vt hi tres numeri A notentur iuxta traditum præceptum: quorum primus omnia habet membra sua completa tribus figuris constantia. Secundi membro primo figura vna; tertij duplex desideraretur. Hæc autem inita membrorum distinctio cur ita instituatur, ex dicendis planius innotescet.

Secundum Præc. *Primo deme cubum membro. In quotiente notetur radix.* Iubetur hoc Præcepto, vt à primo membro, ad læuam putà, dematur cubus: non quilibet, sed maximus in eo contentus: qui vnica solum figurâ, vt ex Propositionē 13. huius libri constat, exprimi potest. Ad huius ergo præcepti obseruationem necessaria est cognitio cuborum omnium; quos vulgares numericæ figuræ nouem in se cubicè ductæ producunt. Eos omnes vnà cum radicibus in hac tabella licet intueri. Quâ ita paratâ.

Rad.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cub.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343	512	729.

Proponatur numerus A secundo loco designatus & in sua iam membra distributus quorum primum est numerus 34. Attendi ergo debet iuxta hoc præceptum quis maximus cubus in hoc numero 34 contineatur: quem tabella antecedens indicabit: offeret enim cubum maximum in eo numero 34 contentum esse 27: cubus enim proximè insequens 64 est maior numero 34. Ergo

7
A ~~34~~328125
· · ·
———(B 30

iuxta Præceptum hoc demi debet cubus 27 à numero 34; & reliquus 7 superscribi. Radix verò cubi huius 27, quæ est 3, debet ad quotientem B notari: immò potiùs notandus est numerus 30 habitâ ratione figuræ secuturæ; & verò ita notari expedit ad commodiorem ex eo futuram reliquam operationem. Cui præcepto simile obseruatur in extractione radicis quadratæ, nec ampliùs, sicut ibi; ita nec hîc, adhibendum est in toto operationis decursu.

Tertium Præc. *Hanc quadra. Quadrata tripletur: & ortus membri diuisor reliqui esto.* Paratur hoc tertio præcepto diuisor necessarius ad definiendam secundam quotientis, siue radicis figuram ex secundo numeri membro generandam. Illud autem secundum membrum non tantum tres figuras 328 dati numeri sibi vendicat sed etiam figuram illam 7 ex præcedente operatione reliquam: ita vt sepositum illud membrum, & ex toto numero

numero abſtractum ſit numerus L; quem ita ſeparatim tractari expedit ad vitandam confuſionem. *Quadra* igitur radicem B 3, ſiue 30 fiet quadratus numerus C. Tum *quadrata tripletur*. Numerus C tripletur; fiet D. Hîc ergo debet eſſe diuiſor totius parati membri L cui propterea, vt diuiſores ſolent, ſubſcribetur, vt iubent hæc verba. *Et ortus membri diuiſor reliqui eſto*. Et vt chema refert: cuius formula ritè obſeruata non parum iuuabit totam operationem. Sed ita diuiſor hîc D, numero L ſubſcribi debet: vt vltima eius figura o reſpondeat puncto, ſiue figuræ puncto inſignitæ ſuperioris numeri L; & reliquæ deinceps figuræ huius diuiſoris D reliquis figuris diuidendi L reſpondeant de more. His poſitis.

E 1560		
L 7328		
D 2700	B 30	B 32
N 5768	C 900	
B 30	3	
3	D 2700	
F 90	K 184	
2		
G 92	M 2884	
2	2	
K 184	N 5768	

Quæritur (ecce huius extractionis difficultatem ferè totam) quoties diuiſoris D figura 2 contineatur in ſibi ſuperpoſito numero 7? certum quidem eſt, ſi ſola figura 2 eſſet diuiſor; ipſam in numero 7 ſuperiori ter contineri: haud tamen figura 3 ad radicem B ſtatui debet: debet enim totius numeri D, non autem eius primæ ſolius figuræ 2, haberi ratio, præſertim cum necdum hîc diuiſor D completus ſit; ſed adhuc ſit augendus. Supponatur itaque figuram 2 in ſuperpoſita 7 bis tantum contineri, & ſtatuatur ad radicem B figura 2 loco figuræ illius o: ita vt iam quotiens ſit B 32. quo poſito perge.

Quartum præc. *Quotumque prioris iungito radicis triplo*. Id eſt, figuram hanc 2 ad quotientem proximè poſitam adde ad triplam numeri 30 priùs poſiti, hoc eſt, ad F 90, vt ſchema refert, vt fiat G 92.

Quintum præc. *Ducatur in ortum iam poſitus quotiens*. Id eſt, in hunc poſtremum numerum G 92 ex triplo prioris radicis 30, & ex additione figuræ 2 ad quotientem nouiſſimè poſitæ genitum ducatur ipſa nouiſſimè poſita ad quotientem figura 2: vt habeatur ex ea multiplicatione numerus K 184.

Sextum Præc. *Et idem ducatur in ortum ad tria radicis iunctum quadrata prioris*. Et idem numerus quotientis 2. Ducatur in numerum k 184 ortum, ex multiplicatione proximè inita numeri G 92 per figuram illam 2 quotientis: ſed non ſolum, ſed *iunctum* ad diuiſorem D inuentum Præcepto 3. qui continet tria quadrata C radicis prioris B 30 id eſt, ducatur in numerum M. vt tandem habeatur numerus N 5768.

Septimum præc. *Déque ſuperpoſito genitum ſubducito membro*. Proximè genitum numerum N ſubducito à membro integro L, cui debita figura 2

radicis

radicis totâ hac operatione inuestigata est. Ad quam subtractionem absoluendam idem numerus N, aptè numero L subscriptus est. Factâ autem subtractione reliquus fit numerus E 1560. Qui ad sequens dati numeri A membrum 125 pertinebit, eique præfigi debet; vt tertia figura radicis inueniatur; ita vt totum illud membrum tertium sit 1560 125.

Habes ex his methodum vniuersam radices cubicas extrahendi: quæ enim ad inueniendam secundam illam figuram 2 radicis obseruata sunt: eadem ad cuiusvis figuræ inuestigationem eodem ordine, eadem formulâ, quam maximè aptam & expeditam, & ab omni confusionis discrimine liberam præ cæteris tradi solitis experieris obseruari debent. Quod autem sequitur præceptum octauum non ad operationem; sed ad cautiones pertinet præcepto tertio necessarias, ne figura noua ad radicem ponatur vel maior iusto, vel iusto minor.

Octauum Præc. *Radicem triplam, & radicis terna quadrata nec superet reliquus. Nec qui subducitur* &c. Non debet reliquus absoluta aliqua partiali operatione ad figuram radicis statuendam, aliquando tantus esse, vt triplam radicem hactenus positam vnà cum triplo quadrato eiusdem radicis totius, excedat. Foret scilicet tunc posita ad radicem figura minor quàm par sit. At verò iusto maior foret: si percursis operationibus, cum ad subtractionem peruentum esset, qua numerus N subduci debet à membro L, de quo agitur; subtractio fieri non posset; eò quod numerus N maior foret quam L. Quare tunc minuenda foret posita illa ad radicem figura: & ex eâ tota operatio de integro (nisi alia suppeteret industria) instituenda. Qui casus secundus ipse sese prodit ad operationis terminum prior verò non perinde per se notus est. Quare priusquam ad aliam sequentem ineundam operationem accedatur; expedit tentare, an post subtractionem numeri N à numero L superposito, reliquus numerus E, maior iusto sit, maior scilicet sit, aut etiã æqualis triplo radicis, eiusque triplo quadrato. Vt in nostro paradigmate: radicis B 32 inuentæ triplus est D 96. eiusdẽ radicis quadratus est C 1024. eius triplus est V 3072. D & V additi generant F 3168: quo minor est numerus E 1560 reliquus absolutâ operatione ad secundam illam figuram 2 radicis pertinente. Quare ad tertiam inquirendam iisdem vestigiis insistendo accedi tutò potest. Quanquam autem eodem modo, iisdémque seruatis præceptis ea reperiatur: vt tamen mansuescat hæc satis ardua operatio hanc etiam figuram tertiam ex eadem formula inuestigo.

B 32	C 1024
D 96	V 3072
F 3168	
E 1560	

Numerus

Numerus, qui hac operatione versandus est, componitur, vt superiùs monui ex reliquo numero præcedentis operationis & membro tertio 125 dati numeri A. Vt habet numerus L. Quadratur ergo radix B 320; eiúsque quadratus C triplicatur: vt habeatur diuisor D iuxta 3. Præceptum: iuxta quod etiam determinatur tertia radicis figura 5: quæ nec iusto maior nec minor censeatur. Dum tamen de eius quantitate dubitatur (vt sæpe non potest non dubitari) præstat minorem potiùs quàm maiorem iusto assumi; faciliùs enim emendatur minor, quàm maior.

L 1560125	
	B 320. B 325
D 307200	
N 1560125	C 102400
B 320	3
3	
F 960	D 307200
	K —4825
5	
G 965	M 312025
5	5
k 4825	N 1560125

Hæc figura 5 de nouo posita; ad triplum radicis 320 prioris, qui est F 960, additur: vt fiat G 965 per præc. 4. & per præceptum 5. eadem ad quotientem posita figura 5 ducitur in G 965: & producitur k 4825.

Per præceptum 6. hîc numerus k additur ad C qui triplus est quadrati ex priore radice B 320 geniti: ex ea autem additione gignitur M; in quem ducitur figura 5 radicis: vt fiat N. qui.

Per præceptum 7. subduci debet à numero L, toto scilicet numero ad tertium membrum spectante. Hac demum subtractione perfectâ, absoluta est operatio: & quia nihil reliquum fit: datus numerus A, cubus est; eiúsque radix est repertus numerus B 326. Quod ita habere, restat nunc demonstrandum.

Demonstratio.

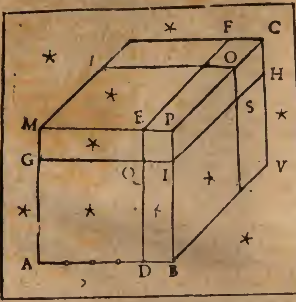
Demonstrari debet radicem cubicam iuxta tradita præcepta è dato numero erutam, eam verè esse, quæ in se cubicè ducta datum numerum generet. Quod vt fiat: supponendum in primis est, dum radix cubica è dato numero educenda proponitur: id ita proponi, vt si verè cubus sit numerus datus, vera radix eius inquiratur: sin minùs, inquiratur radix cubi maximi in dato numero contenti, spreto tanquam nullius momenti, reliquo excessu, quo numerus cubum maximum suum superat. Supponendum secundò est, rectè probatum esse primum præceptum, quo interpunctio illa, siue numeri in varia membra distributio imperatur. Ostensum siquidem est Prop. 13. huius libri 5. radicem futuram, tot figuris constare; quot fuerint dati numeri membra huiusmodi. Cum ergo

figuræ radicis iuxta traditam methodum inueſtigentur ex ſingulis numeri membris ſingulæ; euidens eſt numerum eo modo rectè diſtingui in huiuſmodi periodos: quæ ſingulas illas radicales figuras exhibeant. Secundum autem præceptum probatione non eget. Eo ſiquidem iubetur cubum maximum in primo membro comprehenſum è tabella parata cuborum, & eorum radicum à primo ipſo membro ſubduci, eiúſque radicem ad quotientem notari. Quod poſtulati potiùs, quàm probandæ concluſionis rationem habere videtur.

Quod ergo probandum reſtat, eſt. Diuiſorem rectè definiri. Quod præcepto tertio abſoluitur: tum reliquas diuiſionem conſequentes operationes ſequentibus præceptis imperatas rectè imperari; vt dati numeri radix obtineatur quæ ſequenti ratiocinatione apertè concluduntur.

Reſumantur dati numeri A duo tantùm priora membra à quibus educta radix eſt B 32. Hoc enim ſufficit: cum quidquid de figuræ ſecundæ inueſtigatione præcipitur: idem de cæterarum, quotquot membra extiterint, inquiſitione dici debeat, vt ex dictis planum fit. Huc etiam reuocetur diagramma geometricũ ſuperiùs delineatum. Radix ergo dati numeri A 34328 ſupponatur ſtatuta B 32. Quæ repræſentetur per lineam A B diagrammatis cuius cubus A C exhibet datum numerum A. Sicut autem radix B 32 ſecatur in duas partes B 30 & R 2; quarum prior excerpta eſt è tabella cuborum; poſterior inueſtigata eſt è dati numeri membro ſecundo L: Ita etiam ſecta ſit lineà A B in duas partes. A D, D B illis reſpondentes. Qua diuiſione lineæ A B ſupoſitâ, reliqua conſtructio ſuperiùs abſoluta, hîc rurſùm abſoluta cenſeatur. Sicut ergo totus cubus A C per Propoſitionem 30. huius; æqualis eſt cubo lateris A D, & cubo lateris D-B vnà cum tribus parallelepipedis parallelepipedo D O æqualibus: ſiue per Propoſitionem 31 ſex parallelepipedis: quorum terni æquales ſunt parallelepipedo D S, contento ſub quadrato B S partis A D, & altitudine B D, partis alterius lineæ A B: terni autem æquales ſunt parallelepipedo Q O contento ſub baſe quadratâ Q P, partis D B; & altitudine P O, ſiue altera totius lineæ A B parte A D. Ita totus cubus A 34328 ex radice totâ 32 genitus, æqualis erit cubo 2700 radicis B 30, & cubo 8. radicis R 2, vnà cum tribus parallelepipedis æqualibus: quorum vnus fit ex toto numero 32 in partem A D 30, & eſt 960, referens. Baſim B O; & ex baſi 960 ducta in altitudinem D B 2: ita vt parallelepipedum illud ſit 1920. Vel, totus cubus A 34328 eſt æqualis duobus cubis 2700, & 8, partium B 30 & R 2, totius radicis 32: & ſex parallelepipedis: quorum terni, ſinguli æquales ſunt parallelepipedo D S 1800: qui continetur ſub quadrato C 900, partis B 30, & altitudine R 2 alterius partis, eiuſdem radicis totius 32. Terni verò reliqui æquales ſunt ſinguli parallelepipedo Q O contento ſub quadrata baſe Q P 4 (cuius latus eſt D B 2) & altitudine,

P O,



PO, siue A D 30. Ita vt sit parallelepipedum illud Q O 120. Iam ergo si vtrúque hoc parallelepipedum D S, 1800: Q O, 120 tripletur, & producti numeri simul addantur vnà cum cubis partium B 30, & R 2. fiet totus cubus A C exprimens datum numerum A. 34328. hoc autem in data methodo fieri certum est.

Demitur enim primo loco ex numero A 34328 cubus maximus in primo membro 34, siue potiùs 34000, habitâ ratione trium sequentium figurarum, contentus 27000: qui tam ipse, quàm eius radix B 3, siue 30 ex tabella cuborum decerpitur. Hoc autem cubo partiali dempto à numero A 34328. reliquus fit numerus L 7328 æqualis cubo reliquæ partis R 2, radicis 32; & sex illis parallelepipedis. En igitur, vt iuxta datam methodum hæc æqualitas consequatur.

A 34328

E 1560
L 7328

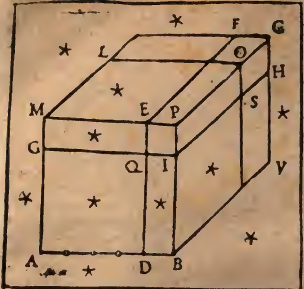
D 2700 | B 30. R 2
N 5768
B 30 — C 900
3 — 3

F 90 — D 2700
2 — k 184

G 92 — M 2884
2 — 2

k 184 — N 5768

Vt habeantur tria parallelepipeda D S, quadrata est radix B 30, genitúsque est quadratus C 900, siue basis B S: numerus C triplicatus est, factúsque est D 2700, siue basis B S triplicata. (Altitudinis B D mentio mox habebitur, sed methodi series sequenda est) rursùs ergo, vt habeantur tria parallelepipeda Q O triplicata est radix B 30, siue I S, aut A D; factúsque est numerus F 90. Huic numero addita est altera radicis figura R 2: factúsque



est numerus G 92. Tres lineas I S, siue A D; vnà cum S H, siue D B, continens. Quare si hunc numerum G 92, vt in formula cernis, per figuram R 2, siue I P, aut D B multiplices: generabitur K 184: qui non tantùm basim I O triplicatam trium parallelepipedorum exprimet; sed etiã basim S C quadratam cubi partis D B, cui æqualis est S H. His eò perductis, habemus tres quadratas bases B S, numerum scilicet D 2700 prius inuentum: habemus etiam bases K 184 trium parallelepipedorum Q O, & simul basim S C, cubi S F. Cum ergo tam tria solida D S; quàm tria Q O cum cubo S F eandem habeant altitudinem B D, siue R 2: Si hæ bases D 2700, & K 184 simul addantur, vt fiat M 2884: ísque multiplicetur per R 2: habebitur numerus N 5768 æqualis sex illis parallelepipedis, vnà cum cubo partis D B, qui demùm N additus ad cubum 2700, radicis B 30; cubum exhibet maximum in dato numero A 34328 contentum.

A 34328

E 1560
L 7328

D 2700 | B 30. R 2
N 5768
B 30 — C 900
3 — 3
F 90 — D 2700
2 — k 184
G 92 — M 2884
2 — 2
K 184 — N 5768

Tota ergo hæc præscripta, & ex superioribus præceptis obseruata methodus radicem cubicam è dato numero extrahendi certissima est: si tamen constet radicis 32, figuram secundam R 2 aptè electam & constitutam esse. Hæc autem apta eius figuræ electio in eo consistit tota: vt varij illi numeri, qui ex ea deinceps deriuantur; quíque sex illa parallelepipeda, & eiusdem figuræ cubum componunt, siue gnomonem solidum exprimunt, cubo iam statuto radicis prioris B 30 circumgestum:

gestum : eiusmodi sint; vt ex iis nascatur vltimus ille numerus N : qui nec maior nec minor existat, quàm par sit: sit nimirum talis, vt à membro secundo L demi queat, ei quippe sit æqualis, aut eodem minor: Ita tamen demi queat; vt reliquus post hanc subtractionem numerus non excedat eum; qui conflatur ex additione trium radicum, & trium radicis quadratorum iuxta illa octaui præcepti verba, *radicem triplam, & radicis terna quadrata nec superet reliquus : nec qui subducitur &c.* Talis autem in eligenda secunda illa radicis figura R 2 cautio obseruatur : cum iuxta citatum præceptum octauum figura illa, si quando contingat eam huic duplici conditioni non satisfacere, emendari debet, & in aliam vel maiorem vel minorem, prout error exiget, commutari. Ad integram ergo totius constructionis ad hoc problema soluendum adductæ demonstrationem, declarandum est : cur in eligenda radicis figura, ea duplex cautio præcepto illo octauo imperetur. Quod operâ haud adeò graui concluditur.

Nam si radicis figura constitueretur tanta; vt ex ea nati deinde numeri adeò excrescerent : vt vltimus tandem collectus N maior foret membro L, à quo subduci debet : radicis positæ cubus maior foret, quàm datus numerus, verbi gratiâ, A paradigmatis superioris: quod absurdum esset. Clara est illa sequela. Nam si ad hunc numerum N, qui est gnomon solidus complectens cubum priorem radicis A D diagrammatis, hoc est, radicis B 30; addatur ipse cubus radicis B 30, siue A D, fiet cubus A C maior quam datus numerus A 34328 : qui conflatur ex cubo radicis 30, cubo nimirum 27000, & numero L 7328 : hîc enim relinquitur subducto cubo 27000 à numero A : atque adeo ambo 7328, & 27000, sunt numero A æquales. Ergo cubus radicis positæ maior foret numero A dato : si numerum N maiorem esse contingeret quàm numerum L, propter maiorem scilicet positam ad radicem figuram.

Secunda verò figuræ ad radicem conditio : quod nimirum ex ea per varias operationes collectus tandem numerus N à numero L subductus relinquere debeat numerum, non maiorem numero, qui gignitur ex quadrato duplici radicis positæ, ad triplicem ipsam radicem addito, probatur. Nam Propositione 32. superiori ostensum est. Cubum cubo proximè maiorem generari, si huius radix triplicata ad quadratum suum etiam triplicatum addatur vnà cum vnitate : & hinc genitus numerus ipsi cubo apponatur. Si ergo absolutis omnibus operationibus ad extractionem necessariis; quarum postrema est subtractio vltimò inuenti numeri N à membro L superposito, reliquus fieret numerus maior triplo radicis, eiúsque quadrati, maior vtique foret saltem vnitate. At numerus æqualis triplo radicis, eiúsque quadrati cum vnitate additus ad cubum eiusdem radicis, cubum proximè maio-

rem producit: cuius ſcilicet radix poſitam radicem vnitate ſuperat. Ergo tunc radix inuenta, radix minimè foret cubi maximi in dato numero comprehenſi; adeóque dici non poſſet radix vera dati numeri: ea ſiquidem eſt, quæ in ſe cubicè ducta generat cubum, aut æqualem dato numero (quando datus numerus, verus eſt cubus) aut maximum in eodem numero contentum. In eo igitur caſu vera & accurata dati numeri radix inuenta minimè forer. Quæ cum ita ſint propoſitum colligo.

Oſtenſum eſt hîc paulò antè, veram radicem cubicam è dato numero educi ſecundum traditam methodum; ſi poſita de nouo ad radicem figura, iuſto nec maior ſit, nec minor. Sed nec maior erit, nec minor iuſto, ſi duplex illa imperata cautio, de qua proximè actum eſt, obſeruetur. Ergo iuxta traditam methodum rectè educta eſt radix cubica è dato numero. Qùod præſtandum erat.

PROP. XXXVI. *Probl.*

Inuentam radicem cubicam examinare.

Conſtructio.

Si quæ arithmetica operatio egeat examine; hæc certè præ ceteris ob multiplicem variorum numerorum ad eam concurrentium tractationem eo egere videtur. Vnicum afferri ſolet: cui nouum alterum longè breuius adiungam; ſed in primis obſerua è re fore videri, ſi poſt quamlibet operationem, quâ noua ad radicem figura ſtatuta eſt ipſa operatio excutiatur: non autem ad totius extractionis finem reiiciatur examen: ne error ſemel commiſſus longius ſerpat, ; & inanes, quæ ſequuntur operationes reddat.

Probandum ergo ſit. An radix B 32 à dato numero A educta, abſque errore educta ſit.

A 34328.	B 32
C 1560	
D 32768	
A 34328	

Cubetur radix B; & cubus eius D addatur ad numerum C; qui percurſis omnibus operationibus relictus eſt ex numero A. Debet enim, ſi omni errore vacat extractio, ex ea additione numerorum C & D, reſtitui numerus A. Aperta eſt per ſe ratio. Cubus enim radicis, B, cum numero C reliquo ex numero A abſolutis operationibus; æqualis eſſe debet numero A. Si erratum non eſt.

Examen ſecundum Arithmeticæ huius operationis inſtituetur per reiectionem nouenarij in eum prope modum; quo quadratæ radicis eductio probatur. Quod examinis genus hactenus nec traditum nec vſurpatum iure quis mirari poſſit. Nos illud ſic inſtituimus aſſumpto eodem paradigmate.

gmate. Abiiciatur ex toto numero A dato nouenarius; fiatque reliquus nouenario minor numerus E 2 : qui ſeponatur mox conſulendus. Abiiciatur deinde ex radice B 32 eodem modo nouenarius, ſepoſito item reliquo F 5. Hic numerus in ſe ducatur: vt fiat eius quadratus G 25. Vnde reiecto etiam nouenario reliquus fiat H 7. Tum in hunc numerum H 7 ducatur ille ex radice B reliquus F 5. vt fiat L 35. vnde etiam reiecto nouenario habeatur K 8 tandem ex numero k 8,:& numero M reliquo poſt extractionem tanquam ex vnico numero idem nouenarius abiiciatur : qui enim reliquus fit numerus N 2, ſi erratum non eſt, æqualis eſſe debet reliquo numero E 2 paulò ante ſepoſito.

A 34328 ——	E 2
B 32—F 5 —	G 25
H 7. L 35. K 8.	M 1560
P 32768	N 2

Demonſtratio.

Ratio huius examinis nonnihil occultior eſt, vt non miron, ſi minus vſurpetur: eam ſic expono. Sit P cubus radicis B. Eſt ergo cubus P cum reliquo illo numero M æqualis dato numero A, vt patet. Quare reiecto nouenario ex cubo P, & reliquo M; idem numerus relinqui debet qui relinquitur ex numero A; nimirum E 2. Sed ſi reiiciatur nouenarius ex radice B 32, & reliquus F 5 in ſe ducatur, vt fiat G 25 : ex quo reiecto nouenario ſupereſt H 7 : in quem ducatur F, vt fiat L. Vnde etiam fiat nouenarij reiectio: quæ reliquum exhibeat k 8. Idem relinqui debet, ac ſi ex ipſo cubo P nouenarius reiiceretur. Ergo reiecto nouenario ex k & M ſimul, & ex P & M ſimul, idem numerus relinquitur E 2. Probatur Aſſumptum. Cubus P generatur ex radice B 32 in ſe primùm ductâ : & rurſus eadem ductâ in productum quadratum ſuum. Sed ſi prior multiplicatio radicis B in ſe probanda foret; reiiceretur ex illo producto radicis B quadrato nouenarius;relictúſque ſeponeretur:cui æqualis eſt,vt in multiplicatione docui, qui reliquus fieret reiecto nouenario, ex numero quem gignit F 5 ductus in ſe,hoc eſt, ex numero G 25; eſt enim in hoc caſu idem numerus B 32 multiplicans, & multiplicatus. Quare ſi multiplicatio probanda eſſet, idem numerus F 5 reliquus ex vtroque, abiecto nouenario, in ſe duceretur : & ex producto, qui, eſt G 25, reiiceretur nouenarius, ac reliquus fieret H 7,qui relinqueretur ex radicis B 32 quadrato 1024.Iam vt fiat cubus eiuſdem radicis B 32, ineunda eſt multiplicatio eiuſdem radicis B 32 in quadratum ſuum 1024 : fiet autem cubus 32768. Sed ſi hanc

multiplicationem

A 34328 —— E 2	
B 32 — F 5 — G 25	
H 7. L 35. k 8. M 1560	
P 32768 N 2	

multiplicationem probare velis: abiecto nouenario ex vtroque numero 32 & 1024, duos reliquos 5 & 7 (qui iam reperti sunt F 5 & H 7) in se mutuò duceres, vt fieret L 35: ex quo rursus abiecto nouenario superesset k 8: quæ eadem figura reliqua fieret ex numero cubo P 32768, si ab eo nouenarius reiiciatur; cum productus sit ex multiplicatione radicis B 32 in quadratum suum 1024. Cum ergo idem numerus, nempe k 8 supersit detracto nouenario ex numero L, & ex numero P: si vtrique addatur numerus reliquus M, & ex genito vtroque reiiciatur nouenarius; eadem adhuc figura reliqua vtrimque fiet. At si ad cubum P addatur M fit datus numerus A (superat enim numerus A cubum P, excessu M 1560) ergo si ex dato numero A nouenarius reiiciatur; idem numerus reliquus fieri debet; qui relinquitur abiecto nouenario ex numeris L & M simul. sed ex solo L 35 iam relictus est k 8. Ergo si illam reiectionem prosequamur, ex numeris k & M, tanquam vno; idem numerus relinqui debet, nempe N, qui relinquitur reiecto nouenario ex toto dato numero A 34328. Quare, si, vt præcipitur, nouenarius abiiciatur ex dato numero A 34328, & seponatur reliquus E 2: huic æqualis esse debet numerus N: qui superest si primò à radice inuenta B 32 dematur nouenarius: & reliquus F 5 in se ducatur vt fiat G 25. Vnde item dematur nouenarius; vt fiat reliquus H 7: quem F 5 multiplicet, vt fiat L 35: Ex quo rursùs dematur nouenarius, vt reliquus sit k 8. ex quo tandem, & simul ex M dempto nouenario, reliquus fit N 2 æqualis seposito numero E. Ergo tradita methodo rectè examinatur radix cubica ex dato numero educta: quam cum secuti fuerimus, rectè absoluimus. Quod præstandum erat.

PROP. XXXVII. *Probl.*

In numeris præcisa radice cubicâ carentibus radicem præcisiorem definire.

Constructio.

Eruta est radix propositione antecedente ex numero A; eáque fuit inuenta

A 34328.	B 32
C 1560	D 32768
E 1024	C 1560
B 32	B 32
———	H 3179
F 1056	C 1560
G 3178	B 32
H 3179	G 3178

uenta B 32, minimè præcisa & adæquata: superfuit enim post absolutas omnes ad extractionem necessarias operationes numerus C: quo numero datus numerus A excedit cubum; quem continet maximum, & quem radix B in se cubicè ducta generat: qui cubus est D. Nec potest alius maior cubus haberi per radicem numero integro expressam maiorem quàm B, quin datum numerum A excedat. Verum poterit radix B adsciscere sibi fractos numeros: quorum ope maiorem cubum quàm D; minorem tamen quàm datum numerum A generet; eáque radix ex integro numero B; & fracto composita ad veram radicem magis accedet: quamquam nulla sit possibilis, vt de quadrata dictum est Prop. 11. quæ ipsum numerum A producere possit, vt infra vniuersaliter de qualibet potestate demonstrabitur, vt ergo habeatur fractio aliqua, quæ ad integram radicem B apposita ipsam ad præcisiorem euehat: hanc adhibe constructionem ei persimilem: quam ad radicem quadratam promouendam exposui Prop. 18. superiori.

Duc in se radicem inuentam B: vt fiat eius quadratus E. Huic adde ipsam radicem B factumque numerum F triplica, & genito G adde vnitatem, vt fiat H. Hic ergo numerus H si statuatur denominator fractionis; cuius numerator sit numerus ille C factâ extractione reliquus: habebitur radix B 32 cum fractione C H præcisior; quàm si solus integer numerus B 32 in radicem assumeretur: verâ tamen minor hoc modo constituta radix semper futura est. Quod quidem absque omni à causis deductâ demonstratione à logistis omnibus hactenus admissum, verissimum esse declarat experientia. Quæ probationis locum ad allatam constructionem stabiliendam hîc etiam meritò obtinere posset; cum præsertim ea radicis promotio, cum vlteriùs non progrediatur, nec æquè maior ac minor verâ exhibeatur radix; velut paulò post exhibebitur: minùs perfecta esse colligatur. Verùm ne hoc solum caput hoc in meo opusculo remaneat demonstratione destitutum, eam accipe eiusmodi.

Præparatio.

Radix B 32 cum fractione C H in duas partes secari concipiatur: quarum vna sit B 32; altera fractio C H. totius ergo radicis huius cubus est per Prop. 30. huius. Æqualis cubis duobus ex B, & fractione C H genitis; & simul tribus parallelepipedis æqualibus inter se: quorum vnum

fit, dum ducitur fractio C H tanquam altitudo in basin genitam ex tota radice B 32 cum fractione C H in alteram partem B 32 ductâ. Dum autem ducitur B 32 in totam radicem B 32 cum fractione C H; idem fit numerus ac cum ducitur B 32 in se, & in fractionem C H per 3 Prop. libri 2. Elem. Ergo parallelepipedum illud æquale est solidis simul: quorum vnum fit ex altitudine C H in quadratum radicis B 32; alterum ex eadem C H altitudine in rectangulum contentum sub B 32, & fractione C H per Prop. 1. lib. 2. elem. Ergo tria illa parallelepipeda simul æqualia sunt solido quod fit ex altitudine C H in quadratum radicis B 32 triplicatum; & in rectangulum triplicatum sub B 32, & fractione C H contentum. Quod cum ita sit. Probandum est reliquum illum numerum C 1560 post eductam radicem B 32 ex dato numero A, maiorem esse tum cubo fractionis C H, tum solido numero; qui fit ex C H in quadratum triplicatum radicis B 32; & in triplicatum rectangulum radice B 32, & fractione C H contentum. Id enim si constiterit, constabit euidenter hanc radicem B 32 cum fractione C H verâ esse minorem, cum gignat cubum dato numero A minorem. Si enim ad cubum radicis B 32 (qui in schemate est D 32768) addatur numerus ille reliquus C; fit numerus A: at si ad eundem cubum addatur solidus ille numerus (si minor quam C probetur) vt fiat cubus radicis B 32 adhærentem fractionem C H habentis: patet cubum huius radicis minorem fore dato numero A: atque adeò, quod intenditur, hanc radicem verâ esse minorem. Illud ergo ita colligo.

A 34328.	B 32
C 1560	D 32768
E 1024	C 1560
B 32	B 32 ———
———	H 3179
F 1056	C 1560
G 3178	B 32 ———
H 2179	G 3178

Demonstratio.

Fractionis C H denominator H multiplicatus per ipsam fractionem C H producit numeratorem C per Prop. 9. lib. 2. huius. Sed numerus productus ex multiplicatione denominatoris H per fractionem C H, maior est numero: qui fit ex multiplicatione fractionis C H in se cubicè ductæ & simul ductæ in quadratum radicis B triplicatum, & in rectangulum sub triplicata radice ipsa B & ipsa fractione C H. Ergo numerus C maior est hoc eodem numero. Probatur minor. Fractionis C H, denominator H conflatur ex additione quadrati E radicis B, & ipsiusmet radicis B (qui est numerus F in schemate) si ter ambo sumantur, vt fiat G; cui addatur vnitas; vt fiat H. Ergo dum fractio C H ducitur in suum denominatorem

rem H: fit numerus æqualis ei; qui producitur ex fractione C H in quadratum radicis B ter, ter item in ipsam radicem B, & denique in vnitatem. Sed hic numerus ex tribus illis conflatus maior est numero; qui fit ex fractione C H ducta in quadratum radicis B ter; ter item in rectangulum sub radice B, & ipsa fractione C H contentum; ac denique ex ipsa fractione C H in se cubicè ductâ, siue eius cubo. Ergo numerus ex fractione C H ductâ in suum denominatorem C. Maior est hoc eodem numero. Probatur minor. Dematur vtrimque numerus communis: qui fit ex fractione C H in quadratum radicis B 32 ter: remanebit ex priore numero, is, qui fit ex fractione C H ductâ in ipsam radicem B 32 ter; ducta item in vnitatem. Ex posteriore verò relinquetur numerus: qui fit ex fractione C H ductâ in rectangulum sub B 32, & fractione C H contentum ter & ex cubo eiusdem fractionis C H. Sed reliquus prior numerus posteriore hoc maior est. Probatur. Partes singulæ prioris, partibus singulis posterioris sunt maiores. Ergo totus numerus ex illis conflatus maior est numero ex istis conflato. Probatur assumptum numerus integer B 32, maior est rectangulo sub B 32, & fractione C H contento patet. Nam productus ex fractione in numerum integrum ductâ, minor est ipso numero integro multiplicato per Prop. 24. lib. 2. huius in scholio similiter altera pars prioris numeri, quæ est vnitas; maior est altera parte posterioris, quæ est cubus fractionis C H: fractio enim in se ducta gignit quadratum ipsa fracta radice (quæ vnitate minor est) minus; ducta rursùs in quadratum, cubum minorem adhuc eadem radice producet; atque adeò vnitate longe minorem. Ergo numerus, qui fit ex fractione C H in radicem B 32. triplicatam ductâ, & ductâ in vnitatem, maior est numero, qui fit ex eadem fractione C H ducta in rectangulum radice B 32, & fractione C H contentum, & ex cubo eiusdem fractionis C H. Ergo etiam maior erit numerus conflatus ex eo, qui fit ex fractione C H ducta in quadratum radicis B triplicatum, & in triplicatam eandem radicem B, ac denique in vnitatem; qui conflatus ex his numerus, est ipse reliquus post extractionem numerus C 1560, vt declaratum est: maior, inquam, erit hîc numerus numero, qui fit ex fractione C H ducta in quadratum radicis B 32 triplicatum, & in triplicatum rectangulum sub radice B 32, & fractione C H contentum; & ex ipsius fractionis C H cubo: qui numerus, vt etiam declaratum est, cum cubo radicis B 32 (qui in schemate est D) est cubus radicis totius B 32, & fractionis C H tanquam vnius. Ergo hic cubus minor est dato numero A. Ergo ipsa radix B 32 cum fractione C H minor est verâ, veræ tamen propior est, quàm sola radix B 32. Radicem ergo præcisiorem in numeris radice cubica carentibus definiuimus, Quod faciendum erat.

Scholium.

Hic est communis radicem cubicam minimè præcisam ad præcisiorem promouendi modus vsurpari solitus: qui sanè minùs est absolutus; tum quia radicem verâ tantùm minorem exhibeat, non autem verâ maiorem: quæ inter se ambæ conferri, eóque de vera iudicium certius præstare possint: tum etiam quia in eo præcisionis gradu sistitur; nec eius ope ad veram licet propiùs accedere. Libuit tamen illam methodum sua demonstratione, qua carebat, munire: ne quid, quoad fieri poterit, omittam eorum, quæ in logistica hac facultate occurrere solent, quod non accuratè perpendatur, & quod ad certam & euidentem totius huius artis cognitionem acquirendam conducat. Verùm aliam rationem huiusmodi mancas radices ad veriores adducendi longè perfectiorem iuuat aperire: quâ tum verâ maiores, tum minores in infinitum veræ propiores facili methodo possint obtineri, ei non absimili: quam superiùs ad quadratæ radicis promotionem attulimus. Quod conficio hoc priùs soluto problemate.

PROP. XXXVIII. *Probl*

Fracti numeri radicem cubicam inuestigare.

Constructio.

Occurrat hîc idem, quod superiùs ad propositionem 26. occurrere in radicum quadratarum extractione obseruari. Nimirum, fractum numerum, qui reuerá cubus sit, & cubica radice gaudeat; exprimi posse eius generis terminis, qui cubi non sint: è quibus erui radices præcisæ nequeant: quæ haberentur præcisæ; si alio modo fractio designaretur. Ne igitur ex dato numero radicem mancam, cum veram possit, educere contingat aliquando. Fracti numeri terminos, si ipsi minimi non sint, hoc est, per Prop. 18. lib. 2. huius, primi non sint inter se; ad minimos terminos reuoca per Prop. 20. lib. 2. huius. Tunc enim fractus numerus, si reuera cubus est; non potest non cubis terminis designari per Prop. 2. lib. 8. Eucl. eiúsque corollariis. His obseruatis.

Sit datus numerus fractus AB) duplex appono paradigma, alterum fractionis

A 27	C 3	A 6	C 1
B 64	D 4	B 8	D 2

fractionis verè cubicæ, non cubicæ alterum) educatur radix C è numeratore A, è denominatore autem B, radix D: & fiat ex C & D, fractio C D. Hæc est radix cubica fracti numeri dati A B, siue vera, siue à vera deficiens.

Demonstratio.

Si fractus numerus C D in se ducatur cubicè: id non aliter absoluitur, quàm si tam numerator C in se, quàm denominator D in se ducantur cubicè per Propositionem 24. libri 2. Ergo etiam è conuerso. Si diuidatur A B fractus numerus cubicè, hoc est, si radix cubica ex eo educatur, radix cubica educi debet tam ex numeratore A, quàm ex denominatore B. Ergo rectè educta est radix cubica ex dato fracto numero A B. Quod faciendum erat.

Quod si terminorum alteruter, siue numerator, siue denominator, vel vterque verâ radice careat: ea ad veram propiùs adduci poterit; vel eo, quem proximè antecedenti Propositione tradidi, modo: vel aliquo ex proximè sequentibus. Orietur autem ex huiusmodi radicis promotione ad veram, fractio complexa; vt oriri contigit superiùs Propositione 29. Vbi è fractione educitur radix quadrata; docetúrque modus fractiones huius generis complexas in simplices conuertendi. Locum consule, & huic applica.

PROP. XXXIX. *Probl.*

Dati numeri radicem cubicam minimè præcisam ad præcisiorem adducere, verâ tum maiorem, tum minorem in infinitum.

Constructio.

Datus sit numerus A: ex quo eruta radix, præcisa non est; vnde nec ipse numerus A cubus esse potest. Quæritur autem radix præcisior. Ducito cubum quempiam, vt B, in datum numerum A: vt fiat numerus C: quò autem maior fuerit cubus B ad multiplicandum assumptus (assumi autem poterit maior, vel minor; cum liceat maiorem, vel minorem numerum in se cubicè ducere; qui ipsum producat) eò præcisior futura est

A 20	C 160	D 5	F 6
	—	—	—
B 8	B 8	E 2	E 2

radix quæ inquiritur. Tum producto per hanc multiplicationem numero C tanquam numeratori subscribatur denominator B cubus, vt fiat fractio C B: à qua radix educatur D E. Dico fractionem D E esse radicem dati numeri A præcisiorem, quàm foret radix educta è numero simplici A: quæ quidem minor erit quam vera; si neglecto, qui post extractionem reliquus fit numerus; radix D numeri C, sumatur minor verâ. At si ad radicem D addatur vnitas, vt fiat F numerator fractionis F E: erit fractio F E, eiusdem numeri A radix maior verâ.

Præparatio.

Demonstranda sunt hîc duo asserta primum, fractiones D E, & F E esse radices dati numeri A illam minorem, hanc maiorem. Secundum, vtramque, siue saltem alterutram, esse præcisiorem, quàm sit radix simplex è simplici numero A extracta: quod hîc præcipuè intenditur. Ad primum quod attinet, clarum est fractionem vtramque D E, F E esse radicem cubicam numeri A. Nam fractio D E (idem de altera F E dicito) est radix fracti numeri C B: sed fractus C B est æqualis numero A. Ergo D E est radix numeri A. Probatur minor cubus B multiplicans A genuit C. Ergo B diuidens C, restituit A. At B diuidere censetur C, dum huic supponitur B velut denominator. Ergo fractio C B æqualis est numero A. Est verò radix D E minor verâ. Nam radix D, numeri C est minor verâ, cum in se ducta cubicè numerum C non producat, sed cubum tantùm maximum in numero C contentum. Ergo fractio D E est minor, quàm vt producat, si in se cubicè ducatur, fractionem C B, hoc est, numerum A. Contrà verò fractio F E, est radix maior verâ numeri fracti C B, siue integri A, eò quod (si in se ducatur cubicè numerator F) numerum genitura sit maiorem quam C: cubum nimirum eo numero C proximè maiorem: qui cum eodem denominatore B fractionem constitueret maiorem fractione C B, hoc est, numero A eodem enim posito denominatore illa fractio maior est, cuius maior est numerator per Prop. 10. lib. 2. Ad secundum verò & præcipuum caput demonstrandum: ad demonstrandum scilicet fractionum D E, F E aut vtramque aut alterutram esse radicem præcisiorem dati numeri A: hæc præparatio necessaria est: quæ sequenti ratiocinatione tota perficitur, ipsáque demonstratio stabilitur.

Numerus A datus, solidus supponitur, quandoquidem ex eo radix cubica, quæ ad solidos pertinet, eruenda proponitur: tot ergo cubos continet, quot vnitates iuxta ea quæ lib. 1. Prop. 30. declarata sunt. Idem numerus

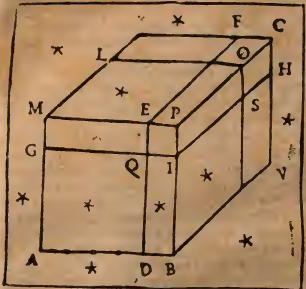
numerus A cubum quemdam maximum continet, nempe G ad quem propriè pertinet radix, quæ è numero A educitur; non enim ex ea radice in se cubicè ductâ generatur numerus A, sed tantùm verus eius cubus G: adeò vt ea radix (quæ est H) sit verâ minor, cum numerum dato A minorem producere nata sit. Eo tamen excessu numerus A cubum G,

A 20	C 160	D 5
G 8	B 8	E 2
H 2	L 12	

quem continet maximum, superat; vt maior non sit quadrato radicis H, & eadem radice H triplicatis. Vt Prop. 35. præcepto octauo euidenter declaratum est. Et verò in hoc paradigmate; si cubum G 8 à numero A 20 detraxeris; reliquus fit L 12 non maior triplo quadrati radicis H 2, cum triplo eiusdem radicis ipsius H 2. Quæ duo tripla simul forent 18. Quot autem vnitates, numerus L continet, tot cubos continere censendus est: non secùs ac numerus A: cuius L pars quædam est. Hi porrò cubi satis multi non sunt, vt possint cubo G 8 maximo, qui in A continetur, aptè circumponi, vt cubus maior, quàm G nasceretur. Ad hoc enim necesse forent ex citato præcepto, vt non tantùm L 12 cubi haberentur, sed 19: tunc verò radix H 2 vnitate cresceret, fieretque 3. cuius cubus foret 27 maior, quàm datus numerus A 20.

Ad hæc. Etsi illi cubi L 12 nequeant cubum G 8 seruatâ cubica figurâ circumdare: quis tamen geometrarum negat eos secari & concidi ita posse, vt ex iis formetur cubus maior cubo G, si ad hunc partes addantur? negandum quidem est ex cubis illis L 12 in quotcunque partes in infinitum sectis formari posse cum cubo G, cubum eo maiorem; ita, vt partes omnes exhauriantur: alioqui tunc haberetur radix vera, & præcisa numeri A 20; ipséque A cubus foret verus. Quod est impossibile; vt de numeris non quadratis, eorúmque radicibus Prop. 11. demonstratum est. Neque enim in cubis minùs quàm in quadratis radices occurrunt surdæ, & irrationales. Vt autem pateat talem cuborum illorum L 12 discissionem iniri posse, vt partium aliquot cubo G circumgestæ cubum effingant: vnde maxima lux toti huic radicum extractioni accessura est, geometricum adduco diagramma rem oculis ipsis subiecturum.

Concipiatur linea A D in duas partes æquales diuisa; earúmque altera iterum in duas, quarum vna sit D B, ita vt tota A B sit partium quinque, & A D partium quatuor. Super vtraque cubus construatur: quorum maior A C minorem, solido gnomone circumuestit. Cubus ergo lateris



lateris A D, vt in duas tantùm partes diuisum concipitur, ductis per diuisionem planis distribuetur in octo cubos æquales. Quod si ad latus A D in duas partes diuisum adderetur linea earum alteri æqualis, vt fieret latus alterius cubi maioris tribus partibus constans: cubus ille maior ad minorem adderet numerum cuborum, qui iuxta Propositionem 32. superiorem conflatur ex triplo tam lateris A D partium duarum, quam quadrati A Q quadratorum quatuor, & vnitate simul additis. Atque ita solidus ille gnomon minori cubo octo cubis constanti circumdatus cubos compleceretur 19, æquales singulos singulis octo cubis, quibus constat cubus lateris A D, & cum illis octo cubis, cuborum 27 numerum generaret cubicum proximè maiorem cubico numero 8, cuius nimirum radix est A D duas partes continens: qualium tres continet radix alterius maioris cubi. Hinc fit, vt omnis cuborum illis æqualium numerus inter cubicum numerum 8 & cubicum 27 ineptus sit ad cubum constituendum cum minore cubo 8. Quæ omnia ex superioribus clara sunt: sed hîc obiter refricanda fuère. Quibus positis.

Si detur cuborum numerus inter cubicos duos numeros 8 & 27 interiectus, qualis est superioris paradigmatis numerus 20, non poterit cubum efformare integrum: si enim cubi 8 demantur à cubis 20: reliqui fiunt cubi 12 solidum gnomonem (qui cubos 19 exigit) componendi incapaces. Verùm si tam cubi illi 8, quàm hi cubi 12, cum sint omnes æquales, in minores cubos secentur: nihil obstabit quò minùs ex 12 cubis illis nascatur cuborum minorum numerus satis magnus, vt gnomonem solidum creare possint, minori cubo in minores etiam diuiso circumponendum. Ecce enim cum linea A D est partium 4, talium 5 est A B. cubus ergo radicis A D 4. Est 64 cuborum æqualium: atque ita

octo

octo illi priores cubi ex radice A D in duas tantum partes diuisa geniti; diuisi sunt singuli in partes octo: vnde natus est numerus cuborum 64. per multiplicationem octo illorum cuborum per numerum cubicum 8. cubus autem radicis A B partium 5, erit numerus 125 cuborum æqualium eiusdem cum prioribus quantitatis. A quibus si detrahantur cubi 64; remanebunt cubi 61, qui gnomonem solidum tribus prismatibus prismati D O æqualibus, & cubo vno S F constantem efficiunt. Perpendendum itaque est. An cubi illi 12, quibus datus numerus A 20 superabat numerum 8 cuborum lateris A D in duas partes diuisi: si eodem modo multiplicentur per cubum 8, vt multiplicati sunt cubi octo radicis A D; vt fiant cubi his æquales; producant cuborum numerum satis magnum, vt ex eo demi queat solidus ille gnomon cubis 61 constans. At cubi 12 multiplicati per numerum cubicum 8, producunt cubos 96, longè plures, quam 61. Ergo ex illis cubis 96, assumi poterit solidus gnomon cubis 61 constans, qui cubo 64 cubis constanti circumponi possit; vt cubum effingat cubis 125 constantem. Factâ autem subtractione numeri 61, ex 96; fiet reliquus adhuc numerus cuborum 35: qui ad cubum radicis A B componendum non insumuntur. Ex his ergo patet, ex cubis illis 12, qui cum cubo 8 radicis A D duarum partium, cubum nouum maiorem efformare non poterat; quantitatem desumi posse; quæ cum eodem cubo 8 radicis A D in duas partes diuisæ, cubum constituat: si nimirum ad radicem A D addatur D B quarta illius pars; & fiat A B partium 5: quarum A D est partium 4. Quo posito clara euadit allatæ solutionis probatio.

Demonstratio.

Iussum est, vt numerus A 20 minimè cubicus, hoc est, radice carens cubicâ præcisâ multiplicaretur per cubum quempiam G 8; & factus est numerus C 160: cui si supponatur cubus G 8 multiplicans, fiat fractus; vnde eruatur radix fracta D E, vel F E, illa minor, hæc maior verâ. Patet ergo in primis fractum C G æqualem esse dato numero A 20.

A 20	C 160	D 5	F 6
P 1	G 8	E 2	E 2
G 8			

Si enim numero A supponatur vnitas P denominator: vt fiat fractio A P, hæc multiplicata per numerum G 8 fractionem producit C G æqualem numero A per Prop. 5. lib. 2. huius; sunt enim termini C, G, proportionales terminis A, P per Prop. 3. citati lib. Ergo radix D E est radix numeri A. Ostendo præterea eam esse præcisiorem quàm radicem è numero A simplici eductam. Nam G multiplicans A, multiplicat A diuisum in duas partes, nempe in cubum 8 maximum in eo contentum, & in numerum 12, quo numerus A

excedit cubum 8: vnde productus C 160 æqualis est cubo 64, (cubus enim quicumque G fuerit, cubum 8 multiplicans, cubum generat per Propositionem 4 lib. 9. Elem.) & numero 96; qui fit ex multiplicatione eiusdem cubi G 8 in alteram partem 12 numeri A. Sed numerus 96, superat numerum 61 cuborum necessarium ad gnomonem integrum cubo maximo 8 numeri A 20, circomponendum vt maior constituatur cubus, quàm qui in simplici numero A maximus continetur, nempe quàm cubus 8. Ergo etiam radix alius cubi maioris maior est, quam radix cubi 8 simplicis in numero A simplici contento. Radix autem hæc, est D E, siue in figura Geometrica, A B, maior quàm A D, siue 2, radix cubi 8. minorem tamen verâ eam semper esse ostensum est; sicut & verâ maiorem radicem F E: cuius numerator F vnitate superat numeratorem D. Generabit enim radix hæc F E cubum maiorem numero C G, siue A 20. Ergo radicem præcisiorem è dato numero non cubo eduximus; nec tantú præcisiorem, sed pręcisioré in infinitum: cum liceat eandem solutionem afferre circa numerum 35, post extractionem hanc reliquú: quæ circa numerum priorem 12 allata est: quæ secunda operatio ad hanc promotionem radicis non veræ ad veriorem necessaria futura non est, si primo loco assumatur in multiplicatorem cubus maior: quo enim maior cubus datum numerum, à quo radix eruitur, multiplicauerit; eò præcisior radix, vt in constructione monui, euentura est, vt ex allata ratiocinatione colligitur: sic enim datus numerus, qui tot cubos, vt etiam obseruari, continet; quot vnitates; in plures cubos, atque adeo minores secatur: qui in solidum gnomonem, cubum in dato numero maximum comprehensum circundantem componi queant. Quare dati numeri radicem minimè præcisam ad &c. Quod faciendum erat.

Scholium.

Obseruandum hîc est contingere posse, vt datus numerus per cubum multiplicetur; nec tamen habeatur præcisior radix cubica, radice eductâ è simplici dato numero: ita vt verum vniuersaliter non sit; radicem esse præcisiorem, si datus numerus per cubum multiplicetur; & ex producto radix eruatur. Vera tamen est allata solutio: quia si quis cubus in multiplicatorem assumptus minus satisfaciat; alius maior & maior ad arbitrium assumi potest; qui quæsitam radicis præcisionem exhibebit. Ecce.

Eruenda sit radix è numero A 10: huius simplex radix verâ minor est 2 (maximus enim in numero A contentus cubus est 8, cuius radix est 2; quæ eadem est radix numeri A 10) multiplica iuxta constructionem numerum A 10 per cubum G 8; fiet fractio C G nu-

A 10.	C 80	D 4	F 5	H 125
G 8.	G 8	E 2	E 2	L 8

mero A æqualis, vt supra declaratum est. Erue è fractione C G radicem D E verâ minorem. Hæc maior non est, quàm quæ priùs inuenta fuerat, nempè 2. diuiso enim numeratore D per denominatorem E, quotiens est 2, idem cum radice 2 è simplici numero A 10 eductâ. Tunc ergo maior cubus quam G 8 ad multiplicandum A assumendus erit; qui proposito satisfaciat. Nec maior verâ radix F E in hoc casu satisfactura est meliùs quàm verâ minor. Hæc enim in se cubicè ducta procreat fractum numerum H L longius per excessum à dato numero A 10 alienum, quam sit per defectum alienus numerus 8: quem radix minor verâ 2, in se cubicè ducta generat.

Corollarium.

Ex huius problematis generali solutione; eiúsque demonstratione, aperta fit illa compendiosa æquè ac iucunda mancas huiusmodi radices ad veriores admouendi ratio: quam decadica minuta suppeditant. Quam quidem à multis adhiberi à nemine demonstrari reperire est. Hæc ita habet.

A 12000	
B 22	
D 2	F 3
C 2 —	C 2 —
E 10	E 10

Ad datum numerum, exempli causa, A 12 apponantur aliquot ternarij figurarum O (hîc vnicus apponitur) tum ab hoc numero radix eruatur cubica B 22; omisso, quisquis reliquus fuerit numerus tanquam nullius momenti. Denique à radice B tot abscindantur figuræ postremæ: quot ternarij figurarum o appositi fuêre (vt hîc vnica, nempe 2 ob vnicum appositum ternarium) & abscissæ figuræ fiant numerator fractionis; cuius denominator sit vnitas præfixa cum tot figuris o, quot ternarij notarum o ad datum numerum appositi sunt. Erit enim hæc fractio cum integro reliquo radicis inuentæ radix præcisior. Vt hîc inuenta est radix B 22: ex ea abscinditur posterior figura 2: quæ fit numerator D 2 fractionis D E: cuius denominator E 10 est vnitas cum vnica figura o. quæ fractio adiuncta ad radicis numerum 2 integrum, reliquum post abscissionem posterioris figuræ 2, radicem constituet C 2 cum fractione D E præcisiorem; & quidem verâ minorem: maior autem verâ fiet: si ad numeratorem D 2 addatur vnitas, vt fiat F 3: cui idem denominator E 10 supponatur: eritque tunc radix C 2 cum adhærente fractione F E dati numeri A 12 radix cubica maior verâ.

Huius elegantissimæ methodi demonstratio clarissima est. Cum enim ad numerum A apponi iubetur figurarum o ternarius, multiplicati iubetur A per G cubum radicis 10: atque ita numerus A 12 (si ei supposita vnitas P intelligatur) mutabitur in numerum fractum L G æqualem. Si ergo è numero fracto L G eruatur radix fracta B E: ea erit radix dati nu-

meri A 12. Iam si numerator B 22 diuidatur per denominatorem E 10,

A 12		L 12000	B 22	D 2	F 3
—	G 1000	——	— C 2	— C 2	
P 1		G 1000	E 10	E10	E 10

cum hæc diuisio absoluatur, vt lib. 1 declaratum est, abscissis ex diuidēdo B 22, tot figuris, quot sunt in diuisore E 10, figuræ 0; ex quibus fiat fractus numerus adiungendus ad reliquas diuidendi intactas figuras, vt habeatur totus quotiens C 2, cum fractione D E: constat euidenter hanc methodum decadicam eandem esse cum methodo generali hîc traditâ, & demonstratâ. Cum verò duo apponuntur ternarij figurarum 0 ad numerum: tunc per cubum 1000 000 (cuius radix est 100) multiplicari censetur: radix autem inuenta diuiditur per 100; hoc est, duæ eius posteriores figuræ seponuntur: vt fiant numerator fractionis, cuius denominator est 100.

PROP. XL. *Probl.*

Dati numeri non cubi radicem veræ in infinitum propiorem aliâ nouâ ratione definire.

Constructio.

Datus sit numerus A, vnde radix cubica eruenda est. Fiat ex eo fractio quæcumque C B iuxta Prop. 21 lib. 2. multiplicato scilicet per quemcunque numerum B, dato numero A; & genito C tanquam numeratori,

	C 900		G 729000000	C 900
A 9	——	D 810000	——	——
	B 100		E 81000000	F 432

subscripto multiplicante numero B denominatore (ad expeditiorem calculum non parùm conducet; si numerus B, decadicus quicumque assumatur, vt hîc assumptum vides (Tum fractionis C B numerator C in se ducatur: vt fiat eius quadratus D. In hunc quadratum ducatur eiusdem fractionis denominator B. Vt fiat E: à quo tandem radix cubica eruatur F quæ fiat denominator fractionis; cuius numerator sit C, idem cum numeratore prioris fractionis C B. Dico hanc fractionem C F esse radicem cubicam dati numeri A veræ propinquiorem; & quidem eò propinquiorem, quo maior fuerit assumptus multiplicator B.

Demonstratio.

Demonstratio.

Ducatur C in quadratum ſuum D; vt habeatur eius cubus G : qui ſtatuatur numerator fractionis G E. Quia ergo D multiplicans C, & B, generat G & E : erunt C, B, & G E proportionales per Prop. 3. lib. 2. Ergo per Prop. 5. lib. 2. fractiones duæ C B, G E æquales erunt: Ergo fractio E, non ſecùs ac fractio C B, numero A eſt æqualis. Cum ergo fractio C F ſit radix cubica fractionis G E : erit & ipſa radix dati numeri A. Eius autem radicis numerator eſt C, idem cum numeratore fractionis C B : eò quod fractionis G E numerator G, cubus ſit numeri C. Ductus enim eſt C in ſe, genitúſque eſt D; in quem ſecundò ductus C cubum ſuum G produxit. Vnde fit, vt iubeatur ipſe C numerator fractionis C B, ſtatui numerator radicis C F. Quam conſtat præciſiorem eſſe ex dictis Propoſitione antecedente; in cuius præparatione declaratum eſt; quomodo radix cubica dati numeri eò ſit præciſior futura, quò plures in partes ipſe numerus ſectus fuerit. Quare dati numeri radicem cubicam in infinitum propiorem inuenimus. Quod faciendum erat.

Hac porrò methodo inuenta radix neceſſariò verâ maior eſt. Nam denominator F, qui radix eſt numeri E, eſt iuſto minor : neglectus ſiquidem eſt reliquus quiſpiam numerus tanquam nullius momenti poſt extractionem : numerator autem C verus eſt, & præciſus. Cum ergo fractio eò maior ſit, quò minor ſtatuitur denominator eodem perſeuerante numeratore ex Prop. 11. lib. 2. patet hanc fractionem C F verâ eſſe maiorem. Quod ſi ad denominatorem F 432 addatur vnitas, vt fiat 433. tunc radix euadit verâ minor; propter rationem contrariam : & verò cubus huius radicis 433, eſt maior numero E à quo educta eſt radix hæc. Sed ecce, vt habeatur radix minor verâ ex ipſa operatione.

ALITER.

Eodem dato numero A, eadémque paratâ fractione C B, numero A æquali.

A 9	$\frac{C\ 900}{B\ 100}$	D 1000000	$\frac{E\ 900000000}{G\ 100000000}$	$\frac{F\ 208}{B\ 100}$

Ducatur denominator B in ſe, vt fiat D quadratus denominatoris B : in quem ducatur numerator C : vt fiat E. Vnde radix cubica eruatur F : quæ fiat numerator fractionis; cuius denominator ſit idem B; qui denominator extitit prioris fractionis C B. Dico fra-

ctionem hanc F B esse radicem verâ minorem dati numeri A. Quod si numeratori F 208 addatur vnitas, vt fiat 209: tunc radix erit verâ, maior.

Demonstratio

Ducatur fractionis C B denominator B in quadratum suum D; vt fiat eius cubus G. Quia igitur D multiplicans C & B producit E & G: erunt C, B; & E, G proportionales per Prop. 3. lib. 2. Ergo per Propositionem 5. lib. 2. fractio E G æqualis est fractioni C B; atque adeo dato numero A; cui æqualis est fractio C B. Quare si è fractione E G radix eruatur F B: ea erit radix numeri A. Erit autem minor verâ. Quia numerator F, est radix numeratoris E verâ minor ob quempiam neglectum numerum post absolutam extractionem: eodem autem denominatore permanente quò magis numerator minuitur, eò fractio minuitur magis vt ex Prop. 10. lib. 2. colligitur. Ergo radix F B est minor verâ. At si numeratori F addatur vnitas, vt fiat 209: tunc fractio F B radix foret verâ maior. Nam dum è numero E radix educeretur, figura illa 9 numeri 209, maior erat iusto: vnde si in se ducatur numerus 209 cubicè: cubum gignet maiorem numero E. Præcisior tamen radix hæc vtraque tam maior quàm minor verâ futura est; quàm radix simplicis numeri A dati: vt ex præcedente Propositione constat. Vbi declaratum est radicem eò fore præcisiorem; quò plures in partes numerus datus dissecabitur per numeri B multiplicationem; qui maior sine termino assumi potest. Ergo & præcisior sine termino radix haberi. Quare radicem in infinitum præcisiorem inuenimus. Quod faciendum erat.

MONITVM.

Hactenùs de extrahenda è numeris radice tum quadratâ, tum cubicâ, methodo singulari è geometricis petitâ actum satis multis, nec, vt opinor, iniucundà; non quidem certè inutili; nec omninò obsoleta. Nunc id, cuius sub initium fidem dedi, præstandum superest: superest scilicet tradenda ratio vniuersalis omnes quascunque radices quadratâ & cubicâ superiores è quauis data potestate educendi. Quod quantæ sit operæ, vel ex ea colligas; quam circa hasce duas quadratam & cubicam etsi longè
pliciores, impensam cernis: quid si generis huius radicum ex
(in quo ars illa maior, ars illa diuina, algebra ferè tota versa
tum euocanda sit hactenùs sepulta demonstratio? spero ta
graniore consequuturum, vt quidquid ad plenam huiu
tionem necessarium fuerit, ita exponatur, vt tibi c

In primis ergo memineris eius, quod supra Pr

corollario, obseruatum est. Nimirum, cum cuiuspiam potestatis siue potentiæ (quid hoc nomine intelligendum veniat; Propositione 1. libri huius 3. declaratum est) radix inuestiganda proponitur: aliud nihil proponi, quam vt reperiatur numerus ille, qui in se ductus aliquoties, datum numerum, cuius radix quæritur, producere natus est. Cum autem numerus quilibet continua multiplicatione in se primùm ductus, tum in genitum, in hunc deinde, & sic deinceps in infinitum, progressionem numerorum geometricam constituat: cuius ita producti termini sunt radicis illius primæ, per quam continua multiplicatio absoluitur, variæ, variòque nomine nuncupatæ potestates, vt Propositione 1. citatâ, & Prop. 4. traditum est: ideo dum potestatis quæritur radix, quæritur numerus progressionis secundus, siue post vnitatem primus: hîc enim est progressionis terminus, vnde reliqui omnes deriuantur. Qui etiam propterea eius dicuntur potentiæ, quasi ex eius viribus ortæ facultates, & effectus producti. Quotum autem in ea progressione gradum occupet potestas quælibet, ostensum est abundè Propositione 4. eiúsque corollario. Vbi exponentium terminis singulis cuiusvis Progressionis appositorum ope, denominatio potestatis assignata est: & vicissim ex data potestate terminus progressionis ei debitus est definitus. Quare si cum datæ potestatis radix quæritur, quæritur numerus, qui toties perpetua multiplicatione in se ductus, quoties potestatis, siue termini à potestate denominati exponens indicat, producat datum numerum. Vt, si numeri 1024 radix quadrato-cubica exigatur: quærendus est numerus, qui sexies in se ductus continuè, numerum 1024 producat, eó quod exponens termini progressionis, qui quadrato-cubus est, sit numerus 6, ortus scilicet ex multiplicatione exponentis 2, quadrati, & exponentis 3, cubi, ex quibus componitur quadrato-cubus. Consule citatam Propositionem. Quod ergo hîc molimur est, vt tradatur methodus vniuersalis reperiendi numerum, qui in se ductus toties, quoties libuerit assignare, vel assignato exponente termini progressionis [illegible] assignatâ potestate, quâ terminus denominatur, datum numer[illegible]t. Quod absoluam paucis post *propositionibus* [illegible] vniue[illegible]atis: quæ prius ad quadratum, *vel* cubum ta[illegible]

PROP.

PROP. XXXXI. *Theor.*

Inter duas ſimiles poteſtates tot cadunt medij proportionales in ratione radicis ad radicem : quot cadunt inter ipſas, & vnitatem.

Expoſitio.

Sint duæ poteſtates L, Q ſimiles, ſiue, duo termini duarum progreſſionum eiuſdem gradûs, & exponentis. Dico inter has poteſtates tot medios cadere continuè proportionales, quot medij cadunt proportionales inter ipſas, & vnitatem : & quidem in ratione radicis ad radicem.

Præparatio.

Sit vnitas V : poteſtatis L, radix ſit A, poteſtatis autem Q, radix ſit B : reliqui verò, gradus ſint C, F, L, & E, K, Q, vtriúſque progreſſio-

V
A 2 I B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

nis, æquali quidem multitudine; cum ſint ſimiles poteſtates (quas hîc ſuppono quadrato-quadratas) ducantur in ſe duæ radices A, B; vt fiat D. Tum ducatur rurſùs A in D, vt fiat G : & B in eundem D, vt fiat H. Denique ducatur A in G, & in H; fient M N : ex B verò in H, fiet P.

Demonſtratio.

Certum eſt, & ab Euclide demonſtratum Prop. 10. lib. 8. tot cadere medios proportionales inter poteſtates L, Q : nempe M, N, P : quot cadunt tàm inter L, & vnitatem V; quàm inter Q, & eandem vnitatem : quales ſunt F, C, A; & K, E, B. Quod ergo demonſtrandum ſupereſt, eſt numeros L, M, N, P, Q eſſe continuè proportionales in ratione radicum A & B. Quod euidenter concluditur. Nam A multiplicans A & B produxit C, D eiuſdem rationis per Prop. 3. lib. 2. huius, cum ratione A ad B. At B multiplicans A & B; genuit D & E, eiuſdem etiam rationis

tionis cum A & B : ita vt C, D, E sint continuè proportionales in ratione A ad B. Rursùs tam A, quam B ducuntur in D, & fiunt G, H; eiusdem cum A, B rationis per citatam Prop. ducitur autem A in C, & B in E : & fiunt F, K : cum ergo idem numetus A multiplicet C, D, & producat F, G : at B multiplicet D, E & producat H, K : erunt F, G eiusdem rationis cum C, D; & H, K eiusdem cum D E. Sed tam C, D, quam D, E ita se habere ostensi sunt vt A, B; & ita etiam G H. Sunt ergo F, G, H, k continuè proportionales in ratione A ad B. Denique ductus est A in F, G, H : sunt autem geniti eis proportionales L, M, N per eandem Prop. atque adeò proportionales radicibus A, B. Rursùs B ductus est in H, & K; genitique sunt P, Q proportionales duobus multiplicatis H, k siue A, B Ergo tres L, M, N, & duo P, Q sunt vt A ad B : sed N P, sunt etiam in eadem ratione. Nam A & B ducti in H ipsos N, P genuerunt. Ergo L, M, N, P, Q. sunt continuè proportionales in ratione radicum A ad B. Quæ demonstratio cum eodem modo promoueri possit ad quaslibet similes potestates, verissimum constat esse propositum theorema. Inter duas similes potestates &c.

PROP. XLII. *Theor.*

Quisquis numerus potestatis alicuius radice caret numeris integris expressa : & fractis expressa caret.

Expositio.

Quod Propositione 11 superiori de radice quadratâ numerorum non quadratorum assertum, & probatum est : quod in eiusdem propositionis scholio de cubica ex elementorum libro 8. Prop. 15. demonstratum : quod de cæteris potestatibus delibatum; nunc iuuat vniuersaliter concludere. Hunc in finem proxima propositio allata est : vnde huius probatio euadet apertissima : sit ergo numerus quispiam A : ex quo eruenda sit radix quælibet cubica maiore (quando de hac citato loco actum est) verbi gratiâ, quadrato-quadrata. Ea est B 3 : maximus enim quadrato-quadratus in dato numero A 92 contentus, est 81, cuius radix est B 3 : quæ eadem est radix numeri A 92, sed non præcisa. Dico igitur numerum A carentem præcisa radice integro numero exprimendâ; carere etiam omni præcisâ radice : quæ integro cum fracto quocunque numero exprimi possit.

	A 92.	B 3	
	10	D 49	E 5764801
C 3	—	—	—
	13	G 13	F 28561

Præparatio.

Sit enim, si fieri poteſt, numerus C integer cum fracto quouis radix quadrato-quadrara numeri A; ita vt in ſe ducta quater, producat numerum A. Reducatur integer C ad denominationem fractionis adhærenris per Prop. 21. lib. 2. & producto 39. addarur numeraror 10 eiuſdem fractionis: vt fiat numeraror D 49 fractionis D G: quæ æqualis erit numero C integro cum fracto; atque adeò erit & ipſa numeri A radix quadrato-quadrara. Si ergo fractio hæc D G in ſe ducatur quadrato-quadraricè, hoc eſt, tam numeraror D quam denominator G in ſeipſos quater ducantur continuè? vt fiat quadrato-quadratus fractus E F. fracti numeri D G: debet eſſe E F æqualis numero A; quandoquidem D G in ſe quater ductus generat, tam A, quàm E F. Quo poſito.

Demonſtratio.

Cum fractus E F æqualis proximè oſtenſus ſir dato numero integro A. Si diuidatur numeraror E per denominatorem F, produci neceſſe eſt numerum A integrum (per hanc enim diuiſionem fractus ad integrum reducitur (Ergo denominator F quadrato-quadratus radicis G, meritur numeratorem E, radicis D quadraro-quadratum. Cum ergo inter poteſtates ſimiles E & F cadant aliquot continuè proportionales, & quidem in ratione D ad G per præcedentem propoſitionem: primus autem F metiatur vltimum E; idem primus F metietur proximum proportionalium per Prop. 6. lib. 8. Eucl. Primus aurem F ad proximum eandem habet rationem, quam habet G ad D per præcedentem Prop. Ergo etiam G metietur D. Quod eſt abſurdum. Eſt enim fractio D G æqualis numero C integro cum fracto; qui produceretur diuiſo D per G; nec præciſa forer diuiſio. Quod cum eodem modo concludatur, quæcumque tandem aſſeratur radix C, integer numerus cum fracto: conſtat nullam poteſtarem, quæ radice carear præciſâ, radicem habere ex integro numero & fracto compoſitam. Quare quiſquis numerus, poteſtatis &c. Quod probandum erat.

	A 92	B 3	
	10	D 49	E 5764801
C 3	—	—	———
	13	G 13	F 28561

PROP.

PROP. XLIII. *Defin.*

Binomium voco numerum in duas quascumque partes sectum.

Expositio.

Paulò aliter Binomium hîc sumo; quàm ab Euclide sumatur lib. 10. Prop. 37. Vbi vult lineam ex duabus lineis potentiâ tantùm commensurabilibus compositam Binomium dici. Quod numeris, qui non tantum potentiâ, sed longitudine etiam sunt omnes commensurabiles conuenire non potest: in hoc tamen conuenientiam quandam licet obseruare: quod vtrumque hoc numerorum genus duobus membris, quæ sunt eius nomina, componatur. Itaque si numerum A 5 in duos partiaris numeros B 3, & C 2. Dicetur numerus B C, affictâ illi quadam vnione, Binomium: quam denominationem sibi adsciscere non posset; si duo numeri nullâ colligatione mutua inter se cohærere censerentur.

A 5
B 3 —— C 2

PROP. XLIV. *Theor.*

Multitudo terminorum, quibus Binomij potestates continuæ constant; in dupla ratione continua crescit.

Expositio & demonstratio.

Esto Binomium A B: qui in se ducatur, vt habeatur eius quadratus numerus. Vt plana & aperta fiat hæc multiplicatio: in figura seposita aliud binomium X Z priori A B æquale statuatur. Vt ergo ducatur A B in X Z; debent singulæ duæ partes A & B Binomij, duci in partes singulas Binomij X Z. Ducetur itaque A in X, & Z: duóque gignentur numeri C & D: tum ducetur B in eosdem duos numeros X & Z; vnde duo rursùs nascentur numeri E, F. Iam ergo constat hanc potestatem primam Binomij A B, siue radicis A B binomiæ, quadratum numerum C D E F (hîc enim illius radicis, siue diuisæ in 3 & 2; siue insectæ 5 quadratus est, per scholium propositionis 1. lib. 2. elem.) terminis constare duplò pluribus, quàm ipsam radicem A B. Ratio est per se euidens. Nam nomen

A 3. B 2.
X 3. Z 2
———
C 9. D 6. E 6. F 4.

A ductum in duo nomina X, Z, duos numeros necessariò generat, hoc est, duplò plures: duplò perinde plures generat alterum nomen B ductum in eadem duo nomina X Z. Ergo duplò plures sunt simul producti, duobus A, B multiplicantibus simul per Prop. 15 lib. 5. Elem.

Rursus, si eadem radix A, B ducatur in quadratum proximè genitum

A 3 B 2
C 9 D 6 E 6 F 4
G 27. H 18. L 18. M 18. N 12. O 12. P 12. Q 8.

C, D, E, F: vt fiat eiusdem radicis potestas sequens, nempe cubus G, H, L &c. constat propter eandem rationem duplò plures genitos fore terminos, quàm sint multiplicati C, D &c. Nam A totidem producit numeros, quot sunt multiplicati; totidem pariter B. Ergo ambo A, B simul duplò plures, quàm sint C, D, E, F. Atque ita deinceps, si ad reliquas eiusdem binomiæ radicis A B potestates generandas pergatur. Nec dubium quin vltimò producti G, H, L &c. simul sumpti conficiant proximam potestatem post quadratum C, D &c. per idem citatum scholium Propositionis 1. lib. 2. Elem. Duo enim numeri in se multiplicandi 5 & 25 secantur, ille in A & B; hîc in C, D, E, F; & singulæ illius partes, in omnes huius partes ducuntur. Ergo numeros partiales G, H, L &c. producunt: qui simul æquales sunt numero 125, qui ex insectâ radice 5 in insectum quadratum 25 ductâ generatur, hoc est cubo eiusdem radicis. Idem esto de reliquis potestatibus iudicium. Quare multitudo terminorum &c. Quod erat ostendendum.

PROP. XLV. *Theor.*

Potestates omnes ex binomia radice productæ terminis constant continuè proportionalibus in ratione nominum radicis; si vnus tantùm ex terminis, qui occurrunt æquales, sumatur.

Demonstratio.

In priore proximæ Propositionis paradigmate ducuntur A, B in X, Z

A 3 B 2
X 3 Z 2
C 9. D 6. E 6. F 4.

cum ergo sint proportionales, in ratione nimirum æqualitatis, ex A primo in Z quartum fit numerus D æqualis numero E genito ex B secundo in X tertium: fit autem ex A in X numerus C. Ergo cum A multiplicans X & Z producat

producat C & D; ita erit C ad D, vel ad E; vt X ad Z per Prop. 17. lib. 7. Elem. Rursùs quia B multiplicans X & Z, generat E & F; ita per eandem Prop. erit E ad F; vt X ad Z. Ergo tres numeri C, E, F sunt continuè proportionales in ratione X ad Z, siue A ad B. Patet ergo quadratum C D E F radicis A, B constare numeris proportionalibus continuè in ratione A ad B, si duorum æqualium D, & F, qui in hac potestate occurrunt, vnus sumatur, siue D siue E. Rursùs, in posteriore paradigmate eiusdem proximæ Propositionis; A ductus in C, D, F generat numeros G, H, N, eisdem C, D, F proportionales per Prop. 17. lib. 5. Elem. Item B ductus in eosdem C, D, F eisdem proportionales generat H, N, Q. Ergo quatuor numeri G, H, N, Q (relictis æqualibus reliquis L, M, & O, P) sunt continuè proportionales in ratione A ad B. Quod idem eodem modo de reliquis potestatibus ostendi potest. Quare potestates omnes ex binomia &c. Quod demonstrandum erat.

PROP. XLVI. *Theor.*

Quælibet binomij potestas constat duabus duorum nominum sigillatim sumptorum potestatibus. Mediis verò numeris proportionalibus, qui inter duas potestates in ratione nominum interponuntur, toties repetitis: quot sunt numeri diuersi potestatis proximè minoris, respondentes; si bini & bini connectantur: & sumatur numerorum in iis ita coniunctis contentorum multitudo.

Expositio.

Vt grauissimi in hac radicum extractione momenti; ita voluptatis, iuxta ac vtilitatis non mediocris est huius Propositionis contemplatio. Hæc enim fons est, & origo, vniuersalis illius ac planè mirabilis methodi radices èxtrahendi: cuius quidem (ne quid mihi iniuriâ arrogem)

						A 3		B 2						
					C 9		D 6		E 6		F 4			
		27	18		18		18		12		12	12	8	
	81.		54	*quater.*		36	*sexies.*		24		*quater.*		16	
243.		162	*quinquies*		108	*decies.*		72	*decies.*		48		*quinquies.*	32

specimen quoddam & venæ latentis argumentum apud logistas acutio-

meri A 12. Iam si numerator B 22 diuidatur per denominatorem E 10, cum hæc diuisio absoluatur, vt lib. 1 declaratum est, abscissis ex diuidẽdo B 22, tot figuris, quot sunt in diuisore E 10, figuræ 0; ex quibus fiat fractus numerus adiungendus ad reliquas diuidendi intactas figuras, vt habeatur totus quotiens C 2, cum fractione D E: constat euidenter hanc methodum decadicam eandem esse cum methodo generali hîc traditâ, & demonstratâ.

A 12		L 12000	B 22	D 2	F 3
—	G 1000	————	—C 2	— C 2	
P 1		G 1000	E 10	E 10	E 10

Cum verò duo apponuntur ternarij figurarum 0 ad numerum: tunc per cubum 1000 000 (cuius radix est 100) multiplicari censetur: radix autem inuenta diuiditur per 100; hoc est, duæ eius posteriores figuræ seponuntur: vt fiant numerator fractionis, cuius denominator est 100.

PROP. XL. *Probl.*

Dati numeri non cubi radicem veræ in infinitum propiorem aliâ nouâ ratione definire.

Constructio.

Datus sit numerus A, vnde radix cubica eruenda est. Fiat ex eo fractio quæcumque C B iuxta Prop. 21 lib. 2. multiplicato scilicet per quemcunque numerum B, dato numero A; & genito C tanquam numeratori,

	C 900		G 729000000	C 900
A 9	———	D 810000	————	———
	B 100		E 81000000	F 432

subscripto multiplicante numero B denominatore (ad expeditiorem calculum non parùm conducet; si numerus B, decadicus quicumque assumatur, vt hîc assumptum vides (Tum fractionis C B numerator C in se ducatur: vt fiat eius quadratus D. In hunc quadratum ducatur eiusdem fractionis denominator B. Vt fiat E: à quo tandem radix cubica eruatur F quæ fiat denominator fractionis; cuius numerator sit C, idem cum numeratore prioris fractionis C B. Dico hanc fractionem C F esse radicem cubicam dati numeri A veræ propinquiorem; & quidem eò propinquiorem, quo maior fuerit assumptus multiplicator B.

Demonstratio.

Demonstratio.

Ducatur C in quadratum suum D; vt habeatur eius cubus G : qui statuatur numerator fractionis G E. Quia ergo D multiplicans C, & B, generat G & E : erunt C, B, & G E proportionales per Prop. 3. lib. 2. Ergo per Prop. 5. lib. 2. fractiones duæ C B, G E æquales erunt: Ergo fractio E, non secùs ac fractio C B, numero A est æqualis. Cum ergo fractio C F sit radix cubica fractionis G E : erit & ipsa radix dati numeri A. Eius autem radicis numerator est C, idem cum numeratore fractionis C B : eò quod fractionis G E numerator G, cubus sit numeri C. Ductus enim est C in se, genitúsque est D; in quem secundò ductus C cubum suum G produxit. Vnde fit, vt iubeatur ipse C numerator fractionis C B, statui numerator radicis C F. Quam constat præcisiorem esse ex dictis Propositione antecedente : in cuius præparatione declaratum est; quomodo radix cubica dati numeri eò sit præcisior futura, quò plures in partes ipse numerus sectus fuerit. Quare dati numeri radicem cubicam in infinitum propiorem inuenimus. Quod faciendum erat.

Hac porrò methodo inuenta radix necessariò verâ maior est. Nam denominator F, qui radix est numeri E, est iusto minor : neglectus siquidem est reliquus quispiam numerus tanquam nullius momenti post extractionem : numeraror autem C verus est, & præcisus. Cum ergo fractio eò maior sit, quò minor statuitur denominator eodem perseuerante numeratore ex Prop. 11. lib. 2. patet hanc fractionem C F verâ esse maiorem. Quod si ad denominatorem F 432 addatur vnitas, vt fiat 433. tunc radix euadit verâ minor ; propter rationem contrariam : & verò cubus huius radicis 433, est maior numero E à quo educta est radix hæc. Sed ecce, vt habeatur radix minor verâ ex ipsa operatione.

ALITER.

Eodem dato numero A, eadémque paratâ fractione C B, numero A æquali. Ducatur denominator B in se, vt fiat D quadratus denominatoris B : in quem ducatur numerator C : vt fiat E. Vnde radix cubica eruatur F : quæ fiat numerator fractionis ; cuius denominator sit idem B ; qui denominator extitit prioris fractionis C B. Dico fra-

	C 900			F 208
A 9	———	D 1000000	E 900000000	———
	B 100		———————	B 100
			G 100000000	

ctionem hanc F B esse radicem verâ minorem dati numeri A. Quod si numeratori F 208 addatur vnitas, vt fiat 209: tunc radix erit verâ, maior.

Demonstratio

Ducatur fractionis C B denominator B in quadratum suum D; vt fiat eius cubus G. Quia igitur D multiplicans C & B producit E & G: erunt C, B; & E, G proportionales per Prop. 3. lib. 2. Ergo per Propositionem 5. lib. 2. fractio E G æqualis est fractioni C B; atque adeo dato numero A; cui æqualis est fractio C B. Quare si è fractione E G radix eruatur F B: ea erit radix numeri A. Erit autem minor verâ. Quia numerator F, est radix numeratoris E verâ minor ob quempiam neglectum numerum post absolutam extractionem: eodem autem denominatore permanente quò magis numerator minuitur, eò fractio minuitur magis vt ex Prop. 10. lib. 2. colligitur. Ergo radix F B est minor verâ. At si numeratori F addatur vnitas, vt fiat 209: tunc fractio F B radix foret verâ maior. Nam dum è numero E radix educeretur, figura illa 9 numeri 209, maior erat iusto: vnde si in se ducatur numerus 209 cubicè: cubum gignet maiorem numero E. Præcisior tamen radix hæc vtraque tam maior quàm minor verâ futura est; quàm radix simplicis numeri A dati: vt ex præcedente Propositione constat. Vbi declaratum est radicem eò fore præcisiorem; quò plures in partes numerus datus dissecabitur per numeri B multiplicationem; qui maior sine termino assumi potest. Ergo & præcisior sine termino radix haberi. Quare radicem in infinitum præcisiorem inuenimus. Quod faciendum erat.

MONITVM.

Hactenùs de extrahenda è numeris radice tum quadratâ, tum cubicâ, methodo singulari è geometricis petitâ actum satis multis, nec, vt opinor, iniucundâ; non quidem certè inutili; nec omninò obsoleta. Nunc id, cuius sub initium fidem dedi, præstandum superest: superest scilicet tradenda ratio vniuersalis omnes quascunque radices quadratâ & cubicâ superiores è quauis data potestate educendi. Quod quantæ sit operæ, vel ex ea colligas; quam circa hasce duas quadratam & cubicam etsi longè simpliciores, impensam cernis: quid si generis huius radicum extractionis (in quo ars illa maior, ars illa diuina, algebra ferè tota versatur) in apertum euocanda sit hactenùs sepulta demonstratio? spero tamen operâ haud grauiore consequuturum, vt quidquid ad plenam huius methodi cognitionem necessarium fuerit, ita exponatur, vt tibi cumulatè satisfiat.

In primis ergo memineris eius, quod supra Propositione 4. Eiúsque corollario

corollario, obſeruatum eſt. Nimirum, cum cuiuſpiam poteſtatis ſiue potentiæ (quid hoc nomine intelligendum veniat; Propoſitione 1. libri huius 3. declaratum eſt) radix inueſtiganda proponitur: aliud nihil proponi, quam vt reperiatur numerus ille, qui in ſe ductus aliquoties, datum numerum, cuius radix quæritur, producere natus eſt. Cum autem numerus quilibet continua multiplicatione in ſe primùm ductus, tum in genitum, in hunc deinde, & ſic deinceps in infinitum, progreſſionem numerorum geometricam conſtituat: cuius ita producti termini ſunt radicis illius primæ, per quam continua multiplicatio abſoluitur, variæ, varióque nomine nuncupatæ poteſtates, vt Propoſitione 1. citatâ, & Prop. 4. traditum eſt: ideo dum poteſtatis quæritur radix, quæritur numerus progreſſionis ſecundus, ſiue poſt vnitatem primus: hîc enim eſt progreſſionis terminus, vnde reliqui omnes deriuantur. Qui etiam proprerea eius dicuntur potentiæ, quaſi ex eius viribus ortæ facultates, & effectus producti. Quotum autem in ea progreſſione gradum occupet poteſtas quælibet, oſtenſum eſt abundè Propoſitione 4. eiúſque corollario. Vbi exponentium terminis ſingulis cuiuſvis Progreſſionis appoſitorum ope, denominatio poteſtatis aſſignata eſt: & viciſſim ex data poteſtate terminus progreſſionis ei debitus eſt definitus. Quare ſi cum datæ poteſtatis radix quæritur, quæritur numerus, qui toties perpetua multiplicatione in ſe ductus, quoties poteſtatis, ſiue termini à poteſtate denominati exponens indicat, producat datum numerum. Vt, ſi numeri 1024 radix quadrato-cubica exigatur: quærendus eſt numerus, qui ſexies in ſe ductus continuè, numerum 1024 producat, eó quod exponens termini progreſſionis, qui quadrato-cubus eſt, ſit numerus 6, ortus ſcilicet ex multiplicatione exponentis 2, quadrati, & exponentis 3, cubi, ex quibus componitur quadrato-cubus. Conſule citatam Propoſitionem. Quod ergo hîc molimur eſt, vt tradatur methodus vniuerſalis reperiendi numerum, qui in ſe ductus toties, quoties libuerit aſſignare, vel aſſignato exponente termini progreſſionis, vel aſſignatâ poteſtate, quâ terminus denominatur, datum numerum generet. Quod abſoluam paucis poſt propoſitionibus nunc vniuerſaliter probatis: quæ prius ad quadratum, vel cubum tantùm pertinebant.

PROP.

PROP. XXXXI. *Theor.*

Inter duas ſimiles poteſtates tot cadunt medij proportionales in ratione radicis ad radicem: quot cadunt inter ipſas, & vnitatem.

Expoſitio.

Sint duæ poteſtates L, Q ſimiles, ſiue, duo termini duarum progreſſionum eiuſdem gradûs, & exponentis. Dico inter has poteſtates tot medios cadere continuè proportionales, quot medij cadunt proportionales inter ipſas, & vnitatem: & quidem in ratione radicis ad radicem.

Præparatio.

Sit vnitas V: poteſtatis L, radix ſit A, poteſtatis autem Q, radix ſit B: reliqui verò gradus ſint C, F, L, & E, K, Q, vtriúſque progreſſio-

V
A 2 I B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

nis, æquali quidem multitudine; cum ſint ſimiles poteſtates (quas hîc ſuppono quadrato-quadratas) ducantur in ſe duæ radices A, B; vt fiat D. Tum ducatur rurſùs A in D, vt fiat G: & B in eundem D, vt fiat H. Denique ducatur A in G, & in H; fient M N: ex B verò in H, fiet P.

Demonſtratio.

Certum eſt, & ab Euclide demonſtratum Prop. 10. lib. 8. tot cadere medios proportionales inter poteſtates L, Q: nempe M, N, P: quot cadunt tàm inter L, & vnitatem V; quàm inter Q, & eandem vnitatem: quales ſunt F, C, A; & K, E, B. Quod ergo demonſtrandum ſupereſt, eſt numeros L, M, N, P, Q eſſe continuè proportionales in ratione radicum A & B. Quod euidenter concluditur. Nam A multiplicans A & B produxit C, D eiuſdem rationis per Prop. 3. lib. 2. huius, cum ratione A ad B. At B multiplicans A & B; genuit D & E, eiuſdem etiam rationis

tionis cum A & B : ita vt C, D, E sint continuè proportionales in ratione A ad B. Rursùs tam A, quam B ducuntur in D, & fiunt G, H; eiusdem cum A, B rationis per citatam Prop. ducitur autem A in C, & B in E : & fiunt F, K : cum ergo idem numerus A multiplicet C, D, & producat F, G : at B multiplicet D, E & producat H, K : erunt F, G eiusdem rationis cum C, D; & H, K eiusdem cum D E. Sed tam C, D, quam D, E ita se habere ostensi sunt vt A, B; & ita etiam G H. Sunt ergo F, G, H, k continuè proportionales in ratione A ad B. Denique ductus est A in F, G, H : sunt autem geniti eis proportionales L, M, N per eandem Prop. atque adeò proportionales radicibus A, B. Rursùs B ductus est in H, & K; genitique sunt P, Q proportionales duobus multiplicatis H, k siue A, B Ergo tres L, M, N, & duo P, Q sunt vt A ad B : sed N P, sunt etiam in eadem ratione. Nam A & B ducti in H ipsos N, P genuerunt. Ergo L, M, N, P, Q. sunt continuè proportionales in ratione radicum A ad B. Quæ demonstratio cum eodem modo promoueri possit ad quaslibet similes potestates, verissimum constat esse propositum theorema. Inter duas similes potestates &c.

PROP. XLII. *Theor.*

Quisquis numerus potestatis alicuius radice caret numeris integris expressa : & fractis expressa caret.

Expositio.

Quod Propositione 11 superiori de radice quadratâ numerorum non quadratorum assertum, & probatum est : quod in eiusdem propositionis scholio de cubica ex elementorum libro 8. Prop. 15. demonstratum : quod de cæteris potestatibus delibatum; nunc iuuat vniuersaliter concludere. Hunc in finem proxima propositio allata est : vnde huius probatio euadet apertissima : sit ergo numerus quispiam A : ex quo eruenda sit radix quælibet cubica maiore (quando de hac citato loco actum est) verbi gratiâ, quadrato-quadrata. Ea est B 3 : maximus enim quadrato-quadratus in dato numero A 92 contentus, est 81, cuius radix est B 3 : quæ eadem est radix numeri A 92, sed non præcisa. Dico igitur numerum A carentem præcisa radice integro numero exprimendâ; carere etiam omni præcisâ radice : quæ integro cum fracto quocunque numero exprimi possit.

	A 92.	B 3	
	10	D 49	E 5764801
C 3	—	—	———
	13	G 13	F 28561

Præparatio.

Sit enim, si fieri potest, numerus C integer cum fracto quouis radix quadrato-quadrata numeri A; ita vt in se ducta quater, producat numerum A. Reducatur integer C ad denominationem fractionis adhærentis per Prop. 21. lib. 2. & producto 39. addatur numerator 10 eiusdem fractionis: vt fiat numerator D 49 fractionis D G: quæ æqualis erit numero C integro cum fracto; atque adeò erit & ipsa numeri A radix quadrato-quadrata. Si ergo fractio hæc D G in se ducatur quadrato-quadraticè, hoc est, tam numerator D quam denominator G in seipsos quater ducantur continuè? vt fiat quadrato-quadratus fractus E F. fracti numeri D G: debet esse E F æqualis numero A; quandoquidem D G in se quater ductus generat, tam A, quàm E F. Quo posito.

Demonstratio.

Cum fractus E F æqualis proximè ostensus sit dato numero integro A. Si diuidatur numerator E per denominatorem F, produci necesse est numerum A integrum (per hanc enim diuisionem fractus ad integrum reducitur (Ergo denominator F quadrato-quadratus radicis G, metitur numeratorem E, radicis D quadrato-quadratum. Cum ergo inter potestates similes E & F cadant aliquot continuè proportionales, & quidem in ratione D ad G per præcedentem propositionem: primus autem F metiatur vltimum E; idem primus F metietur proximum proportionalium per Prop. 6. lib. 8. Eucl. Primus autem F ad proximum eandem habet rationem, quam habet G ad D per præcedentem Prop. Ergo etiam G metietur D. Quod est absurdum. Est enim fractio D G æqualis numero C integro cum fracto; qui produceretur diuiso D per G; nec præcisa foret diuisio. Quod cum eodem modo concludatur, quæcumque tandem afferatur radix C, integer numerus cum fracto: constat nullam potestatem, quæ radice careat præcisâ, radicem habere ex integro numero & fracto compositam. Quare quisquis numerus, potestatis &c. Quod probandum erat.

A 92	B 3	
C $3\frac{10}{13}$	$\frac{D\ 49}{G\ 13}$	$\frac{E\ 5764801}{F\ 28561}$

PROP.

PROP. XLIII. *Defin.*

Binomium voco numerum in duas quaſcumque partes ſectum.

Expoſitio.

Paulò aliter Binomium hîc ſumo ; quàm ab Euclide ſumatur lib. 10. Prop. 37. Vbi vult lineam ex duabus lineis potentiâ tantùm commenſurabilibus compoſitam Binomium dici. Quod numeris, qui non tantum potentiâ , ſed longitudine etiam ſunt omnes commenſurabiles conuenire non poteſt : in hoc tamen conuenientiam quandam licet obſeruare : quod vtrumque hoc numerorum genus duobus membris , quæ ſunt eius nomina , componatur. Itaque ſi numerum A 5 in duos partiaris numeros B 3 , & C 2. Dicetur numerus B C , affictâ illi quadam vnione , Binomium : quam denominationem ſibi adſciſcere non poſſet ; ſi duo numeri nullâ colligatione mutua interſe cohærere cenſerentur.

A 5	
B 3	C 2

PROP. XLIV. *Theor.*

Multitudo terminorum, quibus Binomij poteſtates continuæ conſtant ; in dupla ratione continua creſcit.

Expoſitio & demonſtratio.

Eſto Binomium A B : qui in ſe ducatur , vt habeatur eius quadratus numerus. Vt plana & aperta fiat hæc multiplicatio : in figura ſepoſita aliud binomium X Z priori A B æquale ſtatuatur. Vt ergo ducatur A B in X Z ; debent ſingulæ duæ partes A & B Binomij , duci in partes ſingulas Binomij X Z. Ducetur itaque A in X , & Z : duóque gignentur numeri C & D : tum ducetur B in eoſdem duos numeros X & Z ; vnde duo rurſus naſcentur numeri E , F. Iam ergo conſtat hanc poteſtatem primam Binomij A B , ſiue radicis A B binomiæ, quadratum numerum C D E F (hîc enim illius radicis , ſiue diuiſæ in 3 & 2 ; ſiue inſectæ 5 quadratus eſt, per ſcholium propoſitionis 1. lib. 2. elem.) terminis conſtare duplò pluribus , quàm ipſam radicem A B. Ratio eſt per ſe euidens. Nam nomen

A 3.	B 2		
X 3.	Z 2		
C 9.	D 6.	E 6.	F 4.

A ductum in duo nomina X, Z, duos numeros necessariò generat, hoc est, duplò plures: duplò perinde plures generat alterum nomen B ductum in eadem duo nomina X Z. Ergo duplò plures sunt simul producti, duobus A, B multiplicantibus simul per Prop. 15 lib. 5. Elem.

Rursus, si eadem radix A, B ducatur in quadratum proximè genitum

			A 3	B 2			
		C 9	D 6	E 6	F 4		
G 27.	H 18.	L 18.	M 18.	N 12.	O 12.	P 12.	Q 8.

C, D, E, F: vt fiat eiusdem radicis potestas sequens, nempe cubus G, H, L &c. constat propter eandem rationem duplò plures genitos fore terminos, quàm sint multiplicati C, D &c. Nam A totidem producit numeros, quot sunt multiplicati; totidem pariter B. Ergo ambo A, B simul duplò plures, quàm sint C, D, E, F. Atque ita deinceps, si ad reliquas eiusdem binomiæ radicis A B potestates generandas pergatur. Nec dubium quin vltimò producti G, H, L &c. simul sumpti conficiant proximam potestatem post quadratum C, D &c. per idem citatum scholium Propositionis 1. lib. 2. Elem. Duo enim numeri in se multiplicandi 5 & 25 secantur, ille in A & B; hîc in C, D, E, F; & singulæ illius partes, in omnes huius partes ducuntur. Ergo numeros partiales G, H, L &c. producunt: qui simul æquales sunt numero 125, qui ex insectâ radice 5 in insectum quadratum 25 ductâ generatur, hoc est cubo eiusdem radicis. Idem esto de reliquis potestatibus iudicium. Quare multitudo terminorum &c. Quod erat ostendendum.

PROP. XLV. *Theor.*

Potestates omnes ex binomia radice productæ terminis constant continuè proportionalibus in ratione nominum radicis; si vnus tantùm ex terminis, qui occurrunt æquales, sumatur.

Demonstratio.

In priore proximæ Propositionis paradigmate ducuntur A, B in X, Z cum ergo sint proportionales, in ratione nimirum æqualitatis, ex A primo in Z quartum fit numerus D æqualis numero E genito ex B secundo in X tertium: fit autem ex A in X numerus C. Ergo cum A multiplicans X & Z producat

	A 3	B 2	
	X 3	Z 2	
C 9.	D 6.	E 6.	F 4.

producat C & D; ita erit C ad D, vel ad E; vt X ad Z per Prop. 17. lib. 7. Elem. Rursùs quia B multiplicans X & Z, generat E & F; ita per eandem Prop. erit E ad F; vt X ad Z. Ergo tres numeri C, E, F sunt continuè proportionales in ratione X ad Z, siue A ad B. Patet ergo quadratum C D E F radicis A, B constare numeris proportionalibus continuè in ratione A ad B, si duorum æqualium D, & F, qui in hac potestate occurrunt, vnus sumatur, siue D siue E. Rursùs, in posteriore paradigmate eiusdem proximæ Propositionis; A ductus in C, D, F generat numeros G, H, N, eisdem C, D, F proportionales per Prop. 17. lib. 5. Elem. Item B ductus in eosdem C, D, F eisdem proportionales generat H, N, Q. Ergo quatuor numeri G, H, N, Q (relictis æqualibus reliquis L, M, & O, P) sunt continuè proportionales in ratione A ad B. Quod idem eodem modo de reliquis potestatibus ostendi potest. Quare potestates omnes ex binomia &c. Quod demonstrandum erat.

PROP. XLVI. *Theor.*

Quælibet binomij potestas constat duabus duorum nominum sigillatim sumptorum potestatibus. Mediis verò numeris proportionalibus, qui inter duas potestates in ratione nominum interponuntur, toties repetitis : quot sunt numeri diuersi potestatis proximè minoris, respondentes ; si bini & bini connectantur : & sumatur numerorum in iis ita coniunctis contentorum multitudo.

Expositio.

Vt grauissimi in hac radicum extractione momenti; ita voluptatis, iuxta ac vtilitatis non mediocris est huius Propositionis contemplatio. Hæc enim fons est, & origo, vniuersalis illius ac planè mirabilis methodi radices extrahendi : cuius quidem (ne quid mihi iniuriâ arrogem)

					A 3		B 2					
				C 9	D 6		E 6	F 4				
		27	18	18	18.		12	12	12	8		
	81.	54	*quater.*	36	*sexies.*		24	*quater.*	16			
243.	162	*quinquies*	108	*decies.*	72		*decies.*	48	*quinquies.*	32		

specimen quoddam & venæ latentis argumentum apud logistas acutio-

res deprehendas : quam, vt perennem in riuum deinde fluat, nunc aperire conabor. Itaque schema ei persimile, nec modo dissimili paretur, ei; quod Propositione antecedente expositum est. Sit nimirum Binomium A. B : quod in se ductum generet quadratum C, D, E F : ductum rursùs in hunc quadratum producat cubum 27. 18. 18. &c. ac tertiò quadrato-quadratum 81. 54 quater. 36 sexies. Id est, 54 quater repetitum, 36 repetitum sexies &c. quod ita exprimi cogit spatij breuitas tot eiusdem numeri repetitiones actuales non admittens, vt admittit in cubo 27. 18. 18. &c. eodem modo exprimitur super-solidus 243. 162 quinquies &c. eodem exprimerentur reliquæ deinceps maiores potestates. Hâc positâ constructione : quam constat reuerà exhibere singulas potestates Binomij A B, vt ex Propos. 44. præcedente colligitur. Constat prætereà medios proportionales in ratione nominum producere inter nominum ipsorum potestates per Prop. 45. & quidem medios tot : quot medij cadunt inter ipsas, & vnitatem per Prop. 41. Quod hîc proponitur, est. Potestatem quamlibet, verbi gratiâ, cubicam 27. 18. 18. &c. constare duobus duorum nominum Binomij A B cubis 27, & 8, semel tantùm sumptis. Medios verò proportionales, qui inter ipsos cubos 27, & 8, intercipiuntur, nempe duos 18, & 12 (qui tot sunt, quot inter potestates, & vnitatem cadunt per Prop. 41.) toties repeti; quot numeri reperiuntur in binis diuersis terminis proximè minoris potestatis explico. Proximè minor cubo 27, 18, 18 &c. potestas est quadratus C D E F. Hæc constat tribus diuersis numeris 9, 6, 4 (duo enim D 6, & E 6 diuersi non sunt, sed æquales) si igitur multitudo numerorum, qui in duobus simul primis membris C D E, respondentibus primo medio proportionali 18 potestatis cubicæ assumatur, quæ est 3; toties repeti debet medius proportiona-

A 3 B 2
C 9 D 6 E 6 F 4
27 18 18 18 12 12 12 8
81. 54 *quater.* 36. *sexies.* 24 *quater.* 16
243. 162 *quinquies* 108 *decies.* 72 *decies.* 48 *quinquies.* 32

lis 18 ad cubum pertinens, nempe ter. Item ter repetetur alter eiusdem cubi medius proportionalis 12, propter eandem rationem. Quia duorum membrorum minoris quadratæ potestatis medio proportionali 12 respondentium multitudo, nempe D 6, E 6 F 4, tanta est. Eodem modo (vt res adhuc insolita mansuescat) quadrato-quadrati 81. 54. &c. tribus mediis proportionalibus 54, 36, 24 constantis primus medius proportionalis 54, quater repeti debet. Quid ita? quia duo prima membra 27, & 18, 18, 18 proximè minoris potestatis primo medio proportionali 54 respondentia

reſpondentia, quatuor numeros ſimul continent: Ergo quater repeti debet medius proportionalis ille 54. At verò quia duo membra 18, 18, 18 & 12, 12, 12, cubicæ poteſtatis, ſequentia ſex numeros continent: toties numerus 36 medius proportionalis quadrato-quadrati, reſpondens: id eſt, ſecundus, ſicut duo illa membra cubicæ poteſtatis ſecundò numerantur, ſiue quia in ea numerus 18 duorum primus in cubo ſecundus eſt; ſexies repeti debet; denique quia duo membra cubica 12 12 12, & 8. quatuor numeros continent: quater rurſus repetendus eſt numerus tertius 24 medius proportionalis quadrato-quadrati, tertio membro 12, 12, 12, prioris poteſtatis reſpondens. Atque in cæteris poteſtatibus idem contingere aſſeritur. Quod nunc debet demonſtrari. Ecce igitur.

Demonſtratio.

Probandum itaque ſit primum medium proportionalem 18 ad cubum pertinentem, ter repeti debere: ex eo quod bina membra C 9, & D 6, E 6 ad quadratum ſpectantia tres numeros contineant. Ac primùm bis repeti debere 18 clarum eſt. Cum enim nomen A 3 duci debeat in omnes terminos C D E F quadrati: cum ducetur in duos D 6 & E 6 æquales, duos æquales numeros 18 & 18 generabit. Quia verò C, D & A, B proportionales ſunt per Prop. 45. ſuperiorem; idem fiet numerus ex A primo in quartum D, qui fit ex B ſecundo in C tertium: fit autem ex A in D numerus 18. Ergo etiam ex B in C fiet 18. Ecce igitur, vt numerus 18 ter repetendus ſit in cubo; toties ſcilicet, quot ſunt in quadrati binis membris C 9 & D 6 E 6 numeri. Nec aliter oſtendetur cubi medius proportionalis 12 ſecundus, ter repeti debere ex eo, quod duo quadrati membra D, E, & F tres numeros contineant. Nomen enim B 2 duos numeros D 6 & E 6 multiplicans duos æquales numeros 12 & 12 producet; quibus accedet tertius ex multiplicatione numeri A 3 in numerum F 4; ſunt enim A, B & E, F, quatuor proportionales. Cum ergo eo modo tam nomen A in omnes quadrati terminos C, D E F ducatur, & generet 27 ſemel, & tres numeros 18, 18, 12: quàm nomen B, & generet 8 ſemel, & tres numeros 18, 12, 12. Atque ita producatur cubus Binomij A B, vt ſuprà ex ſcholio Propoſitionis 1. lib. 2. Elem. collegimus. Euidens eſt cubum confici ex cubis 27 & 8, Nominum A & B, & ex mediis proportionalibus 18, & 12 ſingulis toties repetitis: quot numeros continent bina & bina membra C 9, D 6, E 6, &, D 6, E 6, F 4, reſpondentia quadrati numeri C, D, E, F.

Eodem modo oſtendetur conſtructio quadrato-quadrati, eius mediis proportionalibus toties repetitis; quot numeros continent bina, & bina cubi membra reſpondentia. Sic enim primus medius proportionalis 54

quater

quater repeti debet eò quod quatuor sint numeri 27 & 18 18 18; ex quibus bina priora membra cubum componentia constantur, eodémque iure medius proportionalis vltimus 24 quater etiam repetetur. At medius 36 sexies repeti debet propter eandem rationem. Nam duo membra cubi media 18, 18, 18 & 12, 12, 12. Sex numeros continent, qui decussatim à nominibus multiplicati æquales numeros sex generare debent. Cum enim sit A 3 ad B 2; ita cubi medius proportionalis 18 ad alterum medium proportionalem 12. idem fiet numerus 36 per Prop. 19. lib. 7. elem. ex primo A 3 in quartum 12 qui fit ex secundo B 2 in tertium 18. Ergo tres ex vna, tres item ex altera multiplicatione numeri, 36, generabuntur. Sic autem constat quodlibet binomij nomen A & B duci in singulos cubi numeros, vt exigit scholium Propositionis 1. lib. 2. Elem. ad quadrato-quadratum generandum. Nam A 3 ducitur primò in cubum 27, & B 2

						A 3		B 2						
				C 9		D 6		E 6		F 4				
	27		18		18		18		12		12		12	8
81.		54.		*quater.*		36	*sexies.*	24.		*quater.*		16		
243.	162.		*quinquies*		108		*decies.*	72	*decies.*		48		*quinquies.*	32

in cubum 8, & fiunt horum duorum nominum duo quadrato-quadrati 81, 16. tum ducitur A 3 in ternos numeros 18, 18, 18: B 2 verò in ternos 12 12 12: illinc generantur terni 54, 54, 54: hinc terni 24 24 24. Tum B 2 ducitur in cubum 27 fit rursus 54: qui ad ternos additus habentur quaterni 54. pariter habebuntur 24 quaterni, ducto A 3 in cubum 8. Restat denique vt A 3 ducatur in ternos 12, vt fiant 36 ter: qui etiam fient ex B 2 ducto in ternos 18. Atque ita habebitur sexies medius ille proportionalis 36, absolutâ multiplicatione vtriúsque nominis A & B, in omnes terminos cubum componentes: vnde quadrato-quadratus generatur. Quod cum ad generationem potestatis cuiuslibet semper obseruetur; patet quomodo quælibet binomij potestas constet duabus duorum nominum &c. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Ad pleniorem Propositionis huius intelligentiam quædam obseruatione maximè digna hîc prætermittenda non sunt. Ac primò intueri licet allatam Propositionem non tantùm potestatibus ex binomio genitis; sed & ipsi binomio respectu quadrati, potestatis scilicet ipso proximè maioris, æquè conuenire. Nam binomij duo ipsa nomina A & B tanquam duo diuersa membra simul sumantur; cum duos tantùm numeros contineant;

medius

medius vnicus proportionalis numerus D 6, vel E 6, bis tantum ſumerur inter duos nominum quadratos C 9, & F 4; eodem planè iure; quo tres numeri C, D, E poteſtatis minoris, quibus duo diuerſa membra eiuſdem poteſtatis conſtant ter ſumi iubenr medium proportionalem 18, poteſtatis cubicæ proximè maioris.

Secundò obſeruare licet primum & vltimum numerum cuiuſvis poteſtatis: etſi ſemel tantùm ſumi videatur; vt habeatur debita multitudo repetitionum medij proportionalis: reuerà tamen bis ſumi, non ſecùs ac alij intermedij termini. Cum enim quælibet poteſtas, verb. gratiâ, cubus 27, 18, 18, &c. dicitur conſtare duabus duorum nominum A 3, & B 2, poteſtatibus 27, & 8; rum repetitis ſæpius mediis proportionalibus 18 & 12; prout exigit multitudo numerorum minoris poteſtatis quadratæ; quibus conſtant ſimul coniugata duo eius diuerſa membra C 9; & D 6, E 6. Idem eſt, ac ſi diceretur cubus 27, 18, 18, &c. multitudine numerorum conſtare; quæ coaceruatur ex numeris; quibus conſtanr bina diuerſa membra coniugata, etiam primum & vltimum. Vt enim numerus C 9, cum duobus D 6, E 6 coniungitur; vt habeatur multitudo triplicis numeri 18. Tum duo D 6, & E 6 coniunguntur cum ſequenti F 4, vt conſtituatur multitudo triplicis etiam numeri 12: ita vt bis ſumatur medius terminus D 6, & E 6, dum ſemel cum anteriore C 9, ſemel item cum poſteriore F 4. copulatur: ita etiam primus numerus C 9 bis ſumitur ſemel cum poſteriore numero D 6, E 6; eiúſque multitudinem auget vnitate; ſemel item cum anteriore numero, qui eſt nihili nota o, & eius multitudinem; quæ nulla eſt, auget vnitate: quæ exigit, vt ſemel ſumatur numerus in compoſitione cubi, qui fit ex nomine A 3 in quadratum ſuum C 9; qui eſt 27; ſiue poteſtas cubica nominis A 3. Idem de vltimo numero F 4 dicendum; qui caret poſteriore, cum quo copulari poſſit, multitudinem tamen numerorum cubum componentium auget vnitate, dum vnicum numerum 8, cubum nominis 2 ſemel ſumendum monet. Ex qua ratiocinatione, ne fruſtrà hìc allatam cenſeas, conſtruendæ poſtmodum tabellæ vtiliſſimæ, & ad ſcopum maximè neceſſariæ modus planiſſimus colligetur.

Tertio obſeruatione dignum occurrit medios proportionales extremis duobus terminis poteſtatum deinceps poſitarum, proximos ita reperi: vt eorum multitudo ſeruet Arithmeticam vulgarem progreſſionem à binario inchoatam. Ecce enim in eodem ſchemate ſuperiori. Medius proportionalis terminus D 6 extremis duobus quadrati terminis C & F proximus (vtrique idem in quadrato proximus eſt, vtpote vnicus) bis repetitur; at in poteſtate ſequenti, cubo ſcilicet, tam medius proportionalis 18 primo termino 27 proximus; quàm medius alter 12 proximus termino vltimo 8. ter repetitur. Ratio clara eſt ex ſuperiore demonſtratione: in qua

oſtenſum eſt ex nomine B 2 in primum quadrati terminum C 9 ducto gigni numerum 18 æqualem duobus, qui fiunt ex priore nomine A in duos D 6, E 6 multiplicato; atque adeò in cubo ter repeti debere numerum 18 primo cubi termino 27 proximum; ter item numerum 12, ob ſimilem rationem, vltimo eiuſdem cubi termino 8 proximum; nomen enim A 3 in quadrati vltimum numerum F 4, multiplicatum generat 12 æqualem duobus numeris 12 ex nomine poſteriore B 2 in duos D 6, E 6 æquales ducto genitis. Eodem modo in quadrati-quadrato quater repetitur medius proportionalis 54 proximus primo poteſtatis eiuſdem termino 81; ſicut quater repetendus eſt numerus 24 proximus termino 16 vltimo eiuſdem quadrato-quadrati. Idémque propter eandem rationem in cæteris deinceps poteſtatibus contingere neceſſe eſt. Vt verum ſit huiuſmodi numerorum primo & vltimo proximorum multitudinem progreſſionem Arithmeticam vulgarem à binario initam obſeruare in continuatione poteſtatum, ſiue, quod idem eſt, in ſerie progreſſionis Geometricæ cuiuſcumque ab vnitate incipientis. Clarum porrò eſt terminorum æqualiter ab extremis recedentium æquales eſſe repetitiones, vt in ſuperioribus licet intueti.

PROP. XLVII. *Probl.*

Tabellam conſtruere quæ poteſtatis cuiuſlibet à quolibet binomio genitæ terminorum multitudinem exhibeat.

Conſtructio.

Problematis huius apertiſſima eſt ex dictis ſolutio. Quam ſic aggredieris.

			A 1		B 1			
		D 1.		C 2		E 1		
	F 1		G 3		H 3		K 1	
L 1.		M 4.		N 6.		P 4.		Q 1

Sint A, B ſingulæ vnitates. Hæ addantur, vt fiat C 2; & earum vnitatum altera D, præfigatur, altera E poſponatur eidem numero C. Deinde vt habeantur numeri ſequenti poteſtati debiti; addantur bini & bini numeri D, C, E iam poſiti. Bini ergo D, C additi producunt G 3; bini verò C, E producunt H; vnitates vero D, E reponuntur in F, & K, primo & vltimo loco. Atque ita habes numeros ad cubum ſpectantes. Vis numeros, qui quadrato-quadratum afficiunt? eodem modo iunge binos, & binos. Bini F, G additi conflant M: bini G, H; efficiunt N: bini H K exhibent P. His numeris præfigatur vnitas L; eiſdem poſtponatur vnitas Q. Exhibebunt hi numeri multitudinem terminorum

terminorum, quibus conſtat quadrato-quadratus. Atque hoc modo alias; & alias poteſtates, ſiue terminos progreſſionis Geometricæ characteribus numericis afficies: qui terminorum multitudinem indicent: dum duo numeri proximè minoris poteſtatis reſpondentes in vnum colliguntur maiori poteſtati debitum: & vnitas primum & vltimum locum occupat.

Demonſtratio.

Conſtructio hæc corollarium quoddam tantùm eſt ex præcedenti Propoſitione per ſe deductum. In ea ſiquidem propoſitum, & probatum eſt medios proportionales maioris poteſtatis ex binomio ortæ toties repeti debere: quoties duo numeri reſpondentes poteſtatis proximè minoris repetuntur: etiam ipſo binomio in poteſtatum numero, quamuis radix ſit, computato, vt in ſcholio ipsâ primâ obſeruatione declaratum eſt. Cum ergo, vt ab ipſa radice initium fiat, duo binomij nomina, ſint numerúſque ex his productus bis repeti debeat in quadrato, ſiue bis poni; hæc duplex poſito numero C 2 indicatur: cui præfigitur vnitas D, & vnitas E poſtponitur: quia, vt obſeruatum eſt ſecundò in ſcholio, neque A 1 cum vllo anteriore termino; neque B 1 cum vllo poſteriore (cum nullus ſit) additur; vt pluralitas his in locis ſequatur. Iam verò ex quadrati terminis binis, & binis ſimul additis, cubi terminorum pluralitas, ſiue repetitio creabatur: quam etiam bini, & bini numeri D, C; C, E ſimul additi indicant; atque ita fiunt G 3, H 3, præfixa etiam atque poſtpoſita vnitate F 1, & K 1. Atque eodem modo ex his cubi numeris naſcentur quadrato-quadrati numeri 1, 4, 6, 1 & ſic in infinitum. Quod vt adhuc quoad fieri poterit, planius exponatur, & ipſis oculis cernendum proponatur. Hîc appoſitum ſchema vtroſque numeros, & ſignificatos, & ſignificantes continens contemplare eodem binomio, quod ſupra, ſuppoſito 3 — 2. Quod eſt numerus 5 in duas partes diuiſo.

1	1				
3 ſemel.	*2 ſemel*				
1	2	1			
9 ſemel.	*6 bis.*	*4 ſemel*			
1	3	3	1		
27 ſemel.	*18 ter.*	*12 ter.*	*8 ſemel*		
1	4	6	4	1	
81 ſemel.	*54 quater*	*36 ſexies*	*24 quater*	*16 ſemel*	
1	5	10	10	5	1
243 ſemel.	*162 quinquies.*	*108 decies.*	*72 decies.*	*48 quinquies.*	*32 ſemel.*

In hoc ergo vides binomij poteſtates omnes exprimi non quidem mediis earum proportionalibus toties actu, & materialiter repetitis: quoties repeti debent, & vt in Propoſitionis 46. ſchemate repetiti ſunt: ſed

earum repetitionum loco addita aduerbiali voce numericâ; quæ exprimat repetitionum multitudinem: sunt insuper singulis vocibus debiti characteres numerorum appositi: qui illi ipsi sunt, quos tabella continet hac propositione constructa. Quam vel ex eo solo rectè constructam videas: cum eius numeri terminorum omnium diuersorum multitudinem exprimant; quibus singulæ potestates constant. Eius portò vsus quàm sit commendandus ipsa te postmodum docebit experientia Constat interim tum ratione, tum hac ipsa postrema declaratione, rectè hanc tabellam constructam esse. Quod præstandum erat.

PROP. XLVIII. *Theor.*

Tabellæ Propositione antecedenti constructæ numeri primo, siue vltimo proximi sunt exponentes suarum potestatum à binomio genitarum.

Præparatio.

Resumatur tabella paulò ante constructa; vel ei alia similis construa-

					0					
				1		1				
Tabella			1		2		1			Expositoria
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

tur: qualis hîc cernitur. In ea obliquus ordo 1, 2, 3 &c. primo & vltimo ordini proximus seruare debet Arithmeticam progressionem vulgarem: eò quod per tertiam obseruationem scholij Propositionis 46. medij proportionales primo & vltimo potestatum termino proximi repetantur iuxta Arithmeticam progressionem vulgarem. Quam repetitionem exprimunt huius tabellæ numeri extremis proximi, vt ex eius constructione constat. Cum ergo potestates cuiusvis numeri etiam in partes secti qualis est binomium, aliud nihil sint quàm gradus progressionis Geometricæ ab vnitate

vnitate inchoatæ, & iuxta rationem radicis, promotæ. Horum autem graduum geometricæ cuiusvis progressionis exponentes, vt Propositione 4. superiori declaratum est, sint ipsi numeri communes ab vnitate Arithmeticè progredientes: ita vt radici competat nota vnitatis 1. quadrato, 2: cubo 3 &c. qui iidem ipsi sunt, in iisdem hisce potestatibus à binomio tanquam radice genitis reperiuntur primo & vltimo termino (qui vterque est vnitas) proximi: planum euadit, eosdem reuerà esse singulos suarum potestatum exponentes. Quare. Tabellæ Propositione antecedenti constructæ &c. Quod erat ostendendum.

PROP. XLIX. *Insigne Probl.*

Dati cuiusvis numeri radicem quamlibet generali, elegantissimáque methodo inuestigare.

Expositio.

Semel atque iterum iamptidem monui, dum numeri alicuius radix inquiritur cuiuslibet denominationis, vt quadrata, cubica, quadrato-quadrata &c. aliud nihil inquiri; quàm numerum, qui in se continua multiplicatione ductus toties, quoties exigit ipsa denominatio, datum numerum producere natus sit. Vnde fiat, vt quæsitus hîc numerus sit primus post vnitatem terminus geometricæ progressionis; in cuius serie datus numerus, è quo radix eruitur, gradum occupet; cui debetur denominatio potestatis, cuius radix quæritur. Vt si à numero 460792 radix, verbi gratia quadrato-quadrata proponatur inuestiganda: inuestigandus proponitur numerus: qui in se quater ductus, vt exigit terminus geometricæ progressionis, qui quadrato-quadratus denominatur, & vt eius exponens 4 indicat, occupat gradum quartum post vnitatem, ipsa exclusâ vnitate, numerum illum producat, vel præcisè, si reuerà quadrato-quadratus sit, vel si non præcisè producat, generet quadrato-quadratum maximum in dato numero contentum. Vt iam aliàs de quadrata, & cubica radice traditum est. His obiter obseruatis. Sit ab hoc numero A 1500625 eruenda radix quadrato-quadrata. Ad id absoluendum, pauca, quæ sequuntur, præcepta sunt obseruanda his versiculis memoriæ causâ tradita. Sit itaque,

Constructio.

Membra dat exponens : primámque tabella figuram.
Sectorémque gradus eius dant multiplicati
Per tabulæ numeros. Sector quotientis in omnes
Debet agi gressus : genitóque potentia iungi
Déque superposito factus decedere membro.

Primum præc. *Membra dat exponens.* Numerus datus A in membra distribuendus est; quorum singula figuram vnam ad radicem constituunt, vt aliàs de radice quadrata, & cubica dictum est, quot autem figuras membrum quodlibet sibi vendicet; patet ex annotatis ad Prop. 13. superiorem in scholio: vbi ostenditur singula membra potestatis cuiuslibet, siue cuiuslibet gradûs geometricæ progressionis tot figuris constare : quot indicat illius gradûs, siue potestatis exponens. Excepto primo membro ad læuam : quod paucioribus, quæ ipsi contingent post membra reliqua ad dextram constituta, constare potest. Itaque hîc numerus A in duo membra distribuitur; quorum posterius quatuor figuras continet. Vt exigit exponens 4, datæ potestatis quadrato-quadratæ. Priori verò membro tres tantùm figuræ post primum reliquæ obueniunt; possent tamen esse pauciores; vnica scilicet, nec vnquam plures quàm quatuor. Ea portò membra punctulis distinguuntur initio facto ab vltima figura dati numeri, & tribus intermissis figuris, quinta puncto insignitâ. Exponens ergo dat, siue determinat numerum figurarum necessariarum vt figura vna ad radicem reponatur : quæcunque tandem potestas exhibeatur.

A 1500 625
· ·

Secundum præc. *Primámque tabella figuram.* Tabella, cuius fit hîc mentio, continet potestates cuiuslibet speciei ex nouem primis numerorum elementis in se ductis genitas, quam proinde iam paratam habere conuenit. Ecce eorum elementorum potestates aliquot, quadratum, cubum quadrato-quadratum supersolidum : quam cuique liceat vlteriùs ad arbitrium promouere.

Primam

Rad. 1	Quad. 1	Cubi. 1	Quad-Quad. 1	Super-ſol. 1
2	4	8	32	32
3	9	27	81	241
4	16	64	216	864
5	25,	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

Primam itaque tabella hæc figuram radicis ad primum membrum pertinentem exhibet : dum in columna poteſtatis ; cuius radix eruitur ; inueſtigatur numerus proximè minor numero primi membri (niſi hîc cuipiam numero tabellæ foret æqualis) cuius radix è regione ad læuam in columna radicum ipſi reſpondet. Eâque radicis figura ſeponitur : ac denique poteſtas in tabella reperta ſubtrahitur à primo illo membro dati numeri, reliquo ſuperſcripto, vt fieri conſueuit in diuiſione, & in traditis ſuperiùs radicum extractionibus factitatum eſt. Vt in exemplo noſtro

69
A ~~1~~~~5~~~~0~~0625
· · B
| 3

primum dati numeri A membrum eſt numerus 150. In tabellæ columnæ quadrato quadratorum numerus proximè minor eo numero 150, eſt 81. Cuius radix ad læuam in columna radicum reperitur 3. Ergo ad quotientem B ſtatuo figuram 3. ſubtraho verò à numero 150 quadrato-quadratum 81 radicis 3 poſitæ, & reliquum 69 ſuperſcribo loco numeri 150; vt refert ſchema. Atque ita abſoluta eſt hæc prima operatio : quæ eadem ipſa eſt, quæ in communi extrahendi modo ſuperiùs explicato obſeruatur, nec iterum adhibenda occurrit reliquus verò numerus ille 69 vnà cum ſecundo membro, cui præfigitur ; efficit numerum 690625 : qui ſecundam radicis figuram daturus eſt iuxta ſequens præceptum.

Tertium præc. *Sectorémque gradus eius dant multiplicari per tabulæ numeros.*

meros. Docet præceptum hoc modum inueniendi aptum diuiſorem;per quem numero 690625 diuiſo habeatur ſecunda radicis figura. Diuiſor autem ille habetur ſi *gradus eius*, gradus ſcilicet figuræ 3 (ſiue potius 30 ob ſequentem figuram mox apponendam) omnes ab ipſa radice 30, excluſo tamen eius quadrati-quadrato 81 (qui gradus habentur in tabella ab ipſo quadrati-quadrato 81, versùs læuam in ſingulis poteſtatum minorum columnis) *multiplicentur per tabulæ numeros.* Cuius tabulæ? per quoſ numeros? non huius quidem tabulæ, cuius mentio proximè facta eſt in antecedenti præcepto, ſed eius, quæ Prop. 47. conſtructa eſt, & Prop. 48.repetita quam vocaui expoſitoriam.Multiplicentur ergo gradus poſitæ radicis 3 ſiue 30, qui ſunt 3, 9, 27. Siue 30, 900, 27000 per numeros tabellæ illius, qui ad quadrati-quadratum generationem pertinent,per numeros ſcilicet 4. 6. 4. qui ſeriem conſtituunt quadrati-quadrati, vt vterque exponens 4, ſecundus & penultimus, ſiue extremis primo & vltimo proximus iuxta Propoſitionem 48. indicat. Multiplicentur autem ſinguli gradus radicis 30 per ſingulos numeros 4, 6, 4 eodem ſeruato ordine, quilibet per quemlibet ſibi reſpondentem. Tum ex his multiplicationibus geniti numeri addantur: erit ex additione collectus numerus. Sector ſiue diuiſor, per quem diuidi debet, numerus 690625 ad definiendam radicis ſecundam figuram. Ecce praxim hoc in ſchemate allatam, quæ rem totam oculis ſubiicit. In ea radix B 30 cum ſcalaribus ſuis poteſtatibus C & D, 900, & 27000 multiplicatur per numeros

69
A ~~690~~625

M 113520 | B 30 —— E 4. H —— 120
C 900 —— F 6. K —— 5400
D 27000 — G 4. L —— 108000

M 113520

E, F, G. Singuli per ſingulos: & fiunt ſinguli H, K, L: qui ſimul additi producunt M. Hîc ergo eſt diuiſor: per quem diuidi debet numerus 690625 ad ſecundum membrum pertinens; & huic ad eum finem ſubſcribi; ita vt vltima eius figura 0 vltimæ totius membri figuræ puncto inſignitæ (quæ hîc eſt 5) directè ſupponatur, & reliquæ deinceps ſingulæ ſingulis ſuperioribus apprimè reſpondeant.

Diuiſore M 113520, & diuidendo 690625, ita ad diuiſionem comparatis. Quæritur quoties figura 1 diuiſoris prima in numero 6 ſuperpoſito contineatur? En hîc ſcopulus in omni diuiſionis genere occurrere ſolitus,

solitus, superandus, & hîc quidem hôc ægriùs, quò plures multiplicationes iniri debent; ex quibus nascentium numerorum habenda est ratio dum quotientis ad radicem statuenda figura eligitur; ne iusto maior, vel minor eligatur. Quæ determinatio faciliùs tradetur post traditas ipsas operationes necessarias. Quas sequenti præcepto complector.

Quartum præc. *Sector quotientis in omnes debet agi gressus: genitóque potentia iungi: Déque superposito* &c. Huius orationis hic est sensus. Quærebatur quoties figura 1 diuisoris in figura 6 diuidendi contineretur? supponatur quinquies contineri; & ad quotientem statuatur figura 5, quæ figuræ illius o radicis prioris B 30, locum occupet. Hæc figura 5 ad radi-

69	H—120.125	P 15000
A ~~1~~~~5~~~~0~~0625	K—5400.25	Q 135000
	L 108000.5	R 540000
M 113520 (B 25		T — 625
		V 690625

cem B statuta, statuatur etiam è regione numeri L proximo præcepto 3. reperto: eiusdémque *quotientis gressus*, siue gradus, vel potestates, 25 quadrata, 125 cubica, è regione numerorum k, H. Tum *sector* non quidem M ex tribus numeris H, K L simul iam additis conflatus; sed ipsæ sectoris partes sigillatim H, K, L ducantur in radicis 5 proximè positæ potentias respondentes 5, 25, 125: *Atque ita sector quotientis in omnes ducetur gressus*: vt fiant numeri P, Q, R è regione respondentes singuli singulis numeris H, K, L. His autem numeris P, Q, R simul iam additis; vel potiùs ad additionem paratis, *debet potentia iungi* potentia scilicet T 625 quadrato-quadrata figuræ 5 postremò ad radicem B positæ. Additis ergo hisce quatuor numeris P, Q, R, T. Vt fiat V. Debet factus hic numerus *de superposito decedere membro*. Debet nimirum subtrahi à numero 690625: qui secundum membrum primo dempto constituebat, numeri A. Qui cum ipsi membro sit æqualis; illúdque subtractus exhauriat: datus numerus A quadrato-quadratus est: eiusque radix est B 35. Quam nunc hac methodo inuentam; veram esse probandum est: sed priùs totam ipsam operationem appositè ad praxim oculis subiicio. En igitur schema.

		69		
		A 1500625		
		————	(B 3, *vel* 30. 35	
B 30	E 4	H 120 —— 125	P	15000
C 900	F 6	K 5400 —— 25	Q	135000
D 27000	G 4	L 108000 — 5	R	540000
		————	T —	625
		M 113520	————	
			V	690625

In hac ergo synopsi cernis primam radicis figuram B 3 siue 30, cum poteſtatibus ſuis C 900, D 27000. multiplicari per numeros E, F, G ſuperioris tabellæ triangularis expoſitoriæ quadrato-quadratis proprios, vt fiant H, K, L; qui ſimul additi diuiſorem M conſtituunt. Radicis autem figura 5 per diuiſionem inuenta ponitur è regione numeri L eiúſque poteſtates 25, & 125, ſingulæ deinceps ſingulis H k reſpondent. Contrario planè modo (quod obſeruatione digniſſimum eſt) quàm ſtatuti priùs numeri B, C, D: ſed huius cauſa aperietur. Denique multiplicantur inter ſe bini & bini numeri: (H, 125) (k, 25) (L, 5) vt fiant P, Q, R. Quibus additur quadrato-quadratus T 625, ipſius figuræ 5 vltimò poſitæ. His denique numeris P, Q, R, T ſimul additis conflatur numerus V ſubtrahendus à membro; cuius figura 5 radicis inquirebatur. Quæ methodus vniuerſalis eſt, eodémque modo & ordine ſeruatis quamlibet radicem cuiuſlibet poteſtatis exhibere nata eſt. Vt demonſtrabitur. Sed priùs quæras, & meritò (neque enim abſque hac determinatione abſoluta eſt problematis huius cóſtructio) quæ cautio adhibenda veniat; vt nec maior, nec minor, quàm par ſit, radicis figura eligatur? occurro. Si maiorem iuſto elegeris, id operationis progreſſus euidenter indicabit; maior enim peractis omnibus præſcriptis multiplicationibus numerus generabitur; quàm vt ſubduci à ſuperiore poſſit. Quare minuenda erit poſita ad radicem figura, & operatio emendanda: de qua emendatione inferiùs præſcribam. At verò cum poſt abſolutam operationem reliquus ſit quiſpiam numerus de quo dubium ſubeat, ne maior quam par ſit, exiſtat; minórque propterea ſit poſita ad radicem figura. Dubium tolles: ſi radicem hactenus ſtatutam, eiúſque poteſtates ſcalares vſque ad poteſtatem excluſiuè, cuius radix quæritur; per numeros expoſitoriæ tabulæ radici inueſtigandæ debitos; qui iam ad radicem poſitam adhibiti ſunt, multiplices; & inde productos ſimul addas. Debet enim factus numerus minor eſſe ſaltem vnitate

tate, quàm reliquus ille numerus. In paradigmate nostro vt haberetur secunda radicis figura, quæsitum est præc. 4. (illud consule) quoties figura 1 contineretur in superiore diuidendi figura 6. & ad quotientem apposita est vera & debita figura 5. factúsque est totus quotiens B 35. At si loco figuræ 5 ad quotientem posita fuisset figura 4: iuxta eam absoluta operatione reliquus fuisset numerus hîc 164289. Vt ergo certior fias an iusto maior sit; sume è tabella numeros quadrato-quadratæ radici inseruientes E, F, G: qui suo ordine multiplicent B, C, D radicem 34. Eius quadratum 1156; & cubum 39304. & producant H, K, L: qui simul additi conflent numerum M 164288.

B 34	— E 4.	H —	136
C 1156	— F 6.	K —	6936
D 39304	— G 4.	L	157216
		M	164288

Hic ergo cum minor sit quàm reliquus ille 164289 post absolutam operationem ad figuram 4 radicis pertinentem; certissimum argumentum est figuram illam 4 ad radicem vltimò positam iusto minorem esse. Nam, vt infrà demonstrabitur, si numero M addatur vnitas: vt fiat 164289; hic numerus additus ad quadrato-quadratum radicis 34. Qui est 1336336; generat radicis 35 vnitate maioris quadrato-quadratum: & verò factâ ea additione habetur numerus 1500625. Quadrato quadratus radicis B 35 priùs inuentæ. Habes ergo cautionem duplicem ex qua debitam metiaris radicis figuram.

Præparatio.

Hîc iterum ob oculos pono vtramque superiùs allatam tabellam: quarum prior potestates binomij in numeros proportionales distractas complectitur: altera continet exponentes singulorum proportionalium. Vt

					1					0		
								Tabella			*Expositoria*	
			3	2	—		1	1				
		9	6	4	—		1	2	1			
	27	18	12	8	—		1	3	3	1		
81	54	36	24	16	—		1	4	6	4	1	
243	162	108	72	48	32	—	1	5	10	10	5	1

Prop. 47. constituitur eiúsque constructio de quocunque binomio demonstratur. Illud prætereà in priore potestatum tabella ad rem nostram obseruandum est, ordines eius omnes, obliquos numeros continere continuè proportionales in ratione ordinis potestatum ex duplici binomij nomine genitarum, cui paralleli sunt. Vt, ordo numerorum 3, 6, 12 &c.

					1	0					
						Tabella					*Expositoria*
				3	2 —	1	1				
			9	6	4 —	1	2	1			
		27	18	12	8 —	1	3	3	1		
	81	54	36	24	16 —	1	4	6	4	1	
243	162	108	72	48	32 —	1	5	10	10	5	1

parallelus ordini poteſtatum 1 , 2 ,4,8 &c. ex nomine 2 genitarum; ipſos numeros 3 , 6 , 12 &c. continet continuè proportionales in eadem ratione; in qua continuè proportionales ſunt ipſæ poteſtates 1 , 2 , 4 &c. in ratione ſcilicet duplâ. Eodem modo continuè proportionales ſunt numeri 2 , 6 , 18 &c. quos ordo ſecundus ordini poteſtatum 1 , 3 , 9 , 27 &c. ex altero nomine 3 genitarum, parallelus complectitur. Quod idem in reliquis ordinibus obliquis obſeruatur, ſiue ad dextram vergant, ſiue ad ſiniſtram.

Ratio continuæ huius Analogiæ clara eſt. Nam ex Propoſitione 41 ſuperiore tres numeri 9, 6 , 4 ſunt continuè proportionales in ratione nominum 3 , & 2. Ergo cum ita ſit 9 ad 6 , vt 3 ad 2 : erit permutando. 9 ad 3 , vt 6 ad 2 : & conuertendo, 3 ad 9; vt 2 ad 6. Eodem modo oſtendetur eſſe 3 ad 6 , vt 2 ad 4. eodem item reliquos eiuſdem ordinis numeros vt ſe habent numeri ordinis vtrarúmque poteſtatum reſpondentes. Eodem denique cæterorum ordinum numeros. Quod cum planum adeo ſit, fruſtrà pluribus exponatur. Notandum tantùm obiter tot eſſe ordines obliquos; quot ſunt medij proportionales inter duas vltimas poteſtates: quales hîc ſunt numeri 243 , 32 ſuperſolidi nominum 3 & 2. Medij ſiquidem inter eas, ſunt baſes totidem ordinum obliquorum, vt oculis ipſis, ſi rectè figura conſtruatur, apertum eſt: & verò Prop. 41. oſtenſum eſt tot medios proportionales cadere inter duas ſimiles poteſtates 243, & 32 (quæ ſunt ſuperſolidi nominum ſiue radicum 3 & 2) quot inter vnitatem, & vtramque cadunt. Qui quidem medij ſinguli, totidem ordinum obliquorum ſunt capita.

Ad hæc, vt ad demonſtrationem ſoluti problematis propiùs accedam, obſeruandum eſt medios proportionales ad baſim pertinentes, ſiue inter ſuperſolidum 243 , & 32 interiectos generari ex ſingulis poteſtatibus vnius nominis, in alterius nominis poteſtates ſingulas ductis ordine reciprocè conuerſo, vel certè (quod cum voluptate mirêre) ductis in ſeſe mutuò duorum ordinum obliquorum ad medium quemque proportionalium, concurrentium capitibus. Ita nimirum proportionalium primus medius 162 generatur ductâ poteſtate 81 in poteſtatem 2 : quarum illa caput eſt ordinis vnius; hæc ordinis alterius, qui ſimul concurrunt ad

medium

medium proportionalem numerum 162. Vel quarum illa eodem ſpatio ab vltima poteſtate 243 diſtat; quo diſtat hæc ab vnitate in altero ordine poteſtatum. Similiter medius ſuperſolidi numerus 108 generatur ductâ poteſtate 27 in alteram poteſtatem 4, alterius nominis 2. à quibus naſcuntur obliqui ordines ad medium illum numerum 108 concurrentes: patet autem poteſtatem 27 eodem ſpatio ab vltima poteſtate 243 abeſſe; qua poteſtas 4 abeſt ab vnitate. Atque ita de cæteris. Illud porrò ſic verè aſſeri demonſtratur.

Duo numeri 81, & 162, ordinem obliquum conſtituunt parallelum ordini alteri poteſtatum 1, 2, 4 &c. Ergo ex iis quæ paulò ante oſtenſa ſunt, duo ipſi numeri 81, 162 proportionales ſunt duobus numeris 1, 2. Ergo idem fit numerus per Prop. 19. lib. 7. Elem. ex primo 81, in quartum 2 ducto: qui ex ſecundo 162 in tertium 1. fit autem ex ſecundo 162 in tertium 1 ducto, ipſe ſecundus 162. Ergo etiam idem 162 fiet ex primo 81 in quartum 2. Eodem modo. Quia ita eſt 27 ad numerum 108, vt 1 ad 4 (eſt enim vtrobíque duplicata ratio rationis 1 ad 2: ſiue 2 ad 4) idem fiet numerus ex primo 27 ducto in quartum 4: qui fit ex ſecundo 108 in tertium 1. Sed hîc fit numerus ipſe 108. Ergo & illic idem fiet 108. Idem eſto de reliquis mediis 72 & 48 iudicium: quorum ille fit ex multiplicatione poteſtatis 9 in poteſtatem 8 alterius ordinis: hîc autem ductâ poteſtate 3 in poteſtatem 16. Quæ demonſtratio quacunque data binomij poteſtate non ſecùs quàm hîc in ſuperſolido locum habet. Quæ cum ita ſint. Si poteſtates nominum ad ſuperſolidam vſque conuerſo ordine diſponantur, iiſque aptentur numeri expoſitoriæ tabellæ, qui ad ſuperſolidos ſpectant: ac demùm numeri tres coniugati inter ſe multiplicentur productíque omnes ſimul addantur: colligetur ipſius binomij inſecti ſuperſolidus. Vt in hoc ſchemate cernere eſt. In quo, binomij 3—2 hactenus in exemplum adhibiti, nominum poteſtates conuerſo ordine componuntur eíſque numeri expoſitorij ad ſuperſolidum pertinentes 1, 5, 10 &c. adſcribuntur. Ac demum tres ſinguli coniugati numeri in ſe ducuntur: genitíque adduntur: vt fiat 3935 ſuperſolidus radicis inſectæ 5. Ratio clara eſt. Si enim expoſitorij numeri 1, 5, 10, &c. ad ſuperſolidum ſpectantes multiplicent ſinguli ſingulos numeros 243, 162 &c. ſuperioris tabellæ poteſtates exhibentis nominum binomij: & producti addantur: haud dubium, quin ſuperſolidus radicis 5 inſectæ generetur. Id enim oſtenſum eſt Prop. 46. ſuperiori. At numeri 243, 162, 108 &c. generantur, vt proximè demonſtraui, ex nominum 3 & 2 pote-

1 —	32 —	1	— 32
3 —	16 —	5	— 240
9 —	8. —	10	— 720
27 —	4. —	10	— 1080
81 —	2 —	5	— 1620
243 —	1 —	1	— 243
			3935

ſtatibus conuerſo ordine in ſe mutuò multiplicatis. Ergo ſi hæ binæ & binæ poteſtates conuerſæ, & numeri expoſitorij reſpondentes multiplicentur: generantur numeri, quibus omnibus ſimul æqualis eſt ſuperſolidus radicis inſectæ 5. Reſpondebunt autem neceſſariò numeri expoſitorij ſinguli ſingulis ſuis poteſtatibus, etſi earum ordo inuertatur, eo quod, vt ex conſtructione tabellæ expoſitoriæ Prop. 47. ſuperiori, traditâ conſtat; cuiuſlibet ſeriei numeri priores, ſiunt etiam inuerſo ordine poſteriores.

Demonſtratio.

Ex huius totius præparationis perceptis capitibus plana euadit traditæ ſolutionis methodus; quæ aliàs tot ambagibus inuoluta latebat, vt non niſi ægerrimè è tenebris erui poſſe videretur. Hanc autem totam tum demùm demonſtratam cenſendam eſt: cum ſingula eius præcepta fuerint demonſtrata. Quare propoſito eodem numero A; ex quo eruenda proponebatur radix quadrato-quadrata, ſingula proſequor. Et quidem ad primum præceptum quod attinet: quo iubetur numerus in membra debita diſtingui; iam, dum illud traderetur, eius eſt allata probatio. Secundum autem, quo primi membri 150 quadrato-quadratus 81 ex tabella

69
A ~~150~~625
B 30

parata petitur, difficultatem non patitur peculiarem; rectéque ita ſumi ex ſequentibus conſtabit. Imò nec tertium latebit. Eo enim diuiſor paratur ex radice B 30, quo numerus reliquus 690625 diuidatur poſitâ ad quotientem apta figurâ, iuxta cautiones ſcilicet obſeruandas; quas ritè definitas probabo poſtmodum. Itaque quartum tantùm reſtat demonſtrandum præceptum. Quod certiſſimum, & tutiſſimum conſtabit: ſi oſtendatur radix ex eius præſcripto inuenta datum numerum (ſi in ſe ducatur iuxta exigentiam poteſtatis) reſtituere hoc ergo ſtabiliatur.

Radix ſtatuta fuit B 35. quæ in duo nomina 30 & 5 diuidi concipienda eſt. Nomen prius 30 definitum eſt præcepto 2. nomen poſterius 5 eſt ſtatutum obſeruatâ duplici cautione neceſſariâ: ita ſcilicet, vt ex ea figura 5 orti per varias multiplicationes numeri demi poſſent ex numero 690625 ſuperpoſito & tamen reliquus factâ ſubtractione, ſi quis foret reliquus, maior non eſſet numero; qui fit ſi totam radicem eiúſque ſcalares poteſtates vſque ad poteſtatem excluſiuè, cuius radix quæritur; multiplices

per

per numeros expositoriæ tabulæ, & productos simul addas. Huius vtriúsque nominis 30, & 5, potestates inuerso ordine constitutæ sunt; vt schema refert interpositi verò sunt inter has potestates inuersas expositorij numeri X, E, F &c. Si igitur hi numeri cuiuslibet ordinis in se ducantur, vt Z, X, M, & B, E, N, &c. ac deinde addantur producti, fiet potestas quadrato-quadrata totius insectæ radicis 35. At per traditam methodum id omninò præstatur. Ecce enim primò prioris nominis 30 potestates B, C, D

A 1500625 (B 35

Z 1	X 1	M 625
B 30	E 4	N 125
C 900	F 6	O — 25
D 27000	G 4	S — 5
Y 810000	V 1	L — 1

69
A ~~150~~0625 B 35

B 30	E 4	H 120	N 125	P 15000
C 900	F 6	K 5400	O 25	Q 135000
D 27000	G 4	L 10800	S 5	R 540000
		M 113520		T — 625
				V 690625

(omittitur quadrato-quadrata, vt præc. 3. iussum est, quia subducta iam est è numero A) multiplicantur per numeros E, F, G, expositorios: & fiunt H, k, L (hi simul additi ex præscripto tertij præcepti diuisorem M exhibebant) qui per potestates N, O, S alterius nominis 5 contrario ordine positas, multiplicari iubentur præcepto 4. vt fiant P, Q, R: quibus apponi eodem præcepto 4. iubetur potestas eiusdem nominis 5 quadrato-quadrata T 625; & demùm omnes simul P, Q, R, T, colligi in vnum V: vt detrahatur à numero 690625 relicto post subtractionem quadrato-quadrati 810000, radicis 30 à toto numero A dato. Cum ergo, vt ostensum est, ex partialibus hisce numeris qui ex amborum nominum potestatibus ordine permutato collocatis, & ita ductis in expositorios numeros, generantur constituatur quadrato-quadratus totius radicis 35 insectæ: qui est (si modo apta secunda radicis figura 5 electa fuerit

rit iuxta cautiones adhibitas) ipſe datus numerus A. Ergo radix hæc eâ methodo inuenta, eſt vera radix quæſita dati numeri A. Illud ergo tantùm reſtat oſtendendum, vt abſolutiſſima habeatur demonſtratio: rectè nimirùm eligi ſecundam radicis figuram, ſi duplex adiuncta cautio, ne maior, vel minor iuſto aſſumatur figura illa, obſeruetur. Quod ita colligo.

Non debet, vt præcepto 4. præſcribitur, tanta eligi illa radicis figura ſecunda, vel alia quælibet poſt ſecundam: vt quæ ex ea poſita ineundæ ſunt variæ, vt ex ſuperioribus patet, multiplicationes numerum generent maiorem, quàm vt ſubtrahi poſſit à reliquo ſuperpoſito numero; quod ipſum in vulgari numerorum diuiſione obſeruari etiam debet. Si enim ſubtractio illa fieri nequeat: radix poſita in ſe, iuxta denominationem poteſtatis, cuius dicitur eſſe radix, multiplicata; numerum datum non generat; ſed dato maiorem. Ergo radix eius non eſt: debet enim radix, vel ipſum numerum datum, vel poteſtatem in eo comprehenſam maximam generare. Quomodo autem poteſtas illa maxima in dato numero comprehenſa dignoſcatur: mox patebit ex ſecundæ cautionis expoſitione. Itaque.

Ne iuſto minor figura ad radicem collocetur: attendi debet, qui poſt omnes neceſſarias & præſcriptas operationes reliquus fit numerus. Is enim maior eſſe non debet, quàm numerus, qui fit ex ipſa radice inuenta, eiúſque poteſtatibus omnibus vſque ad poteſtatem excluſiuè, cuius radix quæritur, per numeros ſuos expoſitorios multiplicatis. Cuius aſſertionis fundamentum nititur methodo generandi poteſtatem ſimilem; cuius radix radicem priorem ſuperet vnitate. Vt habes quadrato-quadratum 625: cuius radix eſt 5. vis autem quadrato-quadratum radicis 6 vnitate, priorem radicem 5 ſuperantis. Illum ita conſequeris iuxta hactenus hîc tradita de binomiorum poteſtatibus.

	A 5.	B 1			
F	1.	1.	1.	G	1.
A	5.	1.	4.	H	20
C	25.	1.	6.	K	150
D	125.	1.	4.	L	500
E	625.	1.	1.	M	625
				N	1296

Eſto igitur binomium A B. cuius quadrato-quadratus quæritur; ſitque poſterius eius nomen vnitas B. Sint nominis prioris A poteſtates omnes vſque ad quadrato-quadratam incluſiuè, etiam incluſa vnitate, F, A, C, D, E, nominis autem poſterioris B 1 poteſtates ſunt 1, nec eius inuertendus eſt ordo, cum idem ſemper ſit numerus. Adſcribantur ſingulis amborum nominum poteſtatibus expoſitorij ſui numeri. Si ergo multiplicentur mutuò ſingulæ poteſtates cum ſingulis expoſitoriis: fient numeri G, H, K, L, M qui

qui simul additi conflant numerum N : qui ex iam demonstratis est quadrato-quadratus radicis 6 vnitate radicem priorem 5 superantis ; cuius quadrato-quadratus erat E. Cum ergo potestates omnes nominis posterioris B 1 sint vnitas, quæ numeros mutandi per multiplicationem capax non est : sequitur numeros G, H, k &c. produci multiplicatis tantùm potestatibus F, A, C &c. per suis expositoriis 1, 4, 6 &c. Vnde fit vt potestas radicis vnitate maioris altera radice, habeatur : si numeri ex sola multiplicatione potestatum, & expositoriorum geniti simul addantur : sic enim genitus est quadrato-quadratus N 1296 radicis 6 proximè maior quadrato-quadrato 625 ex radice 5 genito. Quibus demonstratis.

Sequitur ad rem nostram numeros G, H, K, L simul sumptos esse discrimen inter duos quadrato-quadratos M, siue E ; & N ; quorum radices sunt 5 & 6 vnitate differētes. Si enim ad quadrato-quadratum M siue E addantur numeri illi G, H, K, L, producitur quadrato-quadratus N proximè maior. Vt igitur ad radicem debita figura statuatur, quæ iusto minor non sit : non debet reliquus numerus absolutis operationibus æqualis esse numeris G, H, k, L : alioqui figura illa deberet vnitate augeri, & eius quadrato quadratus proximè maior foret quam quadrato-quadratus radicis assumptæ. Debet ergo reliquus numerus non excedere tres numeros H, k, L si enim hos excederet, vnitate saltem excederet. At si vnitate excedat : iam habetur discrimen G, H, k, L necessarium ad maiorem potestatem creandam. Cum ergo numeri H, K, L producantur, dum radix A eiúsque potestates C, D vsque ad quadrato-quadratam E (cuius radix quæritur) exclusam, multiplicantur per suos expositorios numeros 4, 6, 4. An non aptè cauetur, dum figura radicis noua eligitur ; vt sit eiusmodi : vt, si quis reliquus deinde fiat numerus ; is non excedat numeros simul sumptos : qui fiunt multiplicatâ radice, eiúsque potestatibus omnibus, vsque ad potestatem exclusiuè, cuius radix quæritur ; per expositorios tam radicis, quàm eius potestatum numeros.

Cum ergo hac duplici cautione adhibitâ, radix habeatur iuxta traditam methodum : quæ in se iuxta potestatis de qua agitur, exigentiam, deinceps, multiplicata, vel datum numerum producat præcisè, vel maximam potestatem in eo comprehensam : ea non potest non esse vera radix dati numeri. Itaque cum eadem methodus eruendæ cuiuscumque generis radici ex dato quouis numero inseruiat : (quæ enim ad secundam figuram radicis, cuius hîc tantùm mentionem feci, determinandam obseruata sunt ; eadem ad tertiam, quartam &c. obseruari debent) rationem exposui vniuersalem radices è quacumque potestate educendi, siue, vt ad initium monui, terminum post vnitatem primum progressionis geometricæ ; cuius datus numerus sit gradus in ea progressione datus. Quod præstandum erat.

Scholium.

Vt huius methodi præstantia clarius innotescat : iuuat ex eius præceptis cubicam radicem ex dato numero educere. Hinc enim quàm sit hæc breuior methodo vulgari superius Prop. 35. tradita quàm iucundior, quàm facilior, elucescet. Sit ergo datus numerus A hîc primò in membra distribuetur. Secundò prioris membri 34, radix cubica B 3 è tabella potestatum, digitorum nouem superiùs constructam desumetur : quæ figura B 3, est 30 habitâ ratione figuræ sequentis. Dempto verò cubo 27 figuræ B 3, ex numero 34, remanet 7: ita vt ad secundum membrum pertineat hîc numerus 7328. Cuius diuisor parandus est.

7 A 34328			
(B 32 *vel* 30			
M 2790			
C 30. E 3.	G 90. 4.		K — 360
D 900. F 3.	H 2700. 2.		L 5400
			N — 8
	M 2790		
			P 5768

Quadrandà scilicet est radix C 30, vt fiat D. tùm tam C, quàm D multiplicatur per cuborum expositorios E, F è tabula expositoria desumptos; vt fiant G, H. His additis fit M diuisor, Per hunc diuisorem diuiditur reliquus ille numerus 7328. eligendo figuram 2 ad radicem B 3 apponendam iuxta adhibendas cautiones. Huius figuræ 2 potestates vsque ad cubum exclusiuè, hoc est, ipsa figura 2 eiúsque quadratus 4 inuerso ordine è regione numerorum G, H collocantur : quos & multiplicant : vt fiant k, L : quibus apponitur cubus N, figuræ proximè statutæ 2 : ac denique tres numeri k, L N simul adduntur : vt fiat P 5768. quo à superposito 7328 subducto, remanet 1560. Atque ita absoluta est tota extractio proposita, inuenta radice cubica B 32 cubi maximi in numero dato A 34328 contenti. Confer iam rationem hanc cum ratione Prop. 35. traditam, omnium licet veterum breuissimam, vt quam præstantior hæc sit, liceat intueri. Vis etiam vt eandem methodum ad radicem quadratam educendam adhibeamus ? Esto.

Ex numero A eruenda sit radix quadrata. Eo numero A in membra distincto : & ex primo membro, detracto maximo : qui in eo continetur

quadratus

2			
A 638			
. .			
——— (B 25 vel 20			
G 40			
C 20	E 2.	G 40. 5.	k 200
	238		N 25
	P 225		———
	———		P 225
	13		

quadratus 4, cuius radix eſt B 2; quærenda eſt ſecunda eiuſdem radicis figura. Parandus eſt ergo diuiſor. Multiplicetur iam poſita radix B 2, ſiue potius C 20 per expoſitorium E 2 quadratis debitum: fiet G diuiſor: per quem ſi diuidatur reliquus ille numerus 238; diuiſionis quotiens erit figura 5 apponenda ad B 2. Tum etiam multiplicanda per G 40 (hic enim vnica radix 5 occurrit, nec poteſtatum ordo vllus eſt inuertendus cum vnicus ſit numerus 5, ipſa ſcilicet figura radicis) vt fiat K 200. Cui addendus eſt N 25 quadratus figuræ 5: vt fiat P 225 ſubtrahendus à numero 238 reliquo ex numero dato A poſt peractam operationem primam.

Hunc porrò radicis quadratæ è dato numero extrahendæ modum cum cæteris radicibus communem, & vniuerſalem ſingulari ſuperius traditæ methodo Prop. 14. apprimè conſonare comperies, ſi vtramque rationem perpendas. Nec minùs conſonant cubicæ radicis eruendæ modi duo. Ecce enim in proximo ſchemate ad quadratam radicem pertinente, poſt primam radicis figuram B 2 ſtatutam; quæ in vtroque modo ex tabella quadratorum decerpitur; paratur diuiſor 4, duplicatâ radice 2 iuxta priorem modum, at iuxta poſteriorem vniuerſalem, iubetur eadem radicis figura 2, ſiue C 20 multiplicari per numerum E 2, qui in tabella expoſitoria ad quadratos pertinet: vt fiat diuiſor G 40. per quem diuiſorem quæritur ſecunda radicis figura; quæ ita hîc eligitur, vt reliquus numerus peractâ operatione maior non ſit numero, qui fit ex ipſa radice inuentâ multiplicatâ per expoſitorium quadratorum numerum 2. iuxta cautionem appoſitam: qua iubetur vt reliquus numerus maior non ſit numero, qui fit ex ipſa radice poſitâ, eiúſque poteſtatibus vſque ad poteſtatem excluſiuè, cuius radix quæritur, per expoſitorios numeros multiplicata. Cum ergo hîc quæratur radix quadratâ: excludetur poteſtas quadrata à multiplicatione expoſitoris 2: ipſáque ſolum radix poſita multiplicanda per expoſitorem 2 veniet. At verò in priore modo iubetur, ne reliquus numerus maior ſit radicis poſitæ duplo. Hoc eſt, radice poſita per 2 multiplicatâ. En igitur eandem vtrobique imperatam cautionem diuerſis licet verbis expreſſam. Electa debita figura ſecunda 5, radicis, ſcribitur ſub figura 8 puncto inuſta; tum eadem ducitur in totum ſubſcriptum numerum 45 tanquam diuiſorem; genitáque ſinguli numeri ex ſuperpoſitis reſpondentibus ſubducuntur. Hîc verò poſita ad radicem figura 5 ſecunda ducitur in diuiſorem G 40; vt fiat k: cui additur eiuſdem figuræ 5, quadratus N 25,

vt fiat P 225, qui totus subtrahatur simul & semel à toto illo reliquo 238 non autē per partes singulas, vt priùs: idē tamen vtroque modo relinquitur numerus 13 peractis operationibus; quæ in eo tantum inter se discrepant quod prior ille communis modus, sensim per partes opus promoueat; quod posterior hîc vniuersalis perficit, nec sine compendio, & facilitate, totalibus adhibitis numeris. Eandem conuenientiam inter vtrumque modum radicem cubicam extrahendi licet obseruare: quam ex proximè declaratis circa radicem quadratam facilè colligere licet. Quare ad alia.

Occurrent logistæ nonnulli, qui generalem hanc methodum non omiserunt; sed vt vnde deriuaretur, vel non agnouère, vel non tradidère; varij variè ad exitum opus perducunt. Sunt qui ad expositores, figuras o multitudine inæquali, certo tamen ordine, adscribant; sunt qui adscribant potestatibus, has ego his tribuo numeris, qui ex natura sua, & ipsas & earum multitudinem sibi vendicant: vt ex progressu extractionis cuiuslibet radicis tradito apertum est. Licet sanè cuiuis ex tribus numeris, qui semper occurrunt in se mutuò multiplicandi, figuras huiusmodi O, sine producti vlla mutatione adscribere: cum, vt lib 1. ostensum est, reiici possint inter multiplicandum, donec producto restituantur omnes ad quemcunque tandem multiplicatorum numerum pertinerent.

Cum radix cuiusvis potestatis præcisa non est: cum scilicet post absolutam extractionem numerus quispiam reliquus fit: poterit ea non præcisa radix, non quidem ad veram (cum veram & præcisam siue integris, siue fractis numeris expressam dari non posse Prop. 42. huius libri 3. demonstrauerim) sed ad præcisiorem, & veriorem promoueri: si ad datum numerum semel vel sæpius apponantur figuræ O tot, quot exigit exponens potestatis, siue gradus geometricæ progressionis: qui potestatis denominatione afficitur: siue, quod idem est, quot figuris constat quodlibet membrum potestatis, cuius radix quæritur. Quot autem membra figuris o expressa addita fuerint, tot figuræ ex radice inuenta decerpentur: quæ fiant fractionis numerator; cuius denominator fit vnitas præfixa tot figuris O, quot membra addita fuerunt ad datum numerum. Hæc autem fractio annectenda erit ad reliquum radicis numerum: tunc enim cum hac fractione radix integro numero expressa, præcisior futura est, quàm si eâ priuaretur. Consule propositiones 25. & 39. in quibus quadratam, & cubicam radicem promouendi modum exposui.

Eodem modo ex numeris fractis radicem licebit eruere quamcunque; quo quadratam & cubicam eruendam ostendi; seruatâ tamen huius propositionis generali methodo. Eruetur scilicet imperata radix tam ex numeratore, quàm ex denominatore: & ex huiusmodi radicibus componetur fractio; quæ radix erit datæ fractionis. Quod si ad veriorem sit promouenda: promouebitur vtique promota radice tam numeratoris, quàm denominatoris.

Quia verò tunc complexus euadit vterque fractionis terminus; vterque ad simplicem numerum reducetur, qui simplicem fractionem priori complexæ æqualem constituat, vt Prop. 29. traditum est.

Corollarium insigne.

Ex hac Propositione; quæ vniuersalem radicis cuiuscúnque ex dato numero extrahendæ modum docet: non pauca, nec non rara, colligi possent: quæ tum ad communem, tum ad reconditiorem algebricam Arithmeticam pertinent: quæ ne institutionum limites excedam, fusiùs non prosequor. Vnum tamen hoc corollarium hîc, vbi percipi potest euidentiùs, non omitto: tametsi ex Propositione 42. Superiori consequatur: nimirum progressionem nullam institui posse: cuius datum gradú datus numerus occupet, nisi ei competat radix integro numero designata, potestatis gradum illum denominantis. Ecce proponitur numerus A: qui occupare debeat in aliqua progressione geometrica gradum quintum: atque adeo denominatum à potestate supersolida, vt ex

| A 3146 |

superioribus progressionibus, earúmque exponentibus constat. Dico igitur, si semel constiterit hunc numerum radice carêre supersolidâ, quæ integro numero exprimatur (vt hîc reuerà caret) nullam progressionem institui posse à quouis termino inchoatam, & secundum quamuis rationem progredientem: cuius gradum quintum occupet hîc numerus A.

Nam certum primò est radicem maximi supersolidi in numero A contenti, si minùs ipse, vt supponitur, supersolidus sit: esse vnitate maiorem; eò quod, si A foret vnitas, eius radix supersolida vnitas etiam foret: si ergo A vnitate maior est, etiam radix eius, vnitate maior necessariò est. At ex citata Propositione constat potestatem, quæ radice integra caret, carere etiam integra cum quauis adiuncta fractione. Cum ergo radix potestatis, vt explicatum est, aliud nihil sit quàm ipse primus terminus progressionis post vnitatem: progressio nulla iniri poterit: secundum quamcunque rationem (quod paradoxum videatur non mediocriter suspiciendum, cum infinitæ sint rationes per quas progressio crescere, & produci queat) quæ in datum numerum A quinto in gradu suo incurrat.

PROP. L. *Probl.*

Radicis cuiuſcunque extractæ examen inire radicibus omnibus commune.

Expoſitio.

Vt Propoſitione antecedenti tradita eſt vniuerſalis radices cuiuſcúmque generis è dato numero extrahendi ratio : ita vniuerſale earum examen debuit operationem comitari. Quod hîc præ cæteris Arithmeticis calculis neceſſarium videtur ob multiplices, quæ concurrere ſolent, numerorum variorum tractationes. Examen illud quidem generale fuerit. Si radix cuiuſcumque poteſtatis inuenta in ſe ducatur continuè, prout ipſius exigit denominatio; toties ſcilicet, quoties indicat poteſtatis exponens. Verùm longius illud eſſe videtur, nec ab errandi periculo alienum : plures ſiquidem multiplicationes iniri debent; quæ & ipſæ egerent examine, nec, ſi defectus quidpiam deprehendatur, facilè diſcernas, an in ipſa extractione, quæ examinatur, lateat; an verò ipſo in examine. Aliud ergo comminiſci conatus ſum expeditius; nec aliud tandem occurrit, vel breuius, vel elegantius; quàm quod nouenaria reiectio iam ſæpiùs celebrata ſuppeditat. Sic autem habet.

Conſtructio

Inuenta fuit ſuperiùs radix B 35 quadrato-quadrata numeri A 1500625.

A 1500625.	B 35
C 1 ——	D 8

hanc iuuat ope nouenarij examinare. Sic ergo age. Reiecto nouenario pro more quoties fieri poteſt ex dato numero A, reliquum C 1 ſepone. Tum, reiecto item nouenario ex radice inuenta B 35 reliquum numerum D 8 in ſe ducito toties continuè (continuè etiam reiecto ex productis nouenario) quoties indicat poteſtatis, ſiue gradûs, quem in progreſſione occupat eadem poteſtas, exponens, vt hic quater: reliquus enim (ſi erratum non eſt) idem eſſe debet cum reliquo C 1 priùs ſepoſito. Vt, quia reiecto nouenario ex radice B 35 ſupereſt reliquus numerus 8; ducatur in ſe 8; fiet 64 : ex quo reiecto 9, fit reliquus 1. In hunc numerum reliquum 1 ducatur rursùs 8. fiet 8 : ex quo reiici nequit 9; ſed ipſe numerus 8 eſt reliquus. In hunc ergo 8 ducatur idem D 8. fiet 64. vnde reiecto 9 reſtat 1 : in quo ſiſtendum eſt : ſiquidem numerus 8 ex radice B 35 reliquus iam in ſe continuè ductus eſt quater. Quod

vt

vt oculis ſubiiciam: conſtitue 8 quater, vt refert ſchema D, E, F, G. Duc primò D in E; fit 64; vnde reiectus eſt 9, & factus eſt reliquus 1; in hunc reliquum ductus eſt F, & factus eſt 8: qui & ipſe reliquus cenſetur poſt reiectionem nouenarij quem non attingit. Denique in hunc reliquum 8 ducitur G, & producitur 64. à quo reiecto 9, ſupereſt numerus 1: vt aſſerebatur.

D	E	F	G
8	8	8	8

Cernis autem hîc, vt quater in ſe ducatur continuè numerus 8. licet ter tantum multiplicatio iniri videatur. Nam ex duobus primis D & E vnica fit multiplicatio: certum tamen eſt numerum 8 quater ordine poſitum in ſe duci: quod hîc imperatum eſt. Quod & in quibuſcúnque radicibus obſeruari debet. Nunc oſtendamus duos reliquos illos vnum ex numero dato, alterum ex radice, vt præſcriptum eſt, genitum, æquales neceſſariò fore, ſi erratum minimè fuerit.

Demonſtratio.

Si inuenta radix B 35 quadrato-quadrata dati numeri A 1500625. quater ordine ponatur; atque ita in ſe continuè ducatur quater, vt proximè de numeris D, E, F, G dictum eſt, producetur quadrato-quadratus æqualis dato numero A ex ſuppoſitione, quod B 35 ſit radix eius quadrato-quadrata. Tunc ergo ex vtroque hoc æquali numero ſi reiiciatur nouenarius, reliquum æqualem eſſe neceſſe eſt. Sed dum radix B 35 in ſe ducitur quater & ex producto reiicitur 9 quoties fieri poteſt, idem fit reliquus: qui ex numero 8 quater poſito, & multiplicato, & inter multiplicandum reiecto nouenario, relinquitur. Ergo etiam idem hîc relinquitur, qui reliquus fuerat ex numero A. Probanda eſt minor; quam ita colligo.

Radix B 35 quater poſita in duas partes diuiſa 27 & 8 quater ponatur, vt ſchema appoſitum refert. Certum eſt per Propoſitionem 1.lib.2.elem. eiúſque ſcholia. Si ſingulæ partes (vt verbi gratiâ D) in omnes, & ſingulas tam ſuperiores H, K, L, M, quam inferiores D, E, F, G, ducantur: & hinc geniti omnes numeri ſimul addantur; fieri eundem numerum, qui produceretur; ſi radix 35 inſecta quater poneretur, & continuè multiplicaretur, fieri ſcilicet quadrato-quadratum radicis 35. Nec minùs certum eſt. Dum pars D in ſingulas H, K, L, M, ducitur fieri numeros: ex quibus ſi reiiciatur nouenarius, nihil ſuperſit. Nam nouenarius numeros H, k, L, M, metitur. Ergo etiam idem nouenarius metietur per Axi. 11. lib. 7. Elem. numeros omnes, quos H, K &c. metiuntur; productos ſcilicet ex numeris H, K, L, M multiplicatis per ſingulos, D, E, F, G; ſiue producti, ſinguli

H	K	L	M
27	27	27	27
8	8	8	8
D	E	F	G

ſinguli ſumantur, ſiue omnes ſimul additi. Reſtat igitur, vt ex numeris genitis per multiplicationem ſingularum partium D, E, F, G in earumdem ſingulas, dematur nouenarius; vt demptus cenſeatur ex toto numero quadrato-quadrato radicis B 35 ex illis partibus omnibus conflato. Sed dum ducitur D 8 in E 8, vt fiat 64: in quem ducatur F 8, vt fiat 512: & ex eo reiicitur 9 quoties fieri poteſt, idem fit reliquus numerus; qui relinquitur, ſi ex numero 64 (quem D & E in ſe mutuò ducti generant) reiiciatur 9: deinde in reliquum 1 ducatur F 8: & ex producto rursùs reiiciatur 9. probatur. Cogita dum F 8 ducitur in 64, duci in huius numeri 64 duas partes 63, & 1: quarum illa 63 menſuratur à nouenario; hæc verò 1 reliqua fit reiecto 9. ex numero 64 dum ergo F 8 ducetur in 63, ſi ex producto 504 reiiciatur 9, nihil ſupererit: numerus enim 63 menſuratus à nouenario ipſum 504 metietur; atque adeò nouenarius eundem metietur per citatum Ax. 11. Elem. lib. 7. ſupereſt igitur, vt reiiciatur 9 ex numero, qui fit ex F 8 in alteram partem 1 numeri 64. ad hoc, vt reiectus agnoſcatur 9 ex toto 512, genito ex F 8 in inſectum 64. Eadem ratiocinatione probabitur eundem relinqui numerum reiecto nouenario ex numero 64; qui fit ex G 8 in numerum 8: qui relictus eſt reiecto nouenario (quamquam in hoc caſu nouenarius actu minimè reiici poſſit: cum numerum, vnde reiici deberet, nouenario minorem eſſe contingat (ex numero 8 genito, ex reliquo 1 antecedente per F 8 multiplicato: in hoc tamen caſu in quo vnitas tantùm reliqua multiplicatur per numerum F 8 nouenario ex conſtructione minorem, non occurrit ineunda ſectio geniti numeri 8 in duas partes, vt occurrebat in præcedenti, in quo numerus 64 multiplicandus, ſectus eſt in duas partes 63 & 1. ita vt hîc nulla mentio fiat duarum partium, cum nulla ſectio interueniat; ſed numeri producti 8 ex vnitate per F 8 multiplicata; qui ſecundæ parti reſponderet; ſi prior quædam fuiſſet. Cuius te monitum volui, ne hoc diſcrimen duarum operationum in hoc paradigmate occurrens, negotium tibi faceſſeret, & dubium crearet, ne demonſtratio foret eadem in reliquis conſequentibus numeris conſtructionis: ſi maior poteſtas proponeretur, quàm quadrato quadrata: cuius radici examinandæ quatuor numeri, vt in hoc exemplo, D, E, F, G, inſeruiunt: plures ſanè futuri, ſi poteſtas maior proponeretur; è qua radix eruenda foret. Rectè itaque iuxta conſtructionem examinatur an radix inuenta; inuenta abſque defectu ſit: quando, vt in allato paradigmate, præciſa eſt, & numerus, è quo eruitur; talis reuerà poteſtas eſt.

Quod ſi radix præciſa minimè ſit, & reliquus quiſpiam numerus omnibus abſolutis operationibus neceſſariis ſuperſit. Nihilominus tamen idem examen rectè adhibebitur: ſed ad traditam conſtructionem addendum eſt poſt decurſas omnes nouenarij reiectiones iuxta traditum modum,

dum, easdem prosequendas esse ad numerum illum reliquum. Idem enim in eo casu relinqui debet numerus ita promotâ reiectione nouenarij, & ad reliquum illum extensâ: qui relinquitur reiecto nouenario ex toto dato numero. Quod idem in diuisione numerorum communi præscriptum est: nec diuersa est huius præscriptionis ratio. Vt ex allato paradigmate ostendo. Datus est numerus A 1500625 reuerà quadrato-quadratus, eiúsque inuenta radix quadrato-quadrata 35. Addatur ad numerum A numerus quispiam minor quam vt attingat quadrato-quadratum proximè maiorem quadrato-quadrato A (qui est numerus 1679616) cuius scilicet radix est 36 vnitate superans radicem 35 numeri A 1500625. Addatur, verbi gratiâ numero A numerus 24 vt fiat numerus 1500649. Certum est numerum A 1500625 esse maximum quadrato-quadratum in numero 1500649 contentum huiúsque radicem esse 35, non præcisam, sed reliquo facto numero 24. Si igitur tam ad vnitatem, quæ reliqua fit reiecto nouenario ex quadrato-quadrato A: quàm ad vnitatem; quæ reliqua fit reiecto nouenario ex radice 35 iuxta constructionem traditam; addatur numerus ille reliquus 24: idem vtrobique fiet numerus 25. Ego reiecto ex vtroque numero 25, nouenario; idem fiet reliquus numerus 7. Ergo etiam in eo casu, in quo aliquid superest post absolutam extractionem; si, vt præscriptum est, fiat nouenarij reiectio; verè examinatur absoluta radicis extractio.

Scholium singulare.

Vt oculis ferè ipsis huius examinis ratio contemplanda non sine voluptate proponatur. Fiat ex radice 35 inuenta binomium A, B. cuius

		A	B		
		27	8		
	729.	216.	64	E	
16083.	5832.	1728.	512	F	
C 434241.	128664.	13824.	46656.	4096	D

nomen A 27 à nouenario mensuratur: nomen verò B 8, est reliquus reiecto nouenario à radice 35. Ex huius binomij nominibus singulis in seipsa ductis, & in singulos numeros continuè genitos, vt in præparatione Propositionis antecedentis & Prop. 46. factum est. Gignentur vtriúsque nominis scalares omnes potestates, cum mediis inter vtrasque proportionalibus numeris: qui multiplicati per debitos tabellæ expositoriæ numeros generabunt numeros: qui simul additi ipsam potestatem integram insecti binomij hoc est, radicis 35, efficiunt. Itaque in schemate

ſeries C D duos quadrato-quadratos vtriúſque nominis A & B vnà cum intermediis proportionalibus exhibet: qui intermedij proportionales omnes à nouenario menſurantur, & ab iis reiecto 9 exauriuntur. Colligitur ex eo, quod poteſtates omnes nominis 27, quas continet ordo A C; à nouenario menſurantur: gignuntur enim per continuam multiplicationem nominis A 27, quod à nouenario menſuratur. Ex eo enim fit, vt medij illi omnes proportionales; qui, vt citatâ præparatione Propoſitionis 49.oſtenſum eſt, generantur per multiplicationem alicuius poteſtatis ordinis A C in alteram poteſtatem quampiam ordinis A D; menſurentur etiam ab eodem numero 9. Quod ſi iam à debitis expoſitoriis numeris medij illi multiplicentur: eodem iure producti, à nouenario menſurabuntur. Ita vt totus quadrato-quadratus à nouenario menſuretur ſi

A B
27 8
729. 216. 64 E
16083. 5832. 1728. 512 F
C 434241. 128664. 13824. 46656. 4096 D

ab eo ſubtraxeris quadrato quadratum 4096 ex nomine B 8 generatum. Ita vt oſtendendum reſtet dempto nouenario à numero 4096 eundem reliquum fieri numerum; qui relinquitur à toto quadrato-quadrato A 1500615. Illud autem oſtendo breuiùs, & planiùs initâ ei, quam in demonſtratione Propoſitionis huius attuli, oppoſitâ methodo; initio ſcilicet facto à ſupremo gradu quadrato-quadrati, ac deinceps per inferiores poteſtates ad radicem vſque B 8 deſcendendo. Hoc modo.

Radix B 8 multiplicans cubum ſuum F 512 generat D 4096 quadrato-quadratum. Ergo ſi ex producto D reiiciatur 9 quoties fieri poteſt; idem relinqui debet numerus (nempe 1) qui habebitur: ſi tam à multiplicato F, quàm à multiplicante B vtroque ſigillatim reiiciatur nouenarius: tum duo reliqui (qui ſunt 8, & 8) in ſe ducantur: ac denique ex producto 64 dematur rursùs 9, vt lib.1.Prop.38.demonſtratum eſt. Rursùs quia B multiplicans E 64 quadratum ſuum, ſuum generat cubum F 512: ſi reiiciatur ex F 512 nouenarius; idem relinqui debet numerus, qui relinquitur ſi ex multiplicante B 8, & ex multiplicato E 64 ſigillatim reiiciatur 9; duóque reliqui 8 & 1 in ſe ducantur; & ex genito 8 idem abiiciatur nouenarius, per citatam Propoſitionem. Ergo conuerſo veſtigio. B 8 reliquus dempto nouenario ex radice inuenta 35, ductus in ſe, & producens quadratum ſuum F64, à quo dematur 9: ſi reliquum 1 multiplicet; producit 8; qui ſupereſt, ſi à cubo F 512 dematur 9. Rursùs, ſi idem B 8 ducatur in reliquum 8 cubi F 512, & à genito 64 dematur 9; ſupereſt 1: qui relinquitur à quadrato

quadrato-quadrato D 4096, & sic deinceps quotquot extiterint potestates nominis B 8.

Ex quibus patet satis esse ad examen radicis inuentæ 35 si, vt præceptum est in constructione propositionis, dematur 9 primò ab ipsa radice 35: tum reliquus 8 in se ducatur, & à genito 64 rursùs dematur 9. deinde in reliquum 1 (nulla facta mentione cubi F 512) rursus ducatur 8: & à producto 8 dematur 9 (hîc per se reliquus 8 habetur) in quem denique reliquum 8, ducatur idem primus numerus 8: vt fiat 64; vnde reiecto nouenario reliquus fit 1: qui relinquitur ex quadrato-quadrato radicis 35, vt ostensum est; ergo si idem 1 reliquus fiat ex toto dato numero A 1500625. Rectè inuenta est hæc radix. Æqualis siquidem est eius quadrato-quadratus dato numero A.

Finis libri tertij Institutionum Arithmeticarum.

LIBER QVARTVS

DE RATIONIBVS RATIONVMque proportionibus.

ECCE præcipuum, quo Mathematicæ disciplinæ vtuntur ac ferè vnicum instrumentum. Quod proinde quanti momenti sit, quantique fieri debeat; non est opus pluribus explicare. Opus autem non paucis, eius aperire difficultates. Quæ ex eo capite non possunt non esse graniores, & abstrusiores: quod duplici ratio quælibet constet termino: qui vterque cognitione simul est, simúlque debet vterque attendi; vt vera rationis, quæ inter ipsos intercedit, formetur apprehensio: quæ propter compositionem futura est longè impeditior; quàm vna vnius termini simplex conceptio. Longè verò impeditius futurum est hoc rationum negotium: cum eas inter se conferri contigerit, vt conferri solent numeri simplices quatuor illis solemnibus modis additionis, subtractionis, multipli-

cationis, ac diuisionis. Quin enim iidem rationibus, atque adeò rationum Analogiis, competant; nemo iure in dubium vocet. Et si enim rationes duarum quantitatum, quantitates formales ipsæ non sint: quantitatis tamen facultates sibi vendicant: dum aliis aliæ maiores, minoresve, aut aliæ aliis æquales ipso geometriæ parente Euclide, aliisque geometriæ luminibus passim attestantibus, exhibeantur: eóque possint nouis accedentibus augeri, minuíque recedentibus. Atque de hoc quidem vix vlla vnquam exorta est contentio: At verò tantò maior de ipsis augmenti, decrementique principiis à quibusdam nominis alioqui non obscuri geometris est excitata: dum ex suo, non Euclidæo, veróque, & antiquorum geometriæ luminum sensu, de rationibus disputantes, nullum inter earum additionem & multiplicationem; nullum inter subtractionem & diuisionẽ discrimen agnoscunt. Illam verò tam celebrem, támque sæpè ab antiquis vsurpatam rationum compositionem non tantum cum multiplicatione (quod etsi, vt suo loco ostendam, fieri non debeat; ferendum tamen quoquo modo foret) sed etiam cum ipsa additione; quo quid absurdius? planè confundunt. Atque ex iis in aliena prolapsis sententiis; nec tantùm ex rationum ipsarum obscuriore naturâ; tanta, vt reor, secuta est earum ignoratio eásque perdifficiles scitúque penè impossibiles esse concepta opinio: quæ vt excidatur funditus, non alia melior ratio iniri potest: quàm si ex Euclidis ipsius sententia (quam propterea fusiùs suo loco expensurus sum) rationum tractatus hîc instituatur. Qui ab eo, quem toto libro primo Examinis quadraturæ à R. P. Gregorio à sancto Vincentio excogitatæ prosecutus sum; non discrepat (eo enim pro meo in mea iure, præsertim cum peritis non omninò displicuisse sciam, & proprius hîc illius locus ita exigat, vti mihi licere censeo) nisi fortè hîc paulò amplior interdum, interdum etiam contractior futurus sit. Totum porrò hunc de rationibus tractatum concludent quædam ex rationibus deducta problemata; Atque in iis, tum alligationes, tum falsæ positiones non inelegantibus è Geometria petitis demonstrationibus stabilita: quæ hactenus, quantum mihi innotuit, desiderantur.

PROP.

P R O P. I. *Definitio.*

Ratio duorum numerorum, eſt mutua quædam eorum ſecundum quantitatem habitudo.

Expoſitio.

Hæc rationis inter duos quoſvis numeros intercedentis definitio deducitur ex illa rationis inter duas quantitates generali definitione: quam ipſe geometriæ parens Euclides tradit lib. 5. definit 3. in hæc verba. *Ratio eſt duarum magnitudinum generis eiuſdem mutua quadam ſecundum quantitatem habitudo.* Vbi illa voce (*magnitudinum*) non continuas tantùm quantitates, ſed diſcretas etiam illum complecti apertè colligitur ex eo; quod nuſquam aliàs meminerit definitionis: qua rationem inter numeros explicaret: cum tamen tam multa de eorum rationibus demonſtrarit ipſis totis tribus libris elementorum ſeptimo, octauo, & nono. Imò ipſam à ſe traditam ſupponit, dum libro 7. defin 20. numeros proportionales, hoc eſt, iuxta huius vocis propriam notionem, qua hîc vtitur; numeros eandem rationem habentes definit. Voluit ſcilicet geometra definitionem illam ſuam rationis duarum magnitudinum libro 5. traditam, non minùs ad numeros quam ad continuas quantitates pertinere, non ſecùs ac ipſum totum librum quintum: etſi permultas propoſitiones illius vtrique quantitatis generi conuenientes in tribus numerorum libris repetat; earúmque nouas demonſtrationes condat, quas ſcilicet breuiores, & apertiores numerorum natura, propriáque eorum principia miniſtrabant. Quoties igitur numeri cuiuſpiam quantitas ad alterius cuiuſvis numeri quantitatem confertur; reſultat ex ea comparatione relatio quædam: qua collatus ad alterum numerus, qui eſt relationis fundamentum, denominatur maior, vel minor altero; vel ei æqualis: tum etiam ſecundum ſpecificam maioritatem, & minoritatem (æqualitas autem ad ſpeciem infimam numeros iam contraxit) tantò, vel tantò maior, vel minor, eodem termino, quas maioritatis & minoritatis ſpecies ſtatim recenſurus ſum. Hæc ergo habitudo, quæ inter quantitatem vnius numeri & alterius numeri quantitatem intercedit; ratio propriè vocatur: quæ apud authores non rarò proportio appellatur: ſed minus aptè: cum proportio ſiue analogia non quantitatis ad quantitatem; ſed rationis inter duas quantitates ad alteram inter duas alias quantitates rationem, vt infrà declarabitur, habitudo ſit.

Hic porrò numerorum voce, inter quos ratio reperiri dicitur, non

tantum propriè dicti numeri, qui ſcilicet ſint vnitatum collecta multitudo intelligi debent: ſed etiam ipſa vnitas; ipſi etiam numeri fracti, ſiue vnitatis partes. Eodem enim diſcretæ quantitatis genere continentur: nec vllus eſt numerus, qui ad alterum, & ad omnes eius partes habitudinem quandam non ſortiatur. Imo auſim aſſerere inter numeros, quos ſurdos vocant; nec numeri, cum non ſint vnitatum collecta multitudo, propriè dici poſſunt, rationem reperiri: qua de re mentio facienda rurſùs occurret.

Obſerua hîc denique numerum, qui ad alterum confertur; & eſt relationis, quæ ratio dicitur, fundamentum; vocari ſolere rationis antecedentem: alterum verò, ſiue relationis terminum, dici conſequentem.

PROP. II. *Principium*

Rationum duo ſumma ſunt genera: ſubalterna, decem.

Expoſitio.

Poſt rationis definitionem, rationum variarum diſtinctio inſtituenda eſt: quam ſic abſoluo.

Rationis antecedens, conſequenti, vel æqualis eſt, vel inæqualis. Si fuerit æqualis; ecce æqualitatis rationem (quæ ampliùs contrahi nata non eſt) ſi verò inæqualis: habes rationem inæqualitatis: ergo & duo rationum genera, Æqualitatis ſcilicet, & Inæqualitatis.

Rurſus. Rationis antecedens ita poteſt eſſe inæqualis conſequenti, vt eo maior ſit, vel eodem minor. Si primum; rationis genus habetur maioris inæqualitatis; ſi ſecundum, inæqualitatis minoris. Cuius vtriúſque rationum generis quinque diſtinguntur ſpecies ſubalternæ. Quod ſic declaratur.

Numerus, qui altero maior eſt, vno aliquo ex his quinque modis illum ſuperare poteſt.

Primò. Si maior minorem ſemel continet, & eius præterea aliquam præciſam partem: quæ ſcilicet iuxta propoſitionem 8 libri 1. aliquoties repetita minorem ipſum præcisè & adæquatè metiatur. Vt, ſi maior, ſiue rationis antecedens fuerit A; & minor, ſiue conſequens ſit B. Nam A ſuperat B tertiâ eiuſdem numeri B parte: quæ ter repetita ipſum præcisè metitur. Dicitur autem huiuſmodi ratio ſuperparticularis, eò quod maior ſupra minorem, partem eius aliquam contineat. Huius generis variæ diſtinguntur ſpecies, prout variæ ſunt partes minoris, quibus à maiore ſuperatur. Vt hæc ipſa ratio.

A 8	A 4
B 6	B 3

ratio A B dicetur ſeſqui-tertia quo eodem modo ratio antecedentis 15 ad conſequentem 10 diceretur ſeſqui-altera; eò quod 15 ſuperet numerum minorem 10, altera ſui parte nempe 5.

Secundò fieri poteſt vt numerus maior minorem ſemel contineat, & præterea partes eius aliquot; quæ iuxta ſenſum Propoſitionis 8. libri 1. ipſum minorem adæquatè & præcisè metiri non poſſunt. Quæ ratio dicitur ſuperpartiens. Cuiuſmodi ratio eſt inter antecedentem A, & conſequentem B. Nam A continet conſequentem B ſemel,

A 7	A 21
B 5	B 15

& præterea eiuſdem minoris B partes aliquot; quæ ipſum minimè præcisè metiuntur. Nam antecedens, verbi gratiâ, 7 continet præter minorem 5, duas vnitates; quæ eundem 5 præcisè metiri nequeunt: ſicut nec vnitates ſex, quibus numerus 21 excedit minorem 15, ipſum 15 metiri nullatenùs præcisè poſſunt. Habitâ verò ratione multitudinis harum partium, variæ ſpecies rationis ſuperpartientis generantur. Vt quia antecedens 7 continet conſequentem 5 ſemel, & præterea duas vnitates; ideò ratio hæc 7 ad 5, dicetur ſuper-bipartiens: eadem appellatione exprimetur ratio 21. Antecedentis ad conſequentem 15. continet enim numerus 21 numerum minorem 15 ſemel, & præterea ſex vnitates: quæ ſunt duæ partes quintæ, eiuſdem conſequentis 15; vt patet. ſi fractio cuius numerator eſt 6, & denominator 15 ad minimos terminos reuocetur per Propoſitionem 21 lib. 2. Eodem modo ratio 8 ad 5 dicetur ſuper-tripartiens propter tres vnitates (quæ totidem ſunt partes conſeqventis) quibus antecedens 8 ſuperat conſequentem 5. Ratio verò 9 ad 5, dicetur ſuperquadrupartiens propter exceſſum numeri 9 ſupra 5, qui quatuor vnitatibus conſtat. Sic aliæ innumeræ ſuper-partientis rationis ſpecies diſtinguentur, vt ſuper-quintupartiens, ſuper-ſextupartiens &c. per ſolam partium multitudinem, quibus antecedens ſuperat conſequentem. At verò omnes huiuſmodi ſpecies ſubalternæ contrahentur ad alias ſpecies rationum per qualitatem ipſarum partium. Vt omnes huius ſchematis rationes A B, C D, E F. Propter partium multitudinem, quæ ſunt ex-

A 7	C 5	E 15
B 5	D 3	F 13

ceſſus antecedentium ſupra conſequentes, ad genus rationis ſuper-bipartientis ſpectant, vt dictum eſt. Quod ſi duarum illarum partium attendatur qualitas, vt attendi omninò debet: iam genus illud rationis ſuper bipartientis ad varias ſpecies eáſque infimas contrahetur. Vt, quia rationis A B antecedens A excedit duabus vnitatibus conſequentem B: quæ duæ vnitates, ſunt duæ partes quintæ eiuſdem conſequentis B: propterea dicetur ratio A 7 ad B 5. Super-bipartiens quintas (ſcilicet partes) eáque ratio A B ſpecie differet à ratione C D. Licet enim ipſa etiam ratio C D ſit ſuper-bipartiens: quia tamen duæ partes, quibus antecedens C 5 ſuperat

perat conſequentem D 3, non quintæ, ſed tertiæ partes ſunt conſequentis D 3, ab ipſo nempe D 3 denominatæ, ideo ſuperbipartiens ratio C D à ſuperbipartiente A B, ſpecie differre dicetur; eáque ratio efferetur ſuperbipartiens tertias; ſicut A B dicebatur ratio ſuperbipartiens quintas: eodem modo ratio E F ab hac vtraque ſpecie diſtinguetur; vocabitúrque ratio ſuperbipartiens decimas tertias. Eodem modo ad varias ſpecies rationum infimas contrahetur genus rationis ſuper-tripartientis, ſuper-quadrupartientis, ſuper-quintupartientis &c. per qualitatem, ſiue denominationem partium; quæ ſunt exceſſus antecedentis ſupra conſequentem.

Tertiò antecedens rationis conſequentem continere poteſt aliquoties præcisè, hoc eſt, multiplex eſſe poteſt conſequentis, vt duplex, triplex &c. tótque ſunt rationum huiuſmodi ſpecies diuerſæ, quot denominationes vt per ſe patet euidenter.

Quartò itaque antecedens conſequentem aliquoties continere poteſt, & prætereа aliquam eiuſdem conſequentis partem: quæ ipſum ſcilicet præcisè metiatur quomodo conſtituitur ſpecies rationis; quæ multiplex ſuper-particularis dicitur. Vt, ratio A B dicetur tripla ſeſqui-tertia. Nam

A 10	C 25
B 3	D 4

antecedens A 10, conſequentem B 3 ter continet, & inſuper vnitatem: quæ eſt pars tertia conſequentis B 3. Ratio verò C D dicenda eſt ſextupla ſeſqui-quarta: eò quod antecedens C 25 ſextuplus ſit conſequentis D 4, & inſuper contineat vnitatem, quartam ſcilicet partem eiuſdem conſequentis.

Quintò denique antecedens conſequentis multiplex eſſe poteſt, & partes aliquot conſequentis continere. Quo in caſu conſtituitur ratio multiplex ſuper-partiens: cuius variæ ſunt ſpecies tùm ex multiplicitate, tùm ex multitudine partium, tùm etiam ex earundem partium qualitate quemadmodum paulò ante, vbi de ratione ſuperpartiente agitur, declaratum eſt. Sic ratio A B dici debet tripla ſuper-bipartiens tertias. At ratio C D, dicetur ſextupla ſuper-tripartiens quartas: eò quod antecedens C conſequentem D ſexies contineat, & præterea tres vnitates: quæ ſunt tres quartæ partes eiuſdem conſequentis D.

A 11	C 27
B 3	D 4

Atque hæ ſunt ſpecies quinque in quas ratio maioris inæqualitatis contrahi poteſt, quibus plures dari non poſſunt, vt patet. Maior enim numerus ad minorem comparatus his tantùm quinque modis diuerſis poteſt ſe habere. Aut enim maior minorem excedet parte aliqua eiuſdem minoris: aut partibus: aut minorem aliquoties ſumptum præcisè continebit: aut aliquoties continebit cum parte aliqua: aut denique aliquoties continebit cum partibus aliquot. Nec aliter maior quiuis numerus ad quemlibet alium minorem ſeſe poteſt habere. Atque hæ quinque diuerſæ

diuersæ habitudines maioris numeri ad minorem, quinque enumerata rationum genera constituunt, quibus respondent genera totidem ex numeri minoris ad maiorem comparatione manantia: respondet & singulorum generum denominatio, vnicâ tantùm particulâ (*sub*) præfixâ discrepans.

Numerus itaque minor, siue antecedens rationis in maiore, siue consequente semel continetur, eiusdémque antecedentis, aut pars est aliqua propriè dicta: aut partes, aut aliquoties præcisè: aut aliquoties, & præterea pars aliqua sui proprié dicta: aut denique aliquoties, & partes aliquot. Atque his plures habitudines diuersas habere non potest numerus quispiam minor ad alium quemlibet maiorem numerum.

Itaque ex prima habitudine habetur ratio sub-perparticularis. Talis est ratio antecedentis 3 ad consequentem 4. Consequens enim antecedentem superat vnitate: quæ est tertia eiusdem antecedentis pars tertia. Dicetur autem hæc ratio 3 ad 4 sub-sesquitertia. At ratio 5 ad 6 dicetur propter eandem rationem sub-sesqui quinta.

Ex secunda habitudine oritur ratio sub-superpartiens cuius variæ sunt species: quæ & propter partium multitudinem, & propter qualitatem distinguntur. Vt ratio 5 ad 7 dicetur sub-superbipartiens quintas: binis enim sui partibus quintis antecedens 5 superatur à consequente 7.

Ex tertia habitudine fit ratio sub multiplex. Vt ratio 4 ad 12 est sub-tripla. Quia antecedens 4 ter continetur in consequente 12. & sic de cæteris.

Ex quarta habetur ratio sub-multiplex super-particularis. Vt ratio 3 ad 10. Quæ dicetur sub-tripla sesqui tertia vel etiam, si mauis, sub-tripla sub-sesqui tertia.

Ex quinta denique nascitur ratio sub-multiplex superpartiens. Vt ratio 3 ad 11 dici debet sub-tripla super-bipartiens, vel sub-superbipartiens tertias. Nam 3 continetur ter in consequente 11, & duæ præterea partes tertiæ antecedentis eiusdem 3.

Habes ergo rationum minoris inæqualitatis quinque genera diuersa. Habes singularum denominationes vsurpari solitas: quas vide ne non paulò aptiùs & explicatiùs afferre liceat in hunc non nihil diuersum modum; ita vt sub-superparticularem voces sub-particularem: cuius species sint sub altera, vt 2 ad 3: sub-tertia, vt 3 ad 4: sub-quarta, sub-quinta &c. ratio verò sub-superpartiens dicatur, expunctâ illâ particulâ (*super*) sub-partiens: cuius species sint sub-bipartiens tertias, vt 3 ad 5. Sub-tripartiens quintas, vt 8 ad 5. Eodem modo reliquas aliorum generum species appellaueris, vt sub-duplex sub altera, sub-duplex sub tertia &c. Item sub-duplex sub-bipartiens, sub-triplex sub-tripartiens &c.

Hic demùm omittenda non est illa rationum diuisio: qua aliæ dicun-

tur rationales, aliæ irrationales. Illæ ſunt hactenùs enumeratæ rationum ſpecies: quæ inter numeros propriè dictos, ſiue integros, & ex vnitatibus conflatos; ſiue fractos, & vnitatis partibus conſtantes; ſiue ex vtriſque quomodocumque mixtos intercedunt. Irrationales verò rationes, illæ ſunt; quas numeri ſurdi, ſiue irrationales, & inter ſe incommenſurabiles conſtituunt. Vt, ratio ſurdæ radicis quadratæ numeri 12 tanquam antecedentis ad conſequentem 3, irrationalis eſt; nec vllis numeris illam fas eſt exprimere. Dicetur tamen hæc ratio √ 12 ad 3 maioris inæqualitatis: maior eſt antecedens √ 12, conſequente 3: vt patet ex eo, quod quadratus numerus radicis huius √ 12 (qui quadratus, eſt 12) maior eſt quadrato 9, radicis 3: maior ſiquidem ille numerus eſt; cuius quadratus maior eſt. Contrà verò ratio numeri 3 ad √ 12, ratio erit minoris inæqualitatis illud porrò genus rationum irrationalium ſiue maioris, ſiue minoris inæqualitatis: rurſus in ſpecies diuerſiſſimas contrahitur: quas hîc nec quidquam recenſeam; cum nullam earum mentionem ſim deinceps habiturus quippe quæ ad Algorithmum Algebraicum, à quo nunc abſtineo, pertineant.

Atque hactenus principij allati expoſitioni cúmulatè ſatisfactum eſt. Cuius in hac tabella ſinopſim intueri licet.

Ratio alia eſt

Æqualitatis — Inæqualitatis

Cum comparantur quantitates

Æquales, vt 2 ad 2 eius vnica eſt ſpecies — *Inæquales. Huius duo ſunt diuerſa genera: Nam eſt*

Ratio inæqualitatis

Maioris — Minoris

cum comparatur quantitas

maior ad minorem — *minor ad maiorem*

Ratio vtriuſque inæqualitatis eſt

Rationalis — Irrationalis

quæ eſt numeri ad numerum: cuius ſunt decem genera hîc ſubſcripta — *quæ non eſt vt numeri ad numerum: cuius varia ſunt genera huc minimè ſpectantia*

Rationalis

Rationalis ratio maioris inæqualitatis, alia eſt

Superparticularis

cum maior minorem continet ſemel &

partem minoris aliquotam vnde

ſeſquialtera vt 3 ad 2

ſeſquitertia vt 4 ad 3

Multiplex

Cum maior minorem continet aliquoties adæquatè

Multiplex ſuperparticularis

quæ ex multiplici & ſuperparticulari componitur.

Superpartiens

partes minoris non efficientes aliquotam: cuius variæ ſunt ſpecies. Vt ſuperbipartiens ſupertripartiens &c. rurſus ſuperbipartiens tertias, quintas &c. ſupertripartiens quartas, quintas &c.

Multiplex ſuperpartiens

quæ ex multiplici & ſuperpartiente conflatur.

Totidem ſunt minoris inæqualitatis rationes conuerſis terminis; & nominibus particula (*ſub*) appoſitâ, vt ſubſuperparticularis, ſubſuperpartiens, ſubmultiplex &c.

PROP. III. *Theor.*

Nulla eſt ratio, cui alia ſimilis non detur: cuius conſequens ſit vnitas.

Demonſtratio.

Supponatur ratio quælibet A B. Fiat autem vt conſequens B ad antecedentem A; ita C 1 ad fractum numerum D E. Ratio antecedentis D E ad conſequentem C 1 ſimilis eſt rationi A B. Nam C ad D E, eſt ex ſuppoſitione vt B ad A. Ergo inuertendo. Ita eſt antecedens D E ad C vnitatem, vt conſequentem; vt A ad B. Quod cum in qualibet ſuppoſita ratione fieri poſſit; patet quomodo nulla ſit ratio &c. Quod erat demonſtrandum.

	D 5
	—
A 5	E 4
B 4	C 1

Scholium.

Hîc obſerues quam facilè conuertatur data quælibet ratio in aliam ſimilem, cuius conſequens ſit vnitas. Si enim datæ rationis, vt A B, termini in modum fracti numeri; qualis eſt D E, componantur: fractus

huiusmodi numerus DE erit antecedens, vnitas verò C consequens rationis, rationi A B similis. Nec huius obscura est ratio. Cum enim tribus numeris B, A, & C quartus proportionalis inquiratur; id præstabitur iuxta methodum regulæ proportionum lib. 1. Prop. 50. traditam. Quæ iubet, vt duo posteriores A & C in se ducantur: genitus autem per primum diuidatur. Cum ergo tertius C sit vnitas, quæ ducta in secundum A, ipsum non immutat, diuidendus erit ipse A per primum B. Quæ diuisio absoluitur statuto numero fracto: cuius numerator sit A, & denominator B.

PROP. IV. *Theor.*

Rationis cuiuslibet denominator est alia ei similis ratio: cuius consequens est vnitas.

Expositio.

Magni momenti habita semper est hæc de rationum denominatoribus contemplatio: quam ipse etiam non paucis complexus sum, nec obscuris lib. 1. Examinis quadraturæ nouæ Prop. 2. quibus non absimilia hîc à me tradi locus postulat in quo versamur. Ac in primis. Denominatores rationum instituendi causa, tum eorum munus explicanda erunt. Ac demùm, vt fert hæc propositio, demonstrandum rationem similem, cuius consequens est vnitas, esse totius speciei denominatorem.

Obseruandum itaque est habitudinem illam inter duos numeros (de numeris enim hîc sermo instituitur, licet de continua quantitate deinceps aliquid obiter conclusurus sim) in qua rationis natura consistit, vt prima docet libri huius propositio: eandem esse, etsi varij sint, & valdè inæquales numeri, siue termini antecedentes, & consequentes. Eadem enim habitudo est numeri 4 ad numerum 2; quæ est numeri 30 ad 15: eadem, quæ numeri 1000 ad 500: eadem, quæ cuiusuis antecedentis, siue integer fuerit, siue fractus numerus; qui consequentis duplus est. Quod cum ita sit: non potest ea similis habitudo inter tot, tamque inæquales terminos innotescere, ac vnica denominatione exhiberi, quæ ab ipsis terminis hauriatur: foret alioqui vnius, eiusdémque habitudinis siue rationis appellatio tam multiplex; quam multiplices esse contingeret terminos: quam enim ex terminis 30 & 15, rationis denominationem stabilias; quâ ipsa ratio explicetur? Inquirenda ergo fuit in vnaquaque rationis specie, ea ratio; quæ terminis constaret notissimis, ac familiarissimis: ex quibus reliquæ similes, & penderentur, & nomen acciperent. Hanc autem

tem eam esse assero, cuius consequens est vnitas. Talem enim in quauis rationum specie dari, proxima propositione ostensum est. Illud ergo declarandum ac concludendum est.

Demonstratio.

Illa ratio, quæ terminis antecedente & consequente constat; quorum habitudo præ cæterorum rationem similem constituentium terminorum habitudine est nota, & aperta; denominatoris munere erga speciem totam rationum similium fungitur. Quis neget? At ratio, cuius consequens est vnitas, præ cæteris omnibus eiusdem speciei siue similibus rationibus nota est, & aperta. Ergo huiusmodi ratio reliquarum similium rationum denominator est. Minorem admittet quisquis obseruarit ea, quæ in expositione docui de denominatorum necessitate: & simul etiam attenderit terminos cuiusvis rationis, atque adeò eorum habitudinem eò nobis esse notiores, quo breuiores, ac simpliciores extiterint. Quis porrò numerus vnitate, aut minor; cum sit ipsum primum numeri cuiusvis elementum, aut simplicior; cum non tantùm composita non sit; sed etiam cuiuis compositioni adeo repugnet; vt eâ accedente destruatur. Secundò. Illa ratio est cæterarum similium rationum denominator: quæ earum omnium radix est, & elementum; ex cuius terminis repetitis, siue per eundem numerum multiplicatis constituüntur. At ratio, cuius consequens vnitas est, radix est & elementum reliquarum similium. Maior euidens est; nec de euidentia illi concedit minor. Cum enim minimi sint illi rationum similium termini, qui numeri primi sunt per propositionẽ 23 lib.7.elem.quos scilicet sola vnitas metitur iuxta Prop.10.lib.1.huius. Minimi sẽper erunt rationis termini, quoties cõsequens fuerit vnitas. Tunc enim sola vnitas seipsam persemet ipsam metiri potest; metietur autẽ antecedentẽ per ipsummet antecedentem; siquidẽ vnitas est pars numeri cuiusvis ab ipso numero denominata; quæ toties repetita, vel sibi addita, quoties numerus indicat, numerum ipsum constituit. Nec refert quod antecedens sit non rarò fractus numerus, vel integer cum fracto: vnitas enim sicut ad alium integrum numerum quemlibet: ita ad fractionis tam numeratorem, quam denominatorem prima semper est, & rationem, cuius ipsa consequens fuerit, in minimis terminis exhibet: rationem, inquam, non autem fractionem: quæ est antecedens rationis, idque obseruandum est: quod exemplo huiusmodi declaro. Data est ratio, cuius antecedens est A 15, & consequens B 12. Ea ad rationem, cuius consequens sit vnitas E: reuocatur si ex terminis A & B rationis, fiat fractus numerus C D; qui sit antecedens rationis cuius consequens est E; vt Propositione præcedente declaratum est: eáque ratio antecedentis fracti C D ad E:

A 15	C 15	F 5
	—	—
B 12	D 12	G 4
	E 1	E 1

consequentem, similis est rationi A B, quæ in minimis terminis exprimitur propter vnitatem E, quæ rationis illius consequens est: At verò antecedens C D fractus ad minimos terminos fractionis æqualis constitutus non est: erit enim fractio C D in minimis, si eius numerator C 15 reuocetur ad numeratorem 5, & denominator D 12 ad denominatorem 4: eáque fractio ex numeratore 5 & denominatore 4 constituta, cum æqualis sit fractioni C D, habebit eandem rationem ad consequentem E 1, quam habet ad eundem consequentem E 1 fractio ipsa C D terminis maioribus constans, vel alia quælibet fracto C D æqualis, maioribus adhuc quibuslibet terminis quàm C D, constituta: neque enim minùs in minimis terminis ratio illa, cuius consequens est vnitas, constituetur, quomodocúmque exprimatur eius antecedens; si ipse antecedens semper est æqualis. Quod si fractus ille numerus antecedentis munere fungens, ad minimos terminos etiam ipse reuocetur per Prop. 20. libri 2. vt reuerà debet reuocari; vt rationis denominator suis terminis exprimatur, vt mox sequenti argumento constabit, tunc ratio terminis constabit minimis non ipsa solùm, sed etiam pars vtraque, qua constituitur; eóque ex capite planiùs exponetur, & eius quantitas innotescet.

Tertiò probatur hæc Propositio. Tam veteres, quàm recentiores geometræ tanquam principium admiserunt (quanquam medio, quo demonstretur, vt paulò post exponam, omninò non careat, eóque nomine per se notum non sit) & refertur ab excellentissimo geometra R. P. Gregorio à sancto Vincentio lib. 8. quadraturæ circuli Principio 4. Rationis cuiusvis denominatorem haberi: si rationis antecedens per consequentem diuidatur. Sed per diuisionem antecedentis per consequentem habetur ratio similis priori; cuius consequens est vnitas. Ergo ex omnium geometrarum sententia rationis cuiusvis denominator est ratio similis, cuius consequens est vnitas. Minor probatur. Ex definitione diuisionis numeri per numerum allata lib. 1. Prop. 40. *Diuisio est inuestigatio numeri: qui eandem rationem habeat ad vnitatem; quam diuisus numerus habet ad diuidentem.* Hoc est, quam rationis antecedens, qui diuiditur; ad consequentem, per quem diuiditur antecedens. Cum ergo per diuisionem antecedentis per consequentem habeatur ratio priori similis; cuius consequens est vnitas; censeatur autem per hanc diuisionem denominator generari. Ratio positæ rationi similis, cuius consequens sit vnitas; est rationis positæ denominator iuxta citatum Principium. Quod, vt memini, probari haud ægrè potest hoc modo. Denominatoris officium est, vt habitudinem exponat, quam rationis cuiusvis antecedens habet ad consequentem. Sed numerus qui habetur diuiso antecedente per consequentem

ſequentem, habitudinem antecedentis ad conſequentem clariſſimè deſignat. Ergo ille numerus eſt denominator rationis. Probatur minor. Numerus, qui per diuiſionem antecedentis per conſequentem habetur, eandem habet habitudinem ad vnitatem iuxta diuiſionis definitionem; quam antecedens rationis habet ad conſequentem. Sed habitudo numeri cuiuſvis ad vnitatem apertior eſt, quàm numeri cuiuſvis ad alium numerum. Ergo numerus ex diuiſione antecedentis per conſequentem genitus, apertiſſimè deſignat habitudinem antecedentis ad conſequentem. Probatur minor. Numerus, vel integer eſt, vel fractus: ſi integer eſt, cum ex vnitate repetita componatur; ſitque propterea vnitas, pars numeri ab ipſo numero denominata, vt numeri 10 pars decima, eſt vnitas, non poteſt non eſſe clariſſima numeri cuiuſvis habitudo ad vnitatem: cum per ſe indicet quoties illam contineat. Si verò fractus fuerit numerus per diuiſionem genitus: non minùs aperta erit eius ad vnitatem habitudo; ſi modo minimis terminis exprimatur; tunc enim fractionis numerator per ſe exponit breuiſſimis terminis, hoc eſt, maximè notis, & apertis, quot partes denominatoris, ſiue vnitatis ipſius in tot partes diuiſæ, quot indicat denominator; fractus ipſe numerus contineat; vt fert cuiuſvis fractionis numeratoris officium; atque adeò ipſam fracti numeri demonſtret habitudinem ad vnitatem. Cum ergo denominator rationis cuiuſcúnque debeat antecedentis ad conſequentem habitudinem exponere: eámque exponat apertiſſimè numerus ex diuiſione antecedentis per conſequentem genitus, ſi velut antecedens ad vnitatem tanquam conſequentem comparetur: concludendum eſt, meritò aſſeri denominatorem rationis cuiuſlibet produci: ſi rationis antecedens per conſequentem diuidatur. Atque adeò veriſſimum eſſe; quod ex eo tanquam Principio geometrarum calculo, admiſſo colligebam hac tertia ratiocinatione: nimirum denominatorem rationis alicuius eſſe rationem ſimilem, cuius conſequens ſit vnitas; vt fert Propoſitio:

Scholium.

Etſi pluribus expoſita, pluribúſque demonſtrata ſit hæc Propoſitio: tanti tamen eſt momenti denominatorum ad rationes quaſlibet pertinentium abſoluta cognitio: vt illa, quantacúnque ſint, non tantùm operæ non pœnitendæ videri debeant; verum etiam operæ pretium, ſi alia quædam ad maiorem euidentiam conducentia adducantur. Quæ ratiocinationis ſeries vetuit afferri. Quæ in capita aliquot congero. Itaque.

Primò Ex dictis colligitur rationis cuiuſlibet denominatorem eſſe rationem eiuſdem cum ratione, quam denominat, ſpeciei; ab ea hoc tantùm nomine diuerſam; quod terminis antecedente & conſequente conſtet

ſtet omnium clariſſimis quoad nos, vt potè breuiſſimis, & notiſſimis, poſitâ ſcilicet vnitate in conſequentem; quâ nec breuior, nec notior dari poteſt. Qua ex cauſa, & quia etiam eius rationis termini, dum vel adduntur, vel per eundem numerum multiplicantur, rationum æqualium terminos generant: & ſunt omnium menſura; non immeritò à pleriſque rationis cuiuſvis denominator dicitur rationis quantitas. Cæterùm non minùs aptè, ſi quando res ferat, rationes ipſæ quibuſcúnque terminis expreſſæ, nullâ denominatoris factâ mentione, adhibentur: quam ſi denominator ipſe adhiberetur. Quod ex ipſo Euclide apertè conſtat. Dum libro 8. Prop. 5. aſſerit. *Planos numeros rationem inter ſe habere ex lateribus* (intellige, ex rationibus laterum) *compoſitam*. Cui ſimilis eſt Propoſitio 23. libri 6. ad quantitatem continuam pertinens. Vbi ait. *Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habere ex lateribus compoſitam.* Nec alius fuit geometrâ ſenſus dum lib. 6. Defin. 5. exponit, quænam ratio ex rationibus compoſita dici debeat. *Ratio*, inquit, *ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem.* Quam definitionem dum plerique interpretantur, aiunt Euclidem hîc per rationum quantitates, intelligere rationum denominatores: adeò vt velint ad hoc, vt ratio aliqua ex rationibus compoſita dicatur, vt ipſi rationum denominatores inter ſe multiplicati ipſam producant. Sed, vt rationem componi poſſe ex rationum multiplicatis denominatoribus concedam: tamen anguſtior eſt hîc ſenſus, & longè à geometræ ſenſu alienus; quem euidentiſſimè aperiunt citatæ duæ Propoſitiones 23 libri 6. & 5 libri 8. Vbi aſſerit. *Æquiangula parallelogramma; planos item numeros habere rationem compoſitam ex ipſorum lateribus inter ſe multiplicatis*: quæ latera ſunt rationum quantitates, ſiue termini antecedens & conſequens inter quos ratio intercedit. Neque verò alio ſenſu, definitionem, alio, citatas Propoſitiones; quæ non niſi ex ea definitione intelligi debent; concepiſſe cenſendus eſt geometra. Vult igitur vt, ſi duæ quælibet rationes A B, C D proponantur (tripla, & dupla) quarum

A 6	C 8	E 48
B 2	D 4	F 8
G 9	K 4	M 36
H 3	L 2	N 6

quantitates; quæ rationum materiale tantùm ſunt, inter ſe ducantur, vt A in C; vt fiat E: & B in D, vt fiat F: rationem E F dici compoſitam ex rationibus A B, & C D. Cui ſimilem fore aſſero, ſi aliæ duæ rationes prioribus æquales, vt G H, K L, rationem (vt M N) componant multiplicatis inter ſe tam antecedentibus G, k; quàm conſequentibus H, L. Vt ſuo loco demonſtrabitur inferiùs, vbi rationum multiplicatio tradetur. Hîc ſatis eſto primariam & ad rationum cognitionem aſſequendam maximè neceſſariam definitionem ab Euclide traditam; ex eius, veróque ſenſu expoſuiſſe.

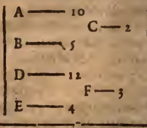
Secundò

Secundò. Obseruatione dignissimum est: quod minùs perpensum hac in rationum materiâ grauissimâ in caliginem teterrimam te inuoluat. Nimirum. Rationis cuiusvis denominatorem, etsi duobus terminis antecedente & consequente non possit non constare, quemadmodum qualibet alia ratio (ratio enim est, quilibet denominator ex dictis, & probatis superiùs) eius tamen consequentem exprimi non solere: quo fit, vt facilè non sine graui deceptione tibi persuadeas denominatores vnico absoluto numero constare. Vt rationis 10 ad 5, quæ dupla est, denominator satis euidenter exprimi videtur absoluto numero 2: quo significatur rationem 10 ad 5 esse duplam. Eodem modo denominator rationis 12 ad 9 videtur absolutus fractus numerus $1\frac{1}{3}$: qui rationem antecedentis 12 ad consequentē 9 ostendit esse sesqui-tertiam. Verùm longè aliter se res habet: ille enim rationis duplæ denominator 2; antecedens est rationis, cuius consequens est 1: similiter, rationis 12 ad 9 sesqui-tertiæ denominator $1\frac{1}{3}$, absolutus non est, sed velut antecedens ad vnitatem refertur, tanquam ad consequentem; & rationem cum ipsa vnitate constituit sesqui-tertiam, similem rationi 12 ad 9, 15 ad 10, 24 ad 16, & cæteris omnibus sesqui-tertiis rationibus: quarum omnium denominator est ratio antecedentis $1\frac{1}{3}$ ad 1 consequentem, vt explicatum est superiùs. Vnitas tamen illa consequentis vices gerens non exprimitur; sed tantùm connotatur, & apertissimè designatur ab ipso antecedente, quod satis est. Nam rationis cuiuscúnque, cuius consequens est vnitas, antecedens habitudinem, quam habet ad vnitatem velut consequentem, satis superque seipso demonstrat: est enim vnitas pars numeri (si integer est numerus) à numero ipso denominata; vt latere non possit eius habitudo ad vnitatem. Si verò fractus fuerit numerus, quales sunt omnes denominatores rationum minoris inæqualitatis, non minùs euidens est absque omni alia vnitatis designatione, eius ad vnitatem habitudo: dum fracti numeri denominator vnitatem in partes aliquot diuisam significat; numerator autem quot ex illis partibus assumantur, definiat. Nec res aliter habet, cum rationis denominator, numerus est integer cum fracto; quales esse contingit denominatores omnes maioris inæqualitatis, exceptâ solâ ratione multiplici. Quæ cum ita sint, patet rationis cuiusvis denominatorem aptissimè designari, expresso solo eius antecedente connotante vnitatem, quæ eius sit consequens. Atque ea vnitatis velut consequentis connotatio ad denominatoris constitutionem adeò necessaria est; vt ea amotâ nullum singulari cuilibet rationi denominatorem conuenire fatendum sit contra geometrarum sensum: apud quos, vbi de rationibus agitur, nulla de re quàm de rationum denomi-

10	12	1
2	1—	
5	9	3

natoribus crebrior habetur mentio. Sequela patet. Si enim proponatur ratio 10 ad 5, & afferatur eius denominator 2 abſolutus abſque omni antecedentis ad conſequentem vllum relatione, vel expreſſâ, vel connotatâ, quid ad rationem 10 ad 5 exponendam (quod eſt denominatoris munus) conferat? Ens ſcilicet relatiuum, qualis eſt duorum numerorum habitudo, ſiue ratio, ab ente abſoluto diuerſi generis menſurati, exponi, denominaríque poſſe quiſpiam non imperitus aliquando ſentiat?

Dicat fortaſſe quiſpiam rationem quamlibet ſingularem inter duas Quantitates, ſiue continui ſiue diſcreti generis non carere denominatore; qui & ipſe relatiuus ſit: ſed qui exprimi non poſſit niſi accedat altera ſingularis ratio ad quam prior comparetur: tunc autem haberi vtriúſque denominatorem, qui alioqui ratione vnâ ab altera ſeiunctâ euaneſceret, nec determinari poſſet. Vt, rationis A B duarum linearum, ſiue duorum numerorum, denominator aſſignari non poteſt. At ſi ratio A B ad alteram D E comparetur: tunc denominator C F habebitur: qui habitudinem harum duarum rationum A B, D E inter ſe collatarum exponat.



Hanc denominatoris acceptionem lib. 1. Prop. 2. Examinis quadraturæ longè longiùs reieci; nec immeritò. Hic enim, qui affertur rationum A B, D E denominator C F; eſt, vti aſſeritur, earum rationum inter ſe comparatarum denominator; qui earum habitudinem mutuam exponat vocetúrque, vt Prop. ſequenti declarabitur, denominator Proportionis harum duarum rationum: ſingularum verò abſolutè, & ſecundum ſe ſumptarum qui denominator eſſe poteſt? Dixeris fortaſſe poſt illam duarum rationum comparationem mutuam: earum proportionis denominatorem eſſe quidem C F: At tunc C eſſe denominatorem rationis A B; denominatorem verò alterius rationis D E, eſſe alterum quantitatem F. Verùm id ſi dixeris; dixeris, aut fallor, ad rem minùs aptè. Si enim rationis A B, vt ad alteram rationem D E confertur, denominator eſt C: cur idem C præcisâ & amotâ ratione D E, eiuſdem rationis A B abſolutè ſumptæ denominator non ſit? Quid enim rationi A B de nouo accidit ex illa ad rationem D E relatione ad eius abſolutam conſtitutionem neceſſarium? nunquid non ipſam integrè conſtitutam oportuit ante relationem omnem ad alteram, vt vera poſſit earum habitudo definiri? atque adeò ſuo frui denominatore, qui eius quantitatem exponat? Quod ſi ita eſt, caſus ille recurrit ſuperiùs reiectus; nimirum quantitatem C abſolutam ab omni ad alteram, ſiue expreſſam, ſiue connotatam, relatione non poſſe rationis A C menſuram eſſe, ſiue denominatorem, A quibus omnibus, & aliis quàm plurimis non leuioribus;

tibus; quæ hinc consequuntur, difficultatibus sese expediet, planámque assequetur rationum cognitionem quisquis verám agnouerit singularum rationum denominatoris notionem; ad quam necessarium esse demonstraui, vt sit quantitas relatiua ad vnitatem tanquam ad terminum, siue expressam, siue, quod satis est in rationibus discretæ quantitatis (in continua enim, vt dicetur, non est par ratio) connotatam, & ab ipso denominatore definitam, eo quo declaratum est, modo. Atque hoc in primis hac in rationum materia obseruatum accuratius oportuit caput. Alia quædam attingo.

Tertiò. Denominator rationis cuiuslibet, etsi sit, vt dictum est, eiusdem cum ratione, quam denominat, speciei: alio tamen denominatore à seipso diuerso non eget, vt explicetur. Cum enim totius speciei rationum omnium sit explicatissima, aut etiam, vt ita dicam explicantissima ratio; earúmque mensura; omnium proinde notissima est, suique mensura. Quod idem in rationibus continuæ quantitatis, si discrimen quoddam excipias, vt referam, verissimum est.

Quartò. Rationes omnes, quarum idem est denominator; quæ scilicet eiusdem sunt speciei: æquales potiùs, quàm similes dici debent. Omnis enim similitudo, etiam diuersitatem quandam, & in ente quanto inæqualitatem exigit: identitas alioqui, non similitudo foret. At in rationibus eiusdem speciei nulla secundum earum quantitatem inæqualitas potest obseruari. In quo rationum genus angulorum rectilineorum naturam sapere videtur. Nulli enim huiusmodi anguli similes, sed æquales dici possunt: esto latera, alia aliis productiora esse contingat. Ita omninò se rationes habent: vbi enim ratio quæpiam duobus suis terminis antecedente & consequente cuiusvis quantitatis constituta fuerit: etsi termini augeantur, vel minuantur; augeri tamen, vel minui rationem necesse non est. Quia tamen inter inæquales æqualis rationis terminos, ex eo quòd vterque ad seruandam rationis æqualitatem augeri simul minuive debeat; conuenientia quædam & similitudo obseruatur: ex ea terminorum similitudine rationes ipsæ æquales, etiam similes dici consueuêre. Quare rationum similitudinem, cum occurret, eo sensu interpretabere; vt earum æqualitatem concipias.

Quintò colligitur quo sensu dicatur ratio ratione altera maior vel minor. Vt cum Eucl. lib. 5. Prop. 8. ait *Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.* Proprietas hæc maioris, & minoris, à rationibus, cum ens quoddam quantitatiuum sint, abesse non potest. Dicitur ergo illa ratio maior, vel minor, quàm altera: cuius denominator maior, vel minor est alterius denominatore. Vt ratio A B

A 30 : C 12	B 10	D 6	
B 10	D 6	A 30	C 12
E 3	G 2	F 1	F 1
F 1	F 1	E 3	G 2
		H 1	H 1

maior est ratione C D, vt denotant denominatores E F, G F (hîc vnitatem F exprimo ad maiorem euidentiam) maior est enim E F quam G E. Contrà verò inuersis terminis, vt ex rationibus maioris inæqualitatis fiant rationes inæqualitatis minoris: ratio B A minor erit ratione D C. Quòd idem colligitur ex denominatoribus. Denominator enim rationis B A, est fractus numerus F E tanquam antecedens relatus ad consequentem H 1 vnitatem: qui minor est denominatore rationis D C, qui fracto numero F G. Antecedente & consequente H 1 constat. Docui porrò superiùs Prop. 3. quomodo cuiusvis datæ rationis denominator inueniatur si nimirum fiat vt consequens datæ rationis ad antecedentem; ita vnitas ad aliud? vt hîc. Si fiat vt B ad A; ita F 1 vnitas ad E 3: erit E connotans vnitatem F, vel eandem expressam assumens, denominator rationis A B. Eodem modo denominator rationis B A definietur, Si fiat vt A ad B; ita vnitas H 1 ad fractum numerum F E: erit siquidem fractus hîc numerus F E velut antecedens ad consequentem vnitatem H, vel expressam, vel connotatam, denominator rationis B A. Ex quibus planiùs concipias sensum citatæ elementorum propositionis.

Sextò. Quidquid hactenùs de ratione dictum est rationali; idem de irrationali tam maioris, quàm minoris inæqualitatis dici potest. Vt si

A γ 10	A γ 10	B 5	B 5
B 5	B 5	A γ 10	A γ 10
	C 1		C 1

detur ratio A B, cuius antecedens A est radix quadrata surda numeri 10, consequens verò est B. Denominator eius erit fractus numerus A B connotans vel assumés expressam vnitaté C pro consequente. Similiter, rationis B A (inuersis prioris A B terminis) denominator erit fractus numerus B A, velut antecedens cuius consequens sit, vel connotata, vel expressa vnitas C. Eodem porrò modo habetur denominator huiusmodi; qui adhibetur in rationali ratione. Vel enim diuiditur antecedens A γ 10 per consequentem B 5 & ita habetur denominator, fractus numerus A B connotans vnitatem, iuxta principium superius expositum. Vel fit iuxta Propositionem 5 vt consequens B 5 ad antecedentem A γ 10; ita vnitas C ad fractum A B, qui sit denominatoris antecedens. Neque hîc etiam omittendum est terminos huiusmodi rationum irrationalium ad minimos reduci debere, si minimi non sint, vt apertior fiat eorum habitudo. Vt in dato exemplo reduci possunt termini A γ 10 & B 5 ad alios eandem rationem irrationalem obseruantes: quales sunt γ 2, & γ 5, vt Algebrica surdorum

dorum reductio exigit. Est enim eadem ratio A γ 10 ad B 5, quæ A γ 10 ad B γ 25: at hæc ad minimos reducta, est A γ 2 ad B γ 5.

Septimò ac vltimò obseruandum venit, ea omnia, quæ de rationibus discretæ quantitatis dicta sunt, non minùs aptè de continuæ rationibus dici posse. Eandem enim in varia genera, & species diuisionem sortiuntur: nec suis carent, quibus explicentur denominatoribus. Quod hîc obiter exponendum est; vt ea etiam, quæ deinceps exponenda sunt circa numerorum rationes, ad continuam quantitatem applicari possint, cum non mediocriter ampliore, quod ex hoc tractatu percipietur, emolumento. Habent itaque rationes continuæ quantitatis cuiuscuñque generis denominatores suos: sed qui, quocunque in genere assignari non debeant. Cum enim denominator debeat ex officio notissimus esse ac simplicissimus: haud quaquam in solidæ quantitatis genere, quod ex triplici dimensione constat, & maximè compositum est, reperiri potest: Nec in secundo propter eandem rationem debet assignari: longitudo enim & latitudo, quibus quælibet superficies constituitur, superficiei ad superficiem habitudinem obscuram reddunt. Quare in primo quantitatis genere, siue in lineis; quæ sola longitudine gaudent, definiendus est duarum quarumlibet quantitatum denominator. Et quidem in rectis lineis. Lineæ enim curuæ cum multiplices sint, variæque descriptionis; nec suam, nec reliquarum quantitatum mutuam habitudinem explicandi capaces sunt. Rectæ verò lineæ, cum eiusdem naturæ sint omnes: cum simplicissimæ: cum adeo notæ, & obuiæ, nullum vt agens omni cognitione, sensúque etiam destitutum secundum eas virtutem non effundat, & obeat actiones: omnem rationum, quæ inter solida, & inter superficies intercedunt; habitudinem exponunt aptissimè. Ita denominator rationis, quæ inter planam figuram & aliam similem intercedit; est duplex recta linea, quarum altera ad alteram rationem habet duplicatam lateris vnius figuræ ad alterius figuræ latus homologum. At rationis solidi ad solidum simile denominator, sunt duæ item rectæ lineæ: quarum ratio est triplicata lateris vnius ad latus alterum correspondens. Pari modo denominator rationis duarum linearum diuersæ speciei, vt circuli circumferentiæ ad diametrum non nisi duabus rectis lineis exhibetur. Et ita rationum omnium inter quantitates continuas denominator erunt semper duæ rectæ lineæ eandem seruantes inter se habitudinem, quam propositæ duæ quantitates. Non probatur hæc mea sententia R. Patri Aynscom in Expositione quadraturarum circuli R. P. Gregorij à S. Vincentio. cap. 6. parte 1. num. 2. vbi asserit non minùs notos esse denominatores rationum ad superficies, & solida pertinentes; si superficiebus, & solidis ipsis exprimantur: quam si lineis rectis exprimerentur, vt exprimi debere asserueram lib. 1. Examinis quadraturæ Prop. 2. Par. 2ª Assert. 3. sed immeritò, non probari vi-

detur propter rationes à me tum illic, tum hîc allatas, & ab ipsomet relatas: quarum non leue momentum censebis, si attenderis, vt monui, nec ipse abnuit; denominatores esse debere rationes maximè notas, & terminis expressas notissimis, notissimis, inquam, quoad nos: esto quoad se æque sint notæ rationes superficiebus ac solidis designatæ. Quo statuto denominatorum munere, quis mecum non sentiat ipsos penes rectas lineas attendi debere; vt pote simpliciores, ac nobis notiores; quam sint superficies & corpora? quis non dignoscat facilius lineam rectam alterius lineæ rectæ esse duplam: quam quadratum à diametro quadrati descriptum, duplum esse quadrati super latere descripti? Et verò, ne multa ad rem clarissimam probandam congeram, quis geometrarum, ne ipso quidem excepto, rationes superficierum & solidorum, rectis lineis non exprimit? Insigne porrò inter continuæ quantitatis & discretæ denominatores discrimen reperitur. Nam in discretâ, denominatoris consequens statuitur vnitas, vt scilicet habeatur omnium rationum eiusdem speciei notissima. At in continua quantitate nulla est huiusmodi ratio vnica, & cæterarum rationum similium radix determinata: sed duæ quælibet rectæ lineæ: quarum eadem sit habitudo, quæ est habitudo duarum quantitatum propositarum; denominatoris munere fungi possunt. discriminis ratio est. Quia in continua quantitate non est aliqua recta linea prima; ex qua reliquæ rectæ lineæ constituantur: & ad quam referri possint; vt in discreta, vnitas est numerorum omnium primum elementum; quæque pars est eorum ab ipsis singulis denominata, & definita. Vnde aliud discrimen priore non minus insigne proficiscitur huiusmodi. Denominator rationis duorum numerorum, etsi ratio eorum rationi, vt declaratum est, similis sit; atque adeò & antecedente constet & consequente: consequens tamen non necessario exprimitur; sed tantùm connotatur ab antecedente, & apertè designatur: est enim vnitas pars ipsius antecedentis ab ipsomet antecedente denominata, & significata. At denominator rationis inter duas quantitates continuas, tam antecedentem, quàm consequentem suum necessariò exprimi desiderat: neque enim vlla recta linea antecedentis vices gerens, alteram determinatam, ex qua componatur, continet, eámque ita exponit, vt innotescat, soláque connotatio sufficiat. Cæterum vtriusque quantitatis denominatores in eo conueniunt: vt sibi ipsis denominatores sint; nec aliis quibus exponantur, egeant: supponuntur enim in eadem specie rationes notissimæ. Nec refert, quod ratio continuæ quantitatis varios denominatores sortiri possit: dum duæ quælibet rectæ lineæ eandem rationem seruantes; siue maiores fuerint, siue minores, denominatoris munere fungi possunt. Omnes enim rationes huiusmodi æqualis sunt euidentiæ, & æqualem rationes denominatas exponendi facultatem habent. Sed de denominatoribus nunc satis.

PROP. V. *Definit.*

Proportio eſt duarum quarumlibet rationum habitudo, ſiue ratio.

Expoſitio.

Hic proportionem genericè ſumptam, & ad diſſimiles æquè ac ad ſimiles rationes pertinentem definio: vt non mirere, ſi hæc cum Euclidiana Proportionis definitione lib. 5. defin. 4. propoſitâ non omninò conueniat: vbi ita geometra. *Proportio eſt rationum ſimilitudo* hoc eſt, habitudo duarum ſimilium rationum. Verùm nunquid inter duas rationes diſſimiles, vt inter duplam & triplam, habitudo quædam non intercedit? cur tamen hoc ſolum proportionis genus duabus rationibus ſimilibus conueniens omiſsâ vniuerſaliori definitione expoſuerit (neque enim abſque conſilio, nullatenùs ſanè ex omiſſione, aut ignoratione id ita à geometra commiſſum cenſeri debet) cauſa inferiùs afferetur commodiùs poſt apertiorem proportionum declarationem.

Cum itaque ratio quælibet duarum quantitatum, quantitas quædam ſit: quam cum alia eius generis quantitate tanquam cum rationis conſequente conferre nihil vetat: nihil vtique vetabit; quò minùs ex ea collatione relatio naſcatur: qua earum duarum rationum, quæcunque tandem fuerint, habitudo explicetur, non ſecùs ac duarum ſimplicium quantitatum inter ſe collatarum habitudo cernitur; dicitur verò hæc duarum rationum habitudo, proportio, ſiue analogia; quia vna ratio cum ratione altera comparatur, & ad eam refertur: ex qua collatione, nomen ipſum analogiæ ad ipſam habitudinem rationum deſignandam applicatum eſt.

Eſt ergo proportio duarum quarumlibet rationum ratio. Ac proinde tot proportionum, quot rationum ſimplicium genera diſtinguentur: nec ſuo etiam denominatore vlla proportio caritura eſt; vt eo non caret ſimplex vlla ratio. Quare proportionum alia eſt rationalis, alia irrationalis. Irrationalium aliæ maioris inæqualitatis minoris inæqualitatis aliæ. Rationalium verò quædam æqualitatis; quædam etiam inæqualitatis tam maioris, quàm minoris: cuius vtriúſque generis, quinque ſpecies diſtinguentur; vt ſuperiùs diſtinctæ fuêre. Quibus ſingulis ſuus competet denominator: vt vno aut altero paradigmate expono.

Eſto ratio A B ſextupla: cuius denominator (etiam expreſsâ, nec tantùm connotatâ vnitate) eſt C D: ſit autem alia ratio E F tripla; cuius proinde

A 24	C 6				
B 4	D 1	C 6		H 2	
			vel		
E 15	G 3	G 3	—	K 1	
F 5	D 1				

proinde denominator est G D. Habent hæ duæ rationes quandam habitudinem inter se: cuius expositio est penes denominatores C D, G D; & ex eis pendi debet. Cum ergo eorum denominatorũ consequens idem sit, nempe vnitas D: quarum autem rationum idem est consequens, eæ ita se habent inter se, vt se habent inter se antecedentes, vt Prop. 10. ostendetur: ita se habebit denominator C D ad denominatorem G D; atque adeò ratio A B ad rationem E F, vt C ad G: eáque ratio C G exprimet habitudinem rationis A B ad rationem E F, hoc est, earum proportionem: eritque ratio C G, si eius consequens G 3 mutetur iuxta superiùs declaratam methodum, in vnitatem, vt fiat ratio H k; denominator proportionis, quam habet ratio A B, velut antecedens; ad rationem E F, velut ad consequentem: qui in hoc exemplo indicabit priorem ad posteriorem habere proportionem duplam.

Sunto rursùs duæ rationes A B, & E F diuersi generis. Sit nimirum prior maioris inæqualitatis; posterior autem inæqualitatis minoris. Rationis A B denominator est fractus numerus C vnitatem connotans: denominator autem rationis E F est fractus numerus G connotans & ipse vnitatem non expressam. Qui denominator vterque C & G habetur diuisis antecedentibus A & E per consequentes B & F, vt ex probatione tertia Propositionis 4. antecedentis patet: diuisio autem hæc absoluitur constitutis

A 24	24				
	C —				
B 5	5				
		H 360		L 18	
		—	vel	—	
		K 20	—	M 1	
E 4	4				
	G —				
F 15	15				

fractis numeris C & G ex terminis A B, & E F. Erit ergo habitudo fracti numeri C velut antecedentis ad fractum numerum G tanquam consequentem ratio rationum A B, E F: quæ proportio dicitur: hæc demùm proportio siue ratio antecedentis C ad consequentem G suo non caret denominatore, quo exponatur. Qui reperietur diuiso antecedente C fracto numero per consequentem fractum numerum G iuxta Propositionem 25. libri 2. huius. Per quam diuisionem habetur fractus numerus H K. Hic ergo connotans vnitatem denominator est rationis C ad G: qui ad minimos terminos reductus per Prop. 20. lib. 2. exhibet fractum L M sibi æqualem. Atque hîc tandem numerus L M tanquam antecedens ad connotatam

notatam vnitatem, velut consequentem apertè declarat denominatoris officio fungens quænam sit ratio, siue proportio antecedentis C ad consequentem G: ac demùm quam habeant inter se habitudinem duæ rationes propositæ A B, E F demonstrat; quæ est octodecupla; ita vt ratio A B contineat rationem E F octies decies, sicut fractus numerus L M (qui in hoc casu est ipse integer numerus L) continet vnitatem connotatam, octies decies. Habes ergo, vt ratio C G dicatur proportio duarum rationum A B, E F inæqualium, speciéique diuersæ. Ecce vt se res habeat in æqualibus rationibus.

Proponuntur rationes A B, E F similes, siue, vt superiùs in scholio Propositionis 4. num.4. monui, æquales. Denominator rationis A B est C, qui habetur diuiso antecedente A per B denominator autem rationis E F eodem modo inuentus, est G æqualis priori C ex suppositione rationum similium. Ratio ergo antecedentis C ad consequentem G ostendens habitudinem duarum rationum A B, E F; dici debet iuxta hanc definitionem, proportio: eiúsque rationis, siue proportionis denominator, inuentus diuiso antecedente C per consequentem G, erit H 1 antecedens ad vnitatem K 1, siue expressam, siue connotatam tanquam consequentem. Quæ ratio H K vnitatis ad vnitatem est denominator omnium proportionum ad duas quaslibet rationes similes pertinentium.

A 16, B 4 } C 4
E 12, F 3 } G 4
C 4, G 4 } H 1, K 1

Scholium.

Habes itaque quid in vniuersum dicatur proportio. Quam in varia subalterna genera diuidere liceat: & primò quidem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis: non secùs ac rationum genus diuisum est in rationem æqualitalis & inæqualitatis. Quemadmodum enim si duabus quantitatibus eiusdem generis propositis, earum vna velut antecedens, ad alteram vt consequentem referatur, ratio creatur, cuius duæ illæ quantitates secundum se sumptæ, omni relatione præcisâ, materia tantùm sunt ad generandam rationem apta: Ita duæ iam constitutæ rationes, cum eiusdem generis sint, materia tantùm sunt generandæ proportioni idonea: quam generari necesse est, vbi vnam ad alteram comparari contigerit. Quare si rationes sunt æquales, aliam, quàm æqualem Proportionem fundare non possunt: qualis habetur in superiori postremo schemate, nec interest vtra ad alteram referatur. Eam autem Euclides supra citatus definiens ait esse rationum similitudinem; æqualitatē non minus aptè dixisset, si ipsæ solæ duæ rationes in abstracto conside-

VV

rentur; quarum quantitas, nec augetur nec minuitur; siue augeantur, siue minuantur quanta rationes fundantia, modò eandem habitudinem retineant. At verò in concreto sumptæ duæ rationes, cum ex iis quanta, non æqualia, sed tantùm similia denominari possint. Vt effigies duæ corporis eiusdem humani, vna sexpedalis, pedalis altera; quarum membra singula, tùm inter se, tùm ad totum corpus eandem habent rationem: non æquales ex æqualibus seruatis rationibus, sed similes dici debent: ideo geometra proportionem, duarum rationum similitudinem potius quàm æqualitatem asseruit esse. Vbi obserues genericum proportionis nomen rationum tantùm similium habitudini ab eo fuisse addictum, vt suprà attigi, súmque inferiùs causam allaturus: Cæterùm ad proportionum species distinguendas dicetur proportio duarum æqualium rationum esse earum similitudo, siue æqualitas, proportio autem rationum duarum inæqualium dicetur earum dissimilitudo siue inæqualitas: qualis est proportio rationum duobus prioribus exemplis exposita: quæ quidem vtraque maioris est inæqualitatis: conuertetur autem facilè in proportionem minoris inæqualitatis: si ratio antecedens, consequentis vices subeat & contrà.

PROP. VI. *Definit.*

Proportionalitas est duarum quarumlibet proportionum ratio.

Expositio.

Sicut proportio est duarum rationum, aut æqualium, aut inæqualium, ratio, siue habitudo: ita si duæ quæcunque proportiones inter se comparentur; ita vt vna ad alteram referatur, velut antecedens ad consequentem; ex ea comparatione nascetur quædam ratio, explicans duarum illarum proportionum habitudinem: quæ ratio, dici consueuit proportionalitas. Proportionalitas ergo, cum duas proportiones, quæ mutuò comparentur, exigat: quælibet autem proportio non nisi per duas rationes constitui possit: quarum singulæ duobus etiam terminis constare debent. Hinc fit vt proportionalitas quælibet ex simplicibus terminis octo formalibus necessariò constet; licet paucioribus materialibus interdum constitui contingat, dum eorum aliqui duorum vices sustinent consequentis scilicet rationis prioris; & posterioris rationis, antecedentis. En itaque vt se habeat proportionalitatis generatio: quam ex duobus dissimilibus proportionibus proximâ Propositione 5. allatis compono. Duarum rationum

A 24
B 4 } H 2
— } K 1
E 15
F 5
—
G 24 } H 2
N 5 } — L 18
— } L 18
P 4 } M 1
Q 15

rationum A B, E F proportio expressa est denominatore H k; quo ostenditur rationem A B ad rationem E F habere proportionem duplam. Duarum verò rationum G N, P Q proportionis denominator inuentus est L M quo ostenditur rationem G N ad rationem P Q habere proportionem octodecuplam. Iam si proportio H K ad proportionem L M conferatur: habebitur duarum illarum proportionum habitudo, siue ratio, quæ proportionalitas dicitur: cuius denominator erit fractus numerus H L vnitatem connotans velut consequentem more denominatorum solito.

Habetur autem hîc proportionalitatis denominator H L, diuiso antecedente H K per consequentem L M. vt rationum quarumlibet, atque adeo proportionum (quæ rationes ipsæ sunt) denominatores inueniuntur. Atque ita eadem est ratio fracti numeri H L ad vnitatem: quæ est proportionis H K ad proportionem L M. Sed ratio fracti numeri H L ad vnitatem eadem est, quæ illius numeratoris H 2 ad denominatorem suum L 18 per Prop. 12. lib. 2. vel, factâ ad minimos terminos reductione, quæ est 1 ad 9. Ergo proportionalitas siue habitudo duarum proportionum H K, L M, est sub-noncupla: qualis est ratio antecedentis 1 ad consequentem 9. Habes igitur quid proportionalitas vocetur, quomodo generetur, quisve sit eius denominator.

Scholium.

Hîc primò obseruandum venit duas proportionalitates inter se collatas non minùs aptas esse ad rationem nouam generandum; quæ ipsarum habitudinem demonstret; quàm duas proportiones ad proportionalitatem constituendum. Noua autem hæc proportionalitatum duarum ratio terminos sedecim simplices exigeret, singulis nimirum proportionalitatibus terminos octo postulantibus. Atque ita in infinitum creari possent rationes nouæ ex præcedentium duarum comparatione; eæque terminos simplices duplò semper plures ad sui constitutionem obtinerent. Ita cernis ad simplicem rationem, duarum quantitatum concursum necessarium esse: tum ad rationem duarum rationum, siue proportionem quatuor terminos exigi: & octo ad proporrionalitatem; ad proportionalitatum duarum rationem sedecim: & ita deinceps in infinitum.

Secundò ex dictis obserua. Ex nota antecedentis cuiusvis ad conse-

quentem ratione colligi non posse cognitionem eorum: at si alteruter horum terminorum notus fuerit, siue antecedens, siue consequens; alter perinde notus euadit. Esto primùm ratio simplex A B; cuius denominator est C D indicans rationem A ad B esse sextuplam. Quia ergo denominator C D conuenit toti speciei rationis sextuplæ; & positis quibuslibet terminis sextuplā rationem seruantibus, æquè potest eorum habitudinem indicare: patet nullos terminos singulares ab eo denominatore C D indicari posse. At si aliunde alteruter, aut A, aut B notus sit; patet etiam vtrumque notum esse, ac definitum.

A 24	C 6		
B 4	D 1	C 6	S 2
		vel	
E 15	R 3	R 3	T 1
F 5	D 1		

Similiter. Nota est duarum rationum A B, E F proportio ex vtriúsque denominatoribus C D, R D: ex quibus deriuatur proportionis earum denominator S T: qui indicat proportionem rationis A B ad rationem E F esse duplam. Non potest idem denominator S T, cum omnes proportiones duplas denominet, vllam certam certis duabus rationibus congruentem designare: æquè enim proportio rationis 32 ad 4 octuplæ ad rationem quadruplam antecedentis 20 ad 5 consequentem, dupla est, & eodem denominatore S T gaudet: ac proportio rationis A B sextuplæ ad rationem E F triplam collatæ. Atque ita de infinitis aliis proportionibus duplis duarum rationum diuersissimi generis, quibus idem denominator S T semper conueniet. Quare quî fieri potest, vt certam vnam vnius speciei rationem singularem designet idem denominator ad omnes (nulla enim est ratio, quæ alterius esse non possit, aut dupla, aut sub-dupla) designandas aptus, & indifferens. At vbi altera duarum rationum siue antecedens, siue consequens, proportionem duplam constituentium nota fuerit; altera latere non potest. Vt si in superiori schemate ratio A B antecedens proportionis duplæ supponatur sextupla: haud dubium quin altera E F consequens proportionis, debeat esse tripla: vt scilicet proportio prioris rationis sextuplæ ad posteriorem rationem dupla esse possit. Neque tamen ex ea cognitione speciei duarum rationum, A B sextuplæ, & E F triplæ, neque ex cognitione earumdem proportionis duplæ, colligi quidquam potest, quo ipsarum rationum A B, E F termini singuli innotescant. Nam, vt paulò ante ostendi, ex nota ratione quantitas terminorum colligi non potest. Imò, nec si alterutrius rationis, vt A B, termini A 24, & B 4 cognoscantur; perinde cognoscentur termini E 15, F 5, rationis alterius E F: cum eorum loco alij quicunque rationem triplam seruantes substitui possint, vt 21,7:30,10 &c. quarum omnium rationū triplarum, ratio A B absque omni terminorum eius mutatione, dupla semper erit. Quod autem hactenus de ratione simplici duarum quantitatum; quod

quod de proportione duarum rationum ostensum est: idem de proportionalitate duarum proportionum debet intelligi: idem de duarum proportionalitatum ratione, & de reliquis rationum priorum rationibus deinceps in infinitum. Nec vllum discrimen subit rationum contemplatio, siue earum termini sint quantitates simplices; siue denominatores rationũ ex aliis rationibus præcedentibus genitarum: cuiusmodi, sunt proportionum, proportionalitatum, & vlteriorum quarumlibet rationum denominatores. Sicut enim rationis inter duas simplices quantitates denominator sunt ipsæ quantitates; nec alio eget apertiore denominatore; quo exponatur si presertim eò reuocati fuerint eius rationis termini, vt consequens sit vnitas, vel expressa, vel tantùm connotata: ita rationis ex aliarum rationum positione genitæ, vt proportionis, & proportionalitatis, cæterarúmque deinceps, denominator habetur tanquam simplicium quantitatum; eodémque modo accipi debet. Quod enim denominatores sint vel rationis simplicium terminorum quantitatis; vel rationis ex aliarum rationum habitudine enascentis; cum id materiale rationum tantùm sit; nihil discriminis in ipsas formales rationes inuehit vnáque omnes eidémque contemplationi subiacent. Ecce enim in superiori paradigmate hîc repetito: rationis A B inter duas simplices quantitates A & B intercedentis denominator est C D; sicut R D denominator est rationis E F simplicium quantitatum E & F: proportionis autem inter duas rationes A B & E F denominator est S T: qui eodem iure, proportionem inter duas rationes A B, E F denominandi munere fungitur; dum illam huius esse duplam significat: quo denominator C D rationem A B denominat sextuplam, & exponit terminum A simplicis quantitatis sextuplum esse termini B simplicis quantitatis. Denominatores enim tam C D, quam S T, & cæteri omnes abstrahunt ab ipsis, quas denominant, quantitatibus, siue quantitates fuerint simplices siue proportiones, siue proportionalitates aut proportionalitatum rationes: eodémque modo habitudinem inter terminos quarumcunque quantitatum, siue absolutæ sint, siue ad alias comparatæ, exponunt. Quæ omnia eò à me declarata scito; vt noris rationum rationes à primis terminis simplicibus longiùs promotas; eorúmque numerosissimam multitudinem exigentes, eâdem qua primam ipsam & immediatam rationem duarum quantitatum, facilitate tractari ac innotescere, nec vllum ex illa rationum sese consequentium multiplicitate in postremam negotium grauius proficisci easdémque iisdem legibus additionis, subtractionis &c. Subiacere.

A 24	C 6	S 2
B 4	D 1	
E 15	R 3	T 1
F 5	D 1	

Tertiò ex dictis planum fit, quando rationes à primis terminis longiùs distant, cuiusmodi sunt proportiones, proportionalitates &c. non posse ex earum cognitione in primorum ipsorum terminorum, qui sunt simplices quantitates, cognitionem deueniri. Ostensum siquidem est denominatorem S T proportionis rationum A B, & E F indicare quidem rationem A B duplam esse rationis E F; nihil tamen minùs declarat, quàm harum duarum rationum alterutrius, aut vtriúsque speciem: & verò, vt supra memini, nulla est ratio, quæ alterius rationis dupla non sit; atque adeò earum proportioni idem denominator S T non conueniat. Rursus, supposità cognitione speciei rationis illius, quæ proportionis duplæ antecedens est: sit nimirum ratio sextupla, cuius denominator est C D, Habebitur quidem cognitio denominatoris rationis illius, quæ proportionis consequens est erit enim necessariò denominator rationis triplæ, qualis est denominator R D: vt scilicet denominator C D rationis sextuplæ, velut antecedẽtis, proportionis triplus sit denominatoris rationis, quæ eiusdem proportionis consequens est. At verò ex iis denominatoribus C D, R D nequaquam noti euadere possunt ipsarum rationum A B sextuplæ & E F triplæ, termini, siue quantitates quibuscumque enim terminis exprimantur rationes sextupla, & tripla; iis denominatores iidem C D, R D semper conuenient; eorum quippe munus tantùm est rationes, non rationum terminos, eorúmque quantitates exhibere.

A 24 }	C 6	
B 4 }	D 1 }	S 2
		T 1
E 15 }	R 3 }	
F 5 }	D 1	

Quartò. Cum rationes similes sunt, siue, quod idem est, æquales: earum proportio, hoc est, ratio, earum exhibens habitudinem, æqualitatis est: cuius denominator est vnitas tanquam antecedens, vnitatem tanquam consequentem, vel connotatam, vel expressam nacta, vt ex dictis patet. Hinc fit, vt non detur earum proportionalitas à proportione diuersa, adeóque in proportione sistatur: dum earum habitudo inuestigatur. Ecce duæ rationes A B, E F similes sunt, sunt scilicet sextuplæ. Denominatores earum sunt C D, R D æquales. Ergo C R est earum rationum proportio: cuius denominator siue proportionalitas est S T, vnitas scilicet S antecedens ad consequentem vnitatem T comparatæ. Sed denominatoris C D, qui ad proportionem pertinet, termini C & D ad minimos terminos reuocati, sunt etiam S & T: qui proportionalitatem constituebant. Ergo tam proportionis; quam proportionalitatis idem est denominator: cum

A 24	C 6		
B 4	D 1	C 6	S 1
	vel	*vel*	
E 30	R 6	R 6	T 1
F 5	D 1		

rationes

rationes similes sunt : adeóque vltra proportionem ipsam in huiusmodi rationum similium genere nihil superest vlterius definiendum. Quod idem in similibus proportionibus respectu proportionalitatis earum obseruandum est : eodem enim modo se habent duæ similes proportiones erga proportionalitatem ; quemadmodum duæ rationes erga proportionem : censérique possunt duæ proportiones tanquam rationes simplices; quarum proportio earum habitudinem exprimens , est ea ratio , quæ proportionalitas dicebatur , dum ad duas radicales rationes referretur.

Quintò ex dictis hactenùs : quæ quantitatum inter se comparatarum habitudines siue rationes , & ex eis manantes facultates in lucem satis apertam educere videntur : illius , cuius memini superiùs , quæstionis solutio fortasse pateat : quam nemo non iure proponat. Cur scilicet geometriæ parens Euclides , illius proportionis , quæ inter duas æquales rationes intercedit , omissis reliquis ; mentionem fecerit ? cur , quod maiorem concitet admirationem , proportionis notionem , quæ generica est, & duabus rationibus tam similibus quàm dissimilibus æque conuenit, vt ex annotatis constat , solis similibus rationibus , quasi dissimilium nulla esset proportio , addicat : dum definitione 4. lib. 5. ait. *Proportionem esse rationum similitudinem.* Definitione autem eiusdem libri 5. septimâ ait eas magnitudines proportionales vocari ; quæ eandem habent rationem. Cui subscripsêre deinceps omnes (si vnum exceperis Gregorium à sancto Vincentio celeberrimum geometriæ lumen) geometriæ cultores ; etsi tam ipsi , quàm ille maiores rationes cum minoribus non raro contulerint ; atque adeò earum mutuam habitudinem quandam , quæ non nisi proportio aut , nisi mauis, improportio specificè dici potest , agnouerint. vt eorum probant illustria monumenta.

Huic quæstioni quid respondendum censeas ? An quia sola rationum æqualium habitudo , siue proportio , eò quod sit quædam æqualitatis ratio , in ipsa prima statim rationum in varias species distributione speciem constituat absolutam , & completam ; dum alterum ei ex æquo respondens rationum inæqualium genus in varias species subalternas distinguitur ? Nam in superparticularem , superpartientem &c. item in alias quinque inæqualitatis minoris sub-particularem , sub-partientem , submultiplicem &c. de quibus Propositione 2. superiori diuiditur : quarum etiam singulæ rursùs in alias inferiores innumeras distribuuntur. Quo fit, vt illa rationum æqualium ratio , siue proportio, vt maximè simplex,vt præ cæteris nota , ad rerum mathematicarum cognitionem assequendam instrumentum sit aptissimum ; quo nullus vnquam non vsus est geometra. Mirum proinde videri non debet ; si tam Euclides , quàm eius alumni, geometriæ abundè consultum censuerint : si eius solius , quæ inter rationes similes habitudo reperitur , mentionem facerent : eique soli

rationum

rationum similitudini, siue æqualitati, proportionis, aut analogiæ nomen assererent; eam definirent, exponerent, demonstrarent: illam autem, quæ ex inæqualitate duarum rationum consequitur habitudo quam specifico nomine dissimilitudinem duarum rationum, disproportionem, aut improportionem rectè nuncupaueris, etsi non omiserunt, perpauca tamen de ea tradiderunt; plura sanè traditurі, qui ad nobilem matheseos facultatem excolendam, dum omnes tam veterum syntheseos, quàm analyseos posterorum, recessus tanta cum sagacitate perscrutati sunt; à se desiderari passi sunt nihil: si quid vel emolumenti, vel oblectamenti ex rationum huiusmodi dissimilitudinis contemplatione haurire potuissent. Quidquid porrò haurire licuit, in eo versatur totum, vt vnam quidem rationem alterâ vel maiorem vel minorem non rarò ostenderint; de maioritatis verò aut minoritatis specie, quid effarentur, nihil eis occurrit aliud, quam ex dissimili similem rationem interdum colligendi modus. Hæc cum sit rationum dissimilium causa; non immeritò geometræ plerique omnes & proportionis nomen, quod aliàs æquè dissimilibus ac similibus rationibus conueniret, rationum tantùm similitudini imposuerunt: & curam omnem ad hanc solam excolendam non mediocri cum operæ pretio conuerterunt.

PROP. VII. *Definit.*

Proportionales numeri sunt; qui eandem habent inter se rationem,

VEL

Proportionales numeri sunt; cum primus secundi æque multiplex est, aut eadem pars, aut eædem partes; ac tertius quarti.

Expositio.

Prior definitio est eadem cum definitione 7. libri 5. Euclidis quam licet de solis quantitatibus continuis tradere videatur: generalis tamen est; & ad discretam quantitatem æquè conuenit. Licet enim lib. 7. definit. 20. alteram proposuerit solis numeris congruentem; quæ est secundo loco hîc allata; non tamen ideò proponit, quod in priori non contineatur: sed quia cum numeros iam ad inuicem contulisset defin. 3. 4. & 5. eiusdem libri 7. numeri partem, partes, & eius multiplicem definiens: ex eis planiorem futuram iure censuit proportionalium numerorum definitionem:

tionem: ex qua singulares numerorum facultates faciliùs demonstraret; quàm si generalem illam vtrique quantitati communem definitionem adhiberet. Quod non in hac solùm definitione ab eo præstitum licet obseruare; sed in pluribus, ne dicam omnibus, libri 5. Propositionibus: quas etsi demonstrationibus stabilierit, quæ tam discretæ quam continuæ quantitati conueniunt; earum tamen quàm plurimas peculiari probatione, quam propria numerorum principia principiis communibus de more notiora, expeditiorem, clariorémque suggerebant, confirmauit. Quanquam verò hac definitione, qua numeri proportionales dicuntur; cum rationis vtriúsque antecedens consequentis est aut æquè multiplex, aut eadem pars, aut eædem partes; omnes rationum species enarratæ contineri minimè videantur: eâ tamen, si rectè perpendatur, omnes contineri comperientur. Nam primò quidem omnes minoris inæqualitatis rationes, certum est memorari. Dum partis (ecce sub-particulares) & partium (ecce sub-partientes) mentio fit. Dum verò æquè multiplex antecedens vterque vtriúsque consequentis dicitur: non tantùm propriè dictus multiplex, cum scilicet antecedens sæpiùs continet consequentem; intelligitur; sed etiam cum semel tantùm, eíque est æqualis; quo fit, vt æqualibus rationibus constantes numeri ab hac definitione non excludantur. Sesqui-particulares autem; & superpartientes: item multiplices sesqui-particulares, & multiplices super-partientes; cum componantur ex multiplici cum parte, vel ex multiplici cum partibus; satis constat, etsi verbis tam expressis non designentur, eadem definitione comprehendi: quam alioqui longiore oratione concipi oportuisset.

Porro ex vtraque hac numerorum proportionalium definitione colligitur vt numeri proportionales dicantur quatuor necessario concurrere numeros formales: etsi materiales, tres interdum tantùm reperiantur: sed tunc vnus, duorum vices gerit; dum vnius rationis est consequens, & idem antecedens rationis alterius: eóque in casu dicuntur tres illi numeri continuè proportionales; cum verò quatuor numeros reperiri contigerit: proportionales discretè, siue discontinuè dici debebunt: quales sunt numeri quatuor 1, 4, & 6, 12 quorum bini priores eandem habent rationem, quam bini posteriores, nempe sub duplam, interruptam: tres autem 2, 4 8 eandem habent quidem, sed continuam, communi medio termino 4; qui rationis 2 ad 4 consequens; & rationis 4 ad 8 est antecedens, colligatam.

Ex iis itaque illísque quæ lib. 1. Prop. 47. exposita sunt; constat, qui numeri dicantur proportionales. Vnde quinam improportionales aut disproportionales dicendi veniant, clárum euadit: quorum scilicet bini rationem habent à ratione diuersam; quæ inter binos reliquos reperitur. Cuiusmodi sunt numeri 2, 4, & 3, 9. Duo siquidem priores 2, 4 rationem sub du-

plam; duo posteriores 3, 9 sub triplam seruant. Porrò hæc etiam disproportionalium numerorum disproportio, non secùs ac proportio, vel interrupta esse potest, vt in datis exemplis: vel continuata; qualis foret horum trium terminorum 2, 4, 12: quorum medius 4 est consequens rationis sub duplæ 2 ad 4: est autem antecedens rationis sub-triplæ 4 ad 12.

PROP. VIII. *Theor.*

Si per rationis cuiusvis consequentem diuidatur antecedens: producitur rationis denominator.

Expositio.

Theorema hoc in principiorum numerum à plerisque relatum est ac in primis à geometra celeberrimo R. P. Gregorio à sancto Vincentio lib. 8. quadraturæ Princip. 4. & à geometra item nominis non obscuri herigono schol. 1. ad definitionem 3. libri 5. Euclidis, vbi ait denominator, siue quantitas rationis, est numerus qui gignitur ex diuisione antecedentis rationis per eius consequentem. Atque ex eo Propositionem superiorem 4. tertiò confirmaui; ita tamen, vt eius Axiomatis demonstrationem ibidem subiecerim, vt absoluta foret mea illa ratiocinatio. Neque enim ei tanquam per se noto standum visum fuit: cum medium, quo demonstretur, non deficeret. Quare illud cum celebre sit in hac rationum meteria, in theorematum numerum hac peculiari Propositione refero, & paucis demonstrationem per regressum expono. Quam etiam attuli lib. 1. Exam. Prop. 2. part. 1. assert. 5. & 6.

Demonstratio.

Cum antecedens rationis diuiditur per consequentem gignitur numerus, qui ad vnitatem eandem rationem habet; quam antecedens diuisus habet ad diuisorem consequentem iuxta definitionem diuisionis lib. 1. Prop. 40. allatam. Sed numerus, qui ad vnitatem eandem habet rationem; quam antecedens ad consequentem, est rationis denominator, vt Propositione 4. superiori statutum est. Ergo si per rationis cuiusvis consequentem diuidatur antecedens producitur rationis denominator. Quod probandum erat. Vis rem exemplis illustrem. Ecce.

Rationis

A 15		
B 3	C 5	
	D 1	

Rationis A B antecedens A diuiditur per consequentem B: fit quotiens C, qui ad vnitatem D eandem rationem habet, quam habet A ad B per citatam Prop. 40. libri 1. Ergo C D est denominator rationis A ad B: qui solo numero C designari solet; sed non absque connotatione vnitatis D, vt supra pluribus exposui. Habes in ratione multiplici paradigma; in quo denominator C, integer semper est numerus. Ecce aliud in quo numerus fractus occurrit.

Antecedens A diuiditur per consequentem B. Ex ea diuisione gignitur

A 15	$C\ \frac{15}{4}$	vel $E\ 3\frac{3}{4}$
B 4	D 1	D 1

fractus numerus C: cuius numerator est antecedens 15; denominator autem est consequens 4 (ea enim diuisionis methodus breuissima, cum lubet, vsurpatur à logistis, numero diuiso, & diuidente in fracti numeri modum designatis) quiest antecedens rationis, similis rationi A B; consequens verò est vnitas D, vel expressa, vel suppressa, & tantum connotata. Nam fractionis C numerator 15., ita est ad denominatorem 4, hoc est, antecedens A 15 ad rationis consequentem B 4; vt fractio ipsa C ad vnitatem D per Prop. 12. libri. 2. Ergo ratio, cuius fractus numerus C est antecedens, consequens autem est vnitas D, est rationis A B, omniúmque similium denominator per Prop. 4. superiorem: qui etiam exprimi potest diuiso numeratore 15 per denominatorem 4; vt fiat numerus E integer cum fracto; qui sit rationis antecedens; cuius consequens est vnitas D; ac proinde sit ratio E ad D non minori iure denominator rationis A B, quam ratio C D: cum numeri C & E antecedentes, sicut & consequentes D, D sint æquales. Hîc etiam consule propositionem 3 superiorem, in qua quidpiam licet obseruare his non inutile.

PROP. IX. *Theor.*

Denominator rationis cuiusvis multiplicans consequentem generat rationis antecedentem.

Expositio & demonstratio.

Non minori iure hæc propositio quàm præcedens ad principiorum, aut vt monui, ad Theorematum numerum referri debet. Si enim diuiso antecedente per consequentem generatur rationis denominator: vicissim, si denominator multiplicet consequentem, generari necesse est antece-

dentem. Est siquidem, vt vnitas ad numerum multiplicantem; ita multiplicatus numerus ad productum ex multiplicatione, vt habetur ex definitione multiplicationis lib. 1. Prop. 28. explicatâ. Ergo, inuertendo, ita se se habet productus numerus ad multiplicatum, vt multiplicans ad vnitatem. Ergo per 1 rop. 4. superiorem, multiplicans numerus connotans vnitatem, denominator est rationis; quam habet productus numerus ad multiplicatum. Est ergo productus numerus idem cum antecedente rationis; cuius consequens multiplicatus est per denominatorem. Vt, in paradigmate posteriore proximæ propositionis repetito si ducatur denominator C fractus numerus, in B 4 consequentem rationis, generatur antecedens A 15 si enim per præcedentem Prop. diuiso A 15 per B 4 fit fractus numerus C. Vicissim, si fractus numerus C ducatur in B 4 restitui debet A 15; qui est antecedens rationis A B. Cum enim per Propositionem 12. lib. 2. ita sit fracti numeri C numerator 15, ad denominatorem 4 (hoc est, A 15 ad B 4 (vt ipse fractus numerus C ad vnitatem: idem numerus fiet per Prop. 19. lib. 7. Element. Ex primo numero A 15 in quartum, hoc est, in vnitatem: qui fit ex secundo B 4 in tertium C, fractum numerum. Fit autem ex primo A 15 in vnitatem ipsemet numerus A 15. Ergo etiam ex fracto numero C ducto in B 4, hoc est, ex denominatore rationis in consequentem, fiet A 15 antecedens eiusdem rationis. Quod ipsum ita etiam euadit manifestum. Multiplicetur fractus numerus C in numerum B integrum per Propos. 24. lib. 2. fiet fractus numerus E F: qui æqualis est (vt patet diuiso numeratore E 60 per F 4 denominatore) antecedenti rationis A 15. Ex quo patet veritas huius propositionis. Consule Examen Quadr. lib. 1. Prop. 2. par. 2.

A 15	15	B 4	E 60
	C—	—	—
B 4	4	1	F 4

PROP. X. *Theor.*

Duæ rationes, quarum idem est consequens, eam habent inter se rationem (quæ proportio dicitur) quam habent inter se earum antecedentes.

Expositio & Præparatio.

Duarum rationum A B, C B, idem sit consequens B. Dico earum inter se

A 2	C 3	$\frac{A\,2}{B\,5}$	$\frac{C\,3}{B\,5}$
B 5	B 5		

ſe rationem eandem eſſe cum ratione; quam inter ſe habent antecedentes A, C. Fiant ex rationum A B, C B, terminis, fracti numeri; ita, vt antecedentes A, C ſint eorum numeratores; conſequentes autem B, B, denominatores.

Demonſtratio.

Rationis A B ad rationem C B proportio, ſiue ratio; eadem eſt cum ratione fracti numeri A B ad C B fractum. Sed ratio fracti numeri A B ad fractum numerum C B, cum eundem habeant denominatorem B, eadem eſt cum ratione numeratorum A, C per Prop. 10. libri 2. Ergo etiam ratio rationis A B ad rationem C B eadem eſt cum ratione antecedentis A ad antecedentem C. Probatur maior. Valor, ſiue quantitas fracti cuiuſvis numeri tanta eſt, quanta eſt ratio eius numeratoris ad denominatorem, vt fusè explicatum & probatum eſt lib. 2. Prop. 5. Ergo ratio fracti numeri A B ad fractum numerum C B, eadem eſt cum ratione, ſiue proportione, rationis A B ad rationem C B. Conſtat igitur harum rationum A B, C B eundem conſequentem B habentium, proportionem, ſeu rationem eandem eſſe cum ratione antecedentium A, C. Quod erat probandum. Hæc eadem propoſitio à me demonſtrata eſt lib. 1. Exam. Prop. 7.

Confirmatio.

Fractus numerus A B denominator eſt rationis A B, & fractus C B denominator rationis C B per Prop. 8 Nam diuiſo antecedente A rationis A B, per conſequentem ſuum B, fit fractus A B, denominator rationis A B. Similiter, fractus C B denominator eſt rationis C B. Sed rationum denominatores, cum ſint rationes ſimiles, ſiue æquales ipſis rationibus denominatis, ita ſunt inter ſe; vt ipſæ denominatæ rationes inter ſe. Ergo ita eſt ratio A B ad rationem C B, vt fractus numerus A B ad fractum C B. Sed fractus A B ad fractum C B: cuius idem eſt denominator B, ita eſt per Prop. 10. lib. 2. vt numerator A ad numeratorem C, hoc eſt, vt antecedens A rationis A B, ad rationis C B antecedentem C. Patet ergo propoſitum. Nec obſtat, quod fracti numeri A B, C B; vt denominatores rationum A B, C B agnoſcantur, vnitatem connotare debeant iuxta propoſitionem 4 ſuperiorem: illa enim vnitas nullam mutationem in fractos illos inducendi capax eſt, ſiue eos diuidat, ſiue multiplicet. Conſtat ergo veritas huius propoſitionis.

PROP. XI. *Theor.*

Duæ rationes, quarum idem eſt antecedens, eam habent inter ſe rationem: quam conſequentes reciprocè ſumpti.

Expoſitio & præparatio.

A 4	A 4	A 4	A 4
		—	—
B 6	C 9	B 6	C 9

Duarum rationum A B, A C idem ſit antecedens A. Dico rationem prioris rationis A B ad poſterioris rationis A C rationem, eandem eſſe cum ratione poſterioris conſequentis C ad priorem conſequentem B diuidatur vtriuſque rationis antecedens A per conſequentes B, & C. producentur rationum denominatores; per Prop. 8. eruntque fracti numeri A B, A C.

Demonſtratio.

Fracti numeri A B, A C eundem habent numeratorem A. Ergo per Prop. 11. libri 2. ita ſe habet prior A B fractus ad poſteriorem A C; vt reciprocè, poſterioris denominator C, ad prioris denominatorem B. Sed fractus numerus A B ad fractum A C eandem rationem habet, quam ratio A B ad rationem A C (ſunt enim fracti illi numeri A B, A C, denominatores rationum A B, A C; earúmque quantitas) Ergo ita eſt ratio A B ad rationem A C, vt reciprocè huius conſequens C ad illius conſequentem B. Quod erat probandum. Hæc propoſitio eſt 8 libri 1. Exam.

PROP. XII. *Probl.*

Rationem quamlibet in minimis terminis exhibere.

Conſtructio & Demonſtratio.

Ratio quælibet minimis terminis tunc exprimitur: cum antecedens, & conſequens ſunt numeri inter ſe primi, vt probat Euclides lib 7. Prop. 23. Cùm igitur ratio proponitur ad minimos terminos reuocanda: idem eſt, ac ſi proponatur numeris inter ſe primis deſignanda. Quare primo loco expendendum erit, an propoſitæ rationis termini ſint inter ſe primi:

quod

quod ope Propositionis 18 libri 2. absoluetur. Si enim termini illi inter se primi comperiantur: ratio huiusmodi iam stat in terminis minimis. Quod si rationis datæ termini occurrant compositi: reperietur per citatam Propositionem 18. libri 2 maxima eorum terminorum mensura; per quam si vterque diuidatur: gignentur numeri eandem habentes rationem, quam diuisi numeri per Prop. 4. libri 2. eruntque præterea omnium minimi eandem habentes ratioнē, vt ex eadem Propositione constat. Simúlque ex Propositione 20. per quam reducitur minutia quælibet ad minimos terminos. Quæ reductio in eo tota versatur: vt exhibeatur minutia data in minimis terminis eandem rationem seruantibus; quam inter se obseruant termini minutiæ reuocandæ. Quod ipsum est hic propositum problema. Ergo rationem quamlibet in minimis terminis exhibuimus. Quod faciendum erat.

PROP. XIII. *Probl.*

Duas quaslibet datas rationes ad eundem consequentem reuocare.

Constructio & Demonstratio.

Consonat apprimè hæc Propositio Propositioni 21. lib. 2. qua docetur modus duas quascúnque fractiones ad eundem denominatorem reuocandi: nec aliud est obseruare discrimen nisi solum, quod inter voces rationis, & fractionis interest & verò fractio omnis, aliud, si rectè æstimetur, nihil est; quàm ratio similis ei; quam habet eius numerator ad denominatorem, velut antecedens ad consequentem: si enim rationis A B antecedens A per consequentem B diuidatur; gignitur denominator rationis A B per Prop. 8. superiorem; qui denominator est ratio similis rationi ipsi A B, vt suprà explicatum est; gignitur autem per huiusmodi diuisionem fractus numerus A B 3/5 fitque antecedens rationis similis rationi A B; si modò concipiatur connotare vnitatem, velut consequentem. Quod cum ita sit, hoc totum problema soluetur ea planè methodo; quâ duæ fractiones ad eundem denominatorem reuocantur citatâ Prop. 21. lib. 2. Duas ergo rationes ad eundem consequentem reuocauimus. Quod faciendum erat. Hæc Propositio est 9 libri 1. Exam. quam consule.

A 3	A 3
	—
B 5	B 5

PROP.

PROP. XIV. *Probl.*

Rationem inuenire: quæ ad datam rationem, datam habeat proportionem.

Constructio.

A 5		D 15
	C 3	
B 4		B 4

Data ſit ratio A B. Rationis autem inueniendæ denominator ſit. C. Ducatur hîc denominator C in datæ rationis antecedentem A; vt fiat D: cui velut antecedenti idem datæ rationis conſequens B aſſignetur. Dico rationem D B habere datam proportionem ad rationem A B datam.

Demonstratio.

Cum numerus D producatur ducto numero C in A: ita ſe habet per Prop. 28. libri 1. D ad A, vt C ad vnitatem. Sed vt ſe habet D ad A; ita ſe habet per Prop. 10. præcedentem ratio D B ad rationem A B (eſt enim rationis vtriúſque idem conſequens B.) Ergo ratio D B ad rationem datam A B; eam habet proportionem, quæ data eſt; cuius ſcilicet datus eſt denominator C connotans vnitatem, velut antecedens. Conſequentem. Quare rationem inuenimus; quæ ad datam rationem, datam habet proportionem: Quod præſtandum erat.

PROP. XV. *Probl.*

Duas vel plures rationes ſimul addere.

MONITVM.

Regulas quatuor ſimplices deinceps traditurus ſum; quarum ope rationes addere, ſubducere, multiplicare, & diuidere liceat. Ratio enim quælibet quantitatis naturam ſapit; cuius hæc prima facultas eſt, vt aliarum eiuſdem generis quantitatum acceſſione augeri; vel minui detractione poßit. Illud per additionem & multiplicationem hoc, per ſubtractionem, & diuiſionem abſoluitur. Mirum autem quàm multi, nec infima nota Mathematici, & quàm longè à vera earum operationum methodo aberrarint. Non deſunt, qui prætermiſsâ

termissa addendi, subducendíque rationes omni formâ; ei substituerunt partem quandam multiplicationis, & diuisionis. Multiplicationem autem & diuisionem, ita tradiderunt; vt earum tantum partem complexi sint. Vnde non potest nisi caligo aterrima toti huic rationum tractationi, quæ in iis augendis minuendísque versatur, affundi, eamque non ita per se obuiam & planam, maximis implicare difficultatibus. Quas hîc ita spero me amoliturum, vt grauiores passurus non sis: quàm quæ in fractorum numerorum putatione offendi solent. Varios autem illos lapsus, quò faciliùs declinentur, inferiùs indicabo: vbi vera tradita fuerit ars, qua regulæ illæ quatuor debent exerceri: quarum prima est additio proposita: cuius hanc accipe constructionem.

Constructio.

A 2	C 4	E 6
B 5	D 5	F 5

Sint addendæ rationes duæ A B, C D: quarum æquales sint consequentes B & D (si enim consequentes minimè forent æquales, ad æqualitatem in primis reducendi forent) tum addantur earum antecedentes A & C; & numero E ex additione producto tanquam antecedenti assignetur consequens F æqualis consequenti rationum communi B vel D. Dico rationem E F æqualem esse duabus simul rationibus A B, C D.

Demonstratio.

Si harum rationum A B, C D, F E antecedentes A, C, E, diuidantur per consequentes B, D, F; generabuntur rationum denominatores, vt non semel hactenùs occurrit, & occurret deinceps: At hi denominatores sunt fracti numeri A B, C D, E F in fractorum modum lineola inter terminos per diuisionem interiecta expressi: quorum duo A B, C D additi sunt fractorum in morem iuxta Prop. 22. libri 2. genitúsque est per additionem fractus E F, duobus A B, C D æqualis. Quod si plures rationes quam duæ forent addendæ: vel omnes primo loco ad eundem consequentem reducerentur, reductæque adderentur: vel duæ simul, vt hîc præstitum est, adderentur in vnicam: quæ cum alia sequente adderetur, & ita deinceps quotquot extarent addendæ. Duas ergo, vel plures rationes addidimus. Quod faciendum erat.

PROP. XVI. *Probl.*

A maiori ratione rationem minorem ſubtrahere.

Conſtructio & Demonſtratio.

Sit maior ratio A B, à qua minor C D ſubtrahenda proponitur: quarum vtraque eundem conſequentem vel nacta, vel aſſecuta eſt per Prop. 13. Quo poſito, ſubducatur antecedens C ab antecedente A (hunc enim maiorem eſſe, quàm C neceſſe eſt eò quod rationes A B, C D ita ſint inter ſe per Prop. 10. vt antecedentes; ratio autem A B ratione C D maior ſit ex hypotheſi) & reliquo E velut antecedenti tribuatur conſequens F, æqualis conſequenti B, vel D. Erit ratio E F ea, quæ relinquitur demptâ ratione C D à ratione A B. Nam ſi harum omnium rationum antecedentes per ſuos conſequentes diuidantur; fient denominatores earum: qui erunt fracti numeri A B, C D, E F: fractorúmque ſubductionis methodum ſernabunt. Patet autem illud hîc obſeruatam fuiſſe. Quarè rationem minorem à maiore rectè ſubduximus. Quod faciendum erat.

A 6	C 4	E 2
B 5	D 5	F 5
A 6	C 4	E 2
—	—	—
B 5	D 5	F 5

PROP. XVII. *Defin.*

Multiplicatio rationis per rationem eſt inueſtigatio rationis: quæ ad multiplicatam habeat eandem proportionem; quam multiplicans habet ad rationem æqualitatis.

Expoſitio.

Non leuis obſcuritas in rationum multiplicationem & diuiſionem profecta eſt ex earum, vel propriæ definitionis ignoratione, vel minùs propriæ aſſignatione: aut etiam ex ipſa rationum naturâ: quæ cum ſint complexum Entis genus, & ex diuerſis terminis compoſitum, qui attendi debent, minùs expedita euadit eorum tractatio. Accedit, non parùm difficultatis creatum ex definitione 5 libri ſexti elementorum, vbi compoſitas rationes definiens Geometra, eas aſſerit eſſe; quas efficiunt quantitates rationum inter ſe multiplicatæ. Vnde colligitur ex eius ſententia, cum definitum cum definito conuerti ſemper debeat, rationis compoſitionem

tionem aliud nihil esse, quàm rationis per rationem multiplicationem. Compositionem autem rationum aliud nihil esse non pauci censuère, quam rationum additionem: dum nullam aliam earum additionem, quàm compositionem agnouère. Ex quibus omnibus mirum est quanta sit huic rationum contemplationi præ cæteris matheseos partibus tum vtili tum necessariæ offusa caligo. Cuius quidem aliquid abstersisse mihi videor libro primo Examinis Quadraturæ nouæ. Nunc, si quid præterea lucis desideretur, afferre conabor.

Assero itaque multiplicationem rationis per rationem alteram, esse rationis inuestigationem; quæ ad rationem multiplicatam habeat eandem proportionem; quam ratio multiplicans habet ad rationem Æqualitatis. Quæ definitio ei persimilis est, quæ solet afferri multiplicationis numeri simplicis per numerum seruato generis absoluti & relatiui solo discrimine. Sicut ergo multiplicatio simplex dicitur inuestigatio numeri, qui ad multiplicatum eandem habeat ratione͂, quam multiplicans habet ad vnitatem: ita multiplicatio rationis per aliam ratione͂ dici debet inuestigatio rationis, quæ ad rationem multiplicatam eandem habet proportionem, quam ratio multiplicans habet ad rationem Æqualitatis. Neque enim potest duarum rationum proportio nisi ad aliam proportionem comparari. Quî enim possit proportio alteri cuipiam quantitati similis dici, vel dissimilis; nisi quantitas illa eiusdem sit generis? debet siquidem in hac etiam relatiuarum quantitatum comparatione, idem seruari genus; vt vnius ad alteram habitudo innotescat iuxta rationis definitione͂ ab Euclide lib. 5. defin. 3. traditam, & suprà Prop. 1. explicatam: vt non minùs perperàm rationem aliquam, cum absolutâ quantitate quis conferat; quàm cum superficie lineam, aut cum solido superficiem. Vt ergo mutua duarum rationum multiplicatio quid sit, explicari posset: debuit ratio Æqualitatis, quæ rationum omnium primum elementum, mensuráque eodem iure dici debet, quo vnitas omnium numerorum, assumi; vt per rationis multiplicantis proportionem ad vnitatem exponeretur proportio; quam debet habere ratio per multiplicationem producta ad rationem multiplicatam: non secùs, ac multiplicatio numeri per numerum exponitur, & definitur: dum asseritur inuestigatio, & determinatio numeri per multiplicationem geniti: qui eandem ad multiplicatum rationem habeat; quam habet multiplicans ad vnitatem. Exemplum lucis gratiâ appono. Proponuntur rationes duæ C D, E F multiplicandæ. Exponatur ratio A B Æqualitatis: cuius scilicet antecedens A æqualis sit consequenti B, vterque autem consequenti D, rationis multiplicantis C D. Multiplicatio ergo rationis E F per rationem C D absoluitur (quomodo autem absoluatur infrà docetur; de definitione

A 6	C 4	E 8	G 32
B 6	D 6	F 5	H 30

tantum hîc agitur) si sumatur ratio G H: quæ ad rationem E F multiplicatam, eandem proportionem habeat; quam habet ratio C D multiplicans ad rationem Æqualitatis A B. Ita vt si per hanc definitionem probanda sit quædam ratio, vt G H, produci per multiplicationem rationum C D, E F: probari debeat ratio G H, ita se habere ad rationem E F multiplicatam; vt ratio C D multiplicans, se habet ad rationem A B Æqualitatis. Atque hæc est multiplicationis genericè sumptæ definitio: cuius species planius postmodum distinguentur, vbi tradita fuerit ipsius multiplicationis methodus. Quam ecce.

PROP. XVIII. *Probl.*

Duas rationes inter se multiplicare.

Constructio

Sint duæ rationes A B, C D inter se multiplicandæ. Ducantur tum duo antecedentes A, C: tum duo consequentes C, D in se mutuò, & ex antecedentium A, C multiplicatione factus sit numerus E; & ex multiplicatione consequentium B, D, gignatur F. Dico rationem E F eam esse: quæ ex rationibus A B, C D in se ductis producitur. Hoc est iuxta definitionem præcedentem. Dico proportionem rationis E F ad rationem C D multiplicatam, esse eandem cum proportione rationis A B multiplicantis ad rationem Æqualitatis: vel; si ratio A B censeatur multiplicata; ratio autem C D multiplicans. Dico proportionem rationis E F ad rationem A B eandem esse cum proportione rationis C, D, ad rationem Æqualitatis.

A 6	C 5	E 30
B 4	D 3	F 12

Demonstratio.

Sit Æqualitatis ratio G H: cuius termini G, H æquales sint consequenti B, rationis multiplicantis A B. Diuidantur illarum rationum antecedentes G, A, C E, per consequentes suos H, B, D, F singuli per singulos. Fient totidem fracti numeri, vt schema refert, qui erunt per Prop. 8. superiorem denominatores rationum G H, A B, C D, E F. Atque adeò rationes his similes assumptâ in consequentem vnitate connotatâ. Itaque cum fracti duo numeri A B, C D, sese

G 4	A 6	C 5	E 30
H 4	B 4	D 3	F 12
$\frac{G\,4}{H\,4}$	$\frac{A\,6}{B\,4}$	$\frac{C\,5}{D\,3}$	$\frac{E\,30}{F\,12}$

ſeſe multiplicantes producant fractum numerum E F per Prop. 24. libri 2. quâ iubetur, vt fractorum A B, C D numeratores A, C, & denominatores B, D, in ſe mutuò ducantur; vt habeatur fractus E F ex multiplicatione genitus; quique ita ſe habet ad fractum C D multiplicatum; vt multiplicans A B ſe habet ad vnitatem (ad fractum ſcilicet G H) euidens fit rationem E F; cuius fractus E F eſt denominator, ſiue ratio ei ſimilis; ita ſe habere ad rationem C D multiplicatam; vt ſe habet ratio A B multiplicans, ad rationem G H æqualitatis hoc eſt, proportio rationis E F ad rationem C D, eadem eſt cum proportione rationis A B ad rationem G H æqualitatis. Ergo ratio E F cuius termini producuntur ductis A, C antecedentibus in ſe; & ductis B, D, conſequentibus: ea eſt per Prop. proximam quæ inquirebatur.

Alia demonſtratio eiuſdem ſolutionis.

Duæ rationes A B, C D multiplicandæ ad eundem conſequentem reuocentur per Prop. 13. ſuperiorem, vt hîc cernuntur reuocatæ ad rationes K L, R S.

A 6.	C 5	G 12.	K 18.	R 20.	E 360.	X 30
B 4	D 3	H 12.	L 12.	S 12.	F 144.	Z 12.

Ducantur ergo hæ rationes in ſe mutuò, vt præceptum eſt, ductis in ſe tam antecedentibus K, R, vt fiat E antecedens futuræ rationis; quàm conſequentibus L, S, vt fiat F conſequens eiuſdem rationis ex multiplicatione generandæ. Probandum itaque eſt rationem E F ad rationem R S multiplicatam, ita ſe habere; vt multiplicans ratio K L ſe habet ad rationem æqualitatis: quæ ſtatuatur G H; cuius termini ſint æquales conſequentibus L, S. Quibus poſitis.

Cum rationum trium G H, k L, R S, æquales ſint conſequentes; ita ſe habebunt inter ſe per Prop. 10. vt earum antecedentes G, K, R. Quare ſi duo antecedentes K, R in ſe mutuò ducantur, & productus numerus E 360 diuidatur per antecedentem G, vt fiat X: cui veluti antecedenti aſſignetur conſequens Z æqualis conſequentibus H, vel L, vel S: erit ratio X Z ad rationem R S multiplicatam, vt ratio k L multiplicans ad rationem G H æqualitatis. Nam, cum idem ſit conſequens harum omnium rationum: ita ſe habebunt inter ſe rationes, vt ſe habent earum antecedentes per Propoſitionem 10. Sed antecedens X 30 ad antecedentem R 20, ita ſe habet, vt antecedens k 18 ad antecedentem G 12 per Prop. 19. lib. 7. Elem. Nam idem numerus E 360 fit ex G 12 primo, in X 30 quartum: qui fit ex k 18 ſecundo, in R 20 tertium; patet. Nam antecedens G diuidens E genuit X. Ergo G multiplicans X reſtituet E.

qui ex ſuppoſitione genitus eſt per multiplicationem duorum antecedentium K, R. Ratio ergo X Z, ea eſt: quæ per multiplicationem rationum k L, R S producitur. Sed ratio E F, cuius antecedens E generatur per multiplicationem antecedentium K, R, conſequens verò F per multiplicationem conſequentium L, S, æqualis eſt rationi X Z. Ergo ratio E F, eandem habet proportionem ad rationem R S, quam habet ratio k L ad rationem G H æqualitatis: atque adeo ex definitione multiplicationis ratio E F ea eſt quæ inquirebatur. Probatur illa minor, nempe rationes E F, & X Z æquales eſſe. Nam numerus G 12 multiplicans X producit E antecedentem, vt oſtenſum eſt: conſequens autem L 12, ſiue H, ſiue G, multiplicans, S 12, ſiue Z, producit F. Cum ergo idem numerus G multiplicet duos numeros X, Z & producat numeros E F: ita erit per Prop. 17. lib. 7. Elem. E ad F, vt X ad Z. Patet ergo duas rationes K L, R S,

A 6.	C 5	G 12.	K 18.	R 20.	E 360.	X 30.
B 4	D 3	H 12.	L 12.	S 12.	F 144.	Z 12.

dum in ſe mutuò ducuntur earum antecedentes k, R, & producunt E, duo item earum conſequentes L, S; & producunt F; generare rationem E F: quam generari neceſſe eſt iuxta definitionem multiplicationis rationum. Cum ergo datæ duæ rationes A B, C D æquales ſint rationibus KL, RS. generabunt etiā ductis earum antecedētibus, & conſequentibus eandē rationē E F, vel aliam ſimilem: cuius ſcilicet termini ſint terminis E, F proportionales. Fient enim ex A & C antecedentibus proportionalibus ad antecedentes k, R, inter ſe ductis, ductis item conſequentibus B & D, qui proportionales ſunt conſequentibus L, S, plani ſimiles planis E, F: atque adeo per Prop. 26. lib. 8. Elem. proportionales. Rectè igitur traditâ methodo datæ duæ rationes inter ſe multiplicatæ ſunt. Quod faciendum erat.

Corollarium. I.

Ex poſteriore problematis huius demonſtratione colligas rationem; quæ per duarum rationum multiplicationem produci debet, obtineri: ſi fiat vt conſequens rationis multiplicantis ad ſuum antecedentem: ita ratio multiplicata, ſiue eius denominator (qui ratio eſt denominatæ ſimilis) ad aliam rationem. In ſuperiori enim paradigmate oſtenſum eſt rationem

G 12.	K 18.	R 20.	E 360.	X 30		R 20	E 360	X 30
H 12.	L 12.	S 12	F 144	Z 12	K 18	—	—	
						S 12	S 12	Z 12

tionem X Z produci per multiplicationem rationis K L ductæ in rationem R S: si ducatur antecedens k in rationem R S (quæ hîc exprimitur per modum fracti numeri: qui est rationis ipsius denominator, si connotet vnitatem loco consequentis) & producta ratio E S, siue productæ rationis denominator, cuius antecedens est fractus E S; consequens autem est connotata vnitas, diuidatur per G 12; siue per L consequentem rationis K L multiplicantis, vt fiat ratio X Z. Quare si fiat, vt consequens L rationis k L multiplicantis ad antecedentem suum K, ita ratio R S, vel eius denominator (qui est fractus R S connotans vnitatem) ad aliud, nascetur ratio X Z: quæ est ratio ex multiplicatione rationis R S per rationem K L producta.

Corollarium 2.

Si rationis alicuius, vt E Y, antecedens E diuidatur per numerum quempiam G, & numero X per diuisionem producto velut antecedenti tribuatur rationis eiusdem consequens Y, siue Z: fiet ratio X Z æqualis rationi E F cuius consequentem F numerus G multiplicans Y generat.

	E 360.	E 360.	X 30
G 12			
	Y 12.	F 144.	Z 12

PROP. XIX. *Defin.*

Ratio ex rationibus componi dicitur; cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.

Expositio.

Hæc est Euclidis ipsius definitio quinta libri 6. Elem. ex cuius vero sensu, authorísque mente, vt in rationum doctrinam, quæ inter cæteras matheseos partes tum dignitatis, tum difficultatis primas obtinere semper visa est, lucis plurimum proficisci potest: ita ex alieno plurimum caliginis non potest non deriuari. Quod vtinam nos ipsa non doceret experientia: qua constat nec paucos nec parui nominis geometras ob eius definitionis

finitionis interpretationem minùs aptè conceptam, ineptiúsque traditam, lapsus incurrisse non leves; cæterísque labendi occasionem præbuisse, quos tenebris obuoluerunt tam tetris, vt ipsis eas discutiendi facultas affulgere nulla videatur. Cum ergo hîc de rationibus instituta tractatio tam insignem hanc definitionem à me prætermitti non patiatur: enitar, & vt spero, consequar, vt euadat apertissima. Quamquam verò libro 1. Propositione 16. Examinis nouæ quadraturæ circuli, & sequentibus aliquot eandem exposuerim: ex eo tamen alia quædam, die, vt fieri solet priores cogitationes promouente, menti occurrerunt: ex quibus lux non exigua iisdem accessura est.

In primis ergo distinguenda est duplex rationum compositionis differentia: cuius mentionem fecit Euclides prior est, cuius meminit libro quinto defin. 14 in hæc verba. *Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente sicut vnus terminus, ad ipsum consequentem.* Vt, si proponantur duæ rationes AB, CD, & ita sit A ad B, vt C ad D (sint nimirum similes iuxta Propositionem 4. libri huius) si antecedens A cum consequente B simul *componantur*, vt fiat vnicus terminus AB, qui ad consequentem B referatur, vel C & D *componantur*, & ad consequentem D referatur compositus terminus C, D: dicitur hæc terminorum copulatio ab Euclide, compositio rationis, eámque in rationibus similibus argumentationem legitimam deinde probat eodem libro 5. Prop. 18.

A 4	AB 6	C 6	CD 9
B 2	B 2	D 3	D 3

Hæc porrò rationum compositio aliud nihil est, quàm vera ipsa, & formalis rationum additio superiùs Prop. 15. explicata. Duæ enim rationes, vna A B, altera B B, quarum idem est consequens B, simul adduntur, additis, siue compositis duobus antecedentibus A & B in antecedentem vnicum: cui tribuitur idem prior consequens B immutatus, vt verè fert lex additionis. Huic rationum compositioni respondet ex opposito rationum diuisio de qua idem Euclides loco citato: quæ & ipsa, aliud nihil est præter rationis à ratione subtractionem Prop. 16. superiori explicatam, si enim à ratione antecedentis A B 6 ad consequentem B 2, demátur ratio B 2 ad B 2 (quam subtractionem definit geometra *diuisionem rationis*) remanet per veram subtractionem ratio reliqui antecedentis A 4 ad eundem consequentem B 2. Sed de hoc rationum compositionis, vel diuisionis genere hîc minimè agitur.

Secundum ergo rationum compositionis genus, cuius Euclides meminit, illud est, quod explanandum nunc venit. Eius autem meminit tum hac definitione 5. libri 6. tum Propositione 23 eiusdem libri, dum ait æquiangula parallelogramma rationem habere ex lateribus compositum. Tum etiam libro 8. Prop. 5. vbi probat planos numeros rationem habere

habere compositam ex lateribus. Nec dubium quin harum duarum propositionum intuitu citatam definitionem attulerit Geometra, cum nusquam alias rationum compositionis mentionem fecerit: ideò enim definitiones explicantur, vt deinceps ea, quibus eæ conueniunt, intelligantur, & quidem secundum eundem sensum definitionum, & vicissim definitionum ipsarum sensus, si quando obscurior appareat, lucem possit ex ipsis definitis repetere.

Dum itaque ait Geometra rationem illam ex rationibus compositam dici: cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam efficiunt rationem. Sic intelligi censeò.

Primò, vt hanc rationum compositionem tam de discreta quam de continua quantitate accipi voluerit. Suadetur. Nam citatas illas propositiones vigesimam tertiam libri 6. quæ ad quantitatem continuam pertinet; & quæ ad discretam spectat, quintam libri 8. iisdem effert terminis nec aliàs vllius discriminis inter vtramque mentionem fecit: aut aliam huius compositionis rationum definitionem vsquam adduxit: & verò illa multiplicationis vox, qua vtitur, dum ait rationum quantitates inter se multiplicatas rationem efficere; quæ ex rationibus componi dicitur, discretæ quantitati potiùs, quàm continuæ solet applicari: hæc enim ex se multiplicitatem non admittit, sed continuitatem.

Secundò. Cum ratio ex rationibus composita dicitur: cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem: eam nimirum, quæ ex rationibus vocanda est composita: caue ne tibi persuadeas hanc rationem, quæ per multiplicationem quantitatum duas rationes constituentium generatur, ex illis rationibus duabus componi. Esset enim hic sensus à mente Geometræ alienissimus. Imò etiam, vt constabit, à veritate. Theorema siquidem demonstrandum proposuisset Euclides; non autem definitionem; cuius cognitio ex ipsis solis ritè perceptis terminis consequitur. Illud suo loco proponit, probátque, citatis nimirum superiùs Propositionibus vigesimâ tertia libri 6. & quinta lib. 8. Hîc ergo tantùm declarat, quænam ratio composita dicatur ex rationibus, quæcunque tandem illæ fuerint, & quomodo à ratione simplici & minimè composita distinguatur. Non secùs quam in absolutis numerum compositum appellat eum defin. 13. libri 7. quem quispiam alius metitur, quisquis tandem numerus ille metiens extiterit: atque eo discrimine compositum numerum distinguit à numero simplici; quem nullus alius numerus, sed sola vnitas metitur; quem primum defin. 11. nuncuparat.

Tertiò. Hæc rationis compositæ denominatio non aliunde fluxisse videtur; quàm ex eo, quod proximè attigi de numeris absolutis compositis. Si enim duo numeri rationem constituentes compositi ambo fuerint, ratio illa iure dici possit composita cum compositorum numerorum sit ha-

bitudo. Quod vt apertiùs explicem. Notandum est compositum quemlibet numerum, numerum esse planum, ex duobus scilicet numeris in se ductis progenitum. Cum enim compositum numerum numerus aliquis præcisè metiatur: si numerus hîc metiens ducatur in alterum numerum per quem metitur; ipsum compositum numerum necessariò producet. Vt numerus 24, compositus est, cum illum metiatur numerus 6. Quia verò hîc numerus 6 numerum 24 metitur per 4. hoc est, numerus 6 quater repetitus numerum 24 adæquat, ac propterea eius pars quarta denominatur: si multiplicetur 6 per 4, ex ea multiplicatione nascetur numerus 24, qui planus dici debet, ex duobus nempe lateribus 6 & 4 inter se ductis progenitus. Atque ita nullus numerus dici potest compositus, quin etiam dicatur planus, & contrà, nullus planus est, quin etiam compositus sit, Patet autem planum quemlibet numerum, vt planum, ad aliam quantitatis speciem pertinere, nempe ad superficiem: quæ duabus constat dimensionibus, longitudine, & latitudine; atque ex eo composita euadit quantitas quilibet numerus planus; quæ compositior adhuc foret, si tres numeri in se mutuò ducerentur; vt fieret solidus numerus. Iam verò in numeris relatiuis, & rationem creantibus aliquid simile debet obseruari. Vult Geometra duarum rationum quantitates inter se multiplicari; vult ergo ex simplicibus quantitatibus per hanc multiplicationem generari compositas, siue planas: quarum proinde ratio mutetur, cum non tantum longitudinis; sed etiam latitudinis habitudo attendenda sit: vt quantitatum multiplicaturum, ex quibus rationes duæ simplices prius constituebantur, ratio vnica habeatur; cuius termini plani sunt, & compositi ex longitudine & latitudine: quæ in illam ipsam rationem, eandem inuehunt compositionem. Quod etiam ex eo patet: quod cum duæ priùs rationes forent ex quatuor quantitatibus constitutæ, post multiplicationem quantitatum binarum, & binarum, vnica ratio habeatur ex duabus quantitatibus, quantitates illas quatuor priores eminenter continentibus conflata. Meritò igitur dicenda est illa ratio ex rationibus composita. Ex rationibus, inquam, quibusdam in vniuersum, vt supra monui, non autem ex rationibus; quarum quantitates multiplicatæ sunt. Ne loco definitionis theorema proposuisse videatur Geometra absque demonstratione; qua carere non deberet. Quænam autem futuræ sint rationes illæ, ex quibus compositæ rationes constant, determinabitur inferiùs Prop. 20. Nunc cœptam definitionis huius expositionem prosequor.

Quartò. Perpendendum restat; quænam sint illæ duarum rationum quantitates multiplicandæ inter se, vt ratio generetur, quæ composita dicitur? vel potiùs quomodo ad multiplicationem assumi debeant. Item quænam sint illæ rationum quantitates, quæ inter se multiplicantur, vt fiat ratio ex rationibus composita. Volunt plerique per rationum quantitates

tates intelligi non ipſos rationum terminos, qui rationes conſtituunt; ſed ipſarum rationum denominatores, penes ipſos enim perpenditur quanta ſit quælibet ratio, vt verè rationis quantitas, dici poſſit eiuſdem denominator. Non abnuerim ego quidem; ſi modo tales admittantur denominatores; quales eſſe aſſerui Prop.4. vt ſcilicet ſint rationes rationibus ipſis denominatis ſimiles, quarum conſequens ſit vnitas: neque enim aliter poteſt noua ratio fieri per multiplicationem quantitatum ad rationes pertinentium, quæ compoſita dici queat. Ecce enim duæ ſunt rationes A B, C D: quarum denominatores ſunt E & F, numeri, vt volunt, abſoluti. Si ergo inter ſe multiplicentur huiuſmodi duarum rationum quantitates, ſiue denominatores E, F, non poſſunt niſi numerum vnicum G producere, at ratio quælibet duobus terminis neceſſariò conſtat. Quomodo ergo vnicus ille numerus G ratio dicetur ex rationibus compoſita? Vt iure quis miretur tales abſolutos denominatores à geometris non imperitis admitti, & admiſſis, hunc ab iſdem tribui ſenſum huic definitioni. Quod ſi denominatores E & F non abſoluti cenſeantur, ſed ſint ipſi rationes ſimiles rationibus A B, C D denominatis, dum conſequentem ſibi adſciſcunt vnitatem vel expreſſam, vel connotatam: erit etiam G ratio, cuius conſequens eſt vnitas. Atque ita abſurdum illud euitaretur: nihilominus tamen aliud incurreretur, vt infra apparebit. Aſſero ego per rationum quantitates, illos ipſos rationum terminos intelligi, ſiue rationes magnis, ſiue paruis exprimantur terminis, ſint etiam, ſi lubeat, rationum denominatores quorum conſequentes, ſint vnitates: neque enim alias aliunde quantitates adſciuit Euclides, quæ inter ſe multiplicatæ rationem compoſitam efficiant: neque verò adſciſcere fuit opus, vt conſtabit clariùs ex iis, quæ mox adducant ad alteram quæſtionem ſoluendam. Quomodo ſcilicet, & quarum quantitatum multiplicatio iniri debeat ad rationem ex rationibus componendam.

A 6	C 8
B 2	D 4
E 3	F 2
G 6	

Cum ergo duarum rationum, vt A B, C D, quatuor ſint quantitates: quæ inter ſe multiplicari poſſint; dubitari poſſit: quænam, quove ordine ad multiplicationem aſſumi debeant. An ſcilicet ambæ eiuſdem rationis, ſint termini; vt ſi tam antecedens A in ſuum conſequentem B, quàm antecedens C in ſuum item conſequentem D duci debeat: vt fiat ratio compoſita G H. An certè ambarum rationum duo antecedentes A & C, & duo conſequentes B & D inter ſe mutuò multiplicentur; vt ex ea multiplicatione habeatur ratio E F, quæ compoſita dicatur? Dico igitur ſumendas eſſe ad multiplicationem ambas eiuſdem rationis quantitates, ſiue ter-

A 6	C 8	E 48
B 2	D 4	F 8
G 12	H 32	

minos: ita vt ratio G H; quæ producitur antecedente A ducto in suum consequentem B, & antecedente C in consequentem D, ea sit ex mente Euclidis, quæ composita ex rationibus dicitur; non autem ratio E F ex antecedentibus A, C, & consequentibus B, D, inter se ductis genita. Hanc expositionem ex ipso geometra planissimè colligo.

Nam Propositione 5. libri 8. asserit planum numerum ad planum alterum numerum, hoc est, compositum numerum ad compositum alterum numerum, vt num. 3. declaratum est, rationem habere compositam ex lateribus. Quibus lateribus? & ad quæ latera? iis nimirum, quibus prior planus numerus, siue antecedens rationis compositæ, continetur: aut ex quorum multiplicatione generatur, hoc est, ex duabus quantitatibus prioris rationis collatis ad duo latera posterioris plani numeri; quæ ipsum continent; vel ad duas quantitates posterioris rationis, quæ inter se multiplicatæ planum illum secundum numerum, siue consequentem rationis compositæ producunt. Atque hic est sensus secundum quem hæc Euclidis propositio sumi debet; cum secundum illum demonstretur. Cum ergo ea sit Euclidis mens, vt hac Propositione ostendat ex quibus rationibus componatur ratio plani numeri ad planum numerum: apertè supponit planum numerum ad alterum planum numerum rationem habere compositam: & quidem eo tantum nomine, quod planus numerus ad planum referatur numerum: hoc est, quod numerus ex duobus numeris siue duobus lateribus, (aut ad rem) ex duabus rationis prioris quantitatibus inter se multiplicatis, genitus referatur ad numerum ex duabus posterioris rationis quantitatibus inter se item multiplicatis genitum. Ex quibus manifestum euadit quantitates illas, quæ inter se multiplicatæ rationem efficiunt ex rationibus compositam iuxta hanc definitionem; quantitates alias non esse, quàm eas, quibus rationes singulæ constant, singularum nimirum rationum antecedentem, & consequentem. Quod ipsum ex alia Propositione eiusdem Euclidis, clariùs adhuc elucescit. En illam.

Asserit geometra Propositione 18. libri 8. planum numerum ad planum similem, duplicatam habere lateris ad latus homologum rationem: hoc est compositam ex duabus rationibus similibus, siue æqualibus (illud enim vox illa duplicata significat) nam cum in vniuersum constet ex Propositione 5. libri 8. citatâ planum quemcúnque numerum ad alterum planum rationem habere ex lateribus compositam: habebit & planus ad planum similem, rationem ex lateribus compositam: sed latera duo plani vnius numeri, duobus plani alteriùs similis lateribus sunt proportionalia per definit. 21. libri 7. Ergo planus numerus ad planum similem, habet rationem compositam ex ratione vnius lateris ad latus homologum, hoc est, antecedentis ad antecedentem vel consequentis ad consequen-

tem,

tem, bis ſumptâ. Eáque ratio compoſita ex eadem ratione lateris ad latus homologum bis ſumpta, ſiue duplicata; ipſamet eſt, quam efficiunt quantitates duarum rationum ſimilium inter ſe multiplicatæ. Hæ autem quantitates, aliæ non poſſunt eſſe; quàm ipſæ, quibus rationes duæ ſimiles conſtant: antecedens ſcilicet & conſequens vtriúſque rationis ſimilis. Vt enim plani duo numeri ſimiles generentur; neceſſe eſt per citatam definit. 21. libri 7. vt latera ſiue quantitates, quæ inter ſe multiplicantur, in eadem ſint ratione. Quales ſunt in hoc caſu (qui planos ſimiles ſupponit) antecedens vterque ad ſuum conſequentem. Quantitates ergo proportionales duarum rationum ſimilium, hoc eſt, antecedens vterque cum ſuo conſequente multiplicari debent, vt habeantur duo termini rationis compoſitæ; cuius antecedens erit planus numerus ex antecedente prioris rationis in ſuum conſequentem ducto genitus: illius autem conſequens eſt planus ſimilis, ex antecedente rationis poſterioris in ſuum item conſequentem multiplicato.

Ex his ergo, quæ ad quantitatem ſolùm diſcretam pertinent, patet euidentiſſimè quantitates illas, quæ inter ſe multiplicari debent, vt efficiant rationem: quam hæc definitio, compoſitam ex rationibus appellat: alias non eſſe, quàm antecedentem & conſequentem vtriúſque ſigillatim rationis. Quod idem in continua quantitate locum habet. Nam ex Propoſitione 23. libri 6. conſtat æquiangula parallelogramma (qualia ſunt rectangula omnia) rationem habere compoſitam ex lateribus, hoc eſt, ex rationibus laterum. Vnde colligi poteſt; latera, quæ ſunt quantitates inter ſe multiplicatæ, vt parallelogramma conſtituantur, eſſe ipſas quantitates, quibus vtraque ratio conſtat, antecedentem nimirum & conſequentem: non ſecùs ac in quantitate diſcreta. Deinde ex Propoſitione 20. libri 6. conſtat ſimilia polygona, (qualia ſunt duo rectangula, quorum latera ſunt proportionalia) duplicatam habere rationem lateris homologi ad latùs homologum. Vnde argumentum deduci poterit ſimile ei, quod ſecundo loco paulò ante deductum eſt circa diſcretam quantitatem ex Propoſitione 18. lib. 8. quod pluribus denuò proſequi non eſt opus.

Habes ergo ex dictis verum definitionis huius Euclidianæ ſenſum. Vt ſcilicet, ratio ex rationibus compoſita dicatur ea: quam duæ rationes ſimplices efficiunt, dum ſingulæ earum quantitates, ſiue termini antecedens & conſequens inter ſe multiplicantur, & duos efficiunt terminos nouæ rationis: quæ compoſita nominatur. Habes cur ratio illa dicatur compoſita, cur ex rationibus in vniuerſum, non autem certis, & determinatis, compoſita dici debeat. Habes denique cur per rationum quantitates, quæ inter ſe multiplicatæ rationem compoſitam efficiunt, rationum denominatores ſoli non debeant intelligi: ſed rationum termini quilibet, etiam ipſi denominatores ſolito meo more, hoc eſt, quorum conſe-

quens est vnitas, accepti. Ex quibus ritè obseruatis capitibus vix hac in rationum materia quidquam occurrat: quod facessere negotium possit, vt ea paulò pluribus exposuisse, operæ videatur non pœnitendæ.

Scholium.

Obseruandum ad hanc rationum compositionem non tantùm duas rationes, quarum quantitates siue termini inter se multiplicentur, concurrere posse; sed etiam plures: earum enim duarum quantitates inter se multiplicatæ rationem efficient compositam quidem: sed si huius iam compositæ rationis termini in se mutuò ducantur; ducantur autem & rationis alicuius tertiæ termini in se mutuò: ratio efficietur composita, & quidem priore, vt patet, compositior: eius enim termini non tantùm plani; sed etiam solidi futuri sunt, ex tribus quippe terminis simplicibus in se ductis procreati. Quod si adhuc compositæ rationis huius quantitates in se ducantur, & factus terminus conferatur cum termino ex quartæ alicuius rationis quantitatibus inter se multiplicatis genito: habebitur ratio multo adhuc compositior, & sic in infinitum. Obseruandum tamen in hac multiplici rationum compositione aliquid discriminis interesse inter quantitatem discretam & continuam: in hac siquidem vltra terminos solidos ex tribus lineis inter se ductis genitos concipi non potest alia quantitas compositior. Quare tunc rationes denominatorum suorum, qui lineæ rectæ sunt, vt Propositione 4. declaratum est, operâ exprimentur. At verò in quantitate discretâ semper licebit terminos etiam solidos multiplicare, non formaliter vt solidos, & iam tertiam, & vltimam dimensionem assecutos; sed vt simplices, & quasi nulla priori multiplicatione generatos, vt aliàs Prop. 4. libri 3. explicatum est.

Obseruandum secundò. Si duæ rationes suis veris denominatoribus, quorum scilicet consequens est vnitas, vel expressa vel connotata, exprimantur; vt A B & C D: tunc rationem ex rationibus compositam; non esse aliam, quàm quæ inter ipsos antecedentes A & C intercedit. Nam hi sunt termini, qui ex rationum quantitatibus inter se multiplicatis generantur.

A 8	C 5
B 1	D 1

Vnitas siquidem B multiplicans A, generat A; sicut & vnitas D ducta in C, non alium quàm C numerum producit. Quo nomine, duos quosvis numeros rationem compositam constituere dicendi forent; sed minùs sanè propriè; vnitas enim numerum metiens, numerum compositum non efficit, sed numerum primum iuxta Euclidis definitionem 11. libri 7. Si tamen tres aut plures fuerint huiusmodi denominatores: quorum termini in se ducantur fiet ratio composita propriè dicta. Ecce enim duarum rationum A B, C D quantitates inter se multiplicantur: fit ratio

composita

A 8	C 5	A 8	E 3
B 1	D 1	C 5	F 1
		G 40	H 3

composita A C ex ipsis antecedentibus A & C, vt dictum est, constituta. At si ratio hæc composita A C vnà cum ratione E F componere debeat rationem. Multiplicatis inter se quantitatibus tùm A, C; tùm E, F; fiet ratio G H composita: cuius antecedens G, diuersus est à terminis A & C prioribus. Idémque, vt patet, futurum est, si alicuius rationis denominator verus cum ratione G H rationem compositam efficere deberet.

PROP. XX. *Probl.*

Ex duabus, vel pluribus rationibus rationem componere.

Constructio.

A 5.	C 2.	E 10.
B 3.	D 6.	F 18.

Sint primò duæ rationes A B, C D ex quibus ratio componenda sit. Ducantur duarum rationum tum antecedentes A & C, tùm consequentes B & D, in se inuicem: & ex ea multiplicatione nascantur duo termini E, F. Dico rationem E F compositam esse ex datis rationibus AB, CD.

Demonstratio

Cum duo numeri A & C; item duo B & D in se ducantur: numeri ex ea multiplicatione geniti E & F, plani erunt. Ergo per Prop. 5 libri 8. rationem habent compositam ex ratione laterum ad latera. Hoc est, ratio antecedentis E ad consequentem F componetur ex ratione lateris A ad latus B; & ex ratione lateris C ad latus D. Rationem ergo E F composuimus ex datis duabus rationibus A B, C D. Quod faciendum erat.

Quod si plures quam duæ rationes proponantur: ex quibus ratio componi debeat; eadem constructione id absoluetur.

A 5	C 2	G 4	E 10	K 40
B 3	D 6	H 2	F 18	L 36

Vt si tres dentur rationes A B, C D, G H. Ex duabus prioribus A B, C D componetur ratio E F, vt ante præstitum est: tum eodem modo ex duabus G H & E F, alia K L componetur ductis inter se G & E antecedentibus, vt fiat antecedens K; ductis item consequentibus H, F, vt fiat consequens L. Atque eadem methodo ex quotlibet rationibus datis rationem componere licebit.

ALITER

ALITER.

A 5 C 2	B 3 G 15
B 3 D 6	E 9 H 27
E 9	

Dentur eædem duæ rationes A B , C D ; ex quibus ratio componenda est. Fiat per Prop. 50. libri 1. vt antecedens C , rationis C D ad suum consequentem D ; ita rationis A B consequens B , ad alium terminum E. Dico rationem A ad E compositam esse ex duabus datis rationibus A B , & C D. Quod ostendo.

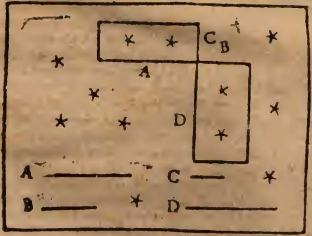
Demonstratio.

Quandoquidem ex constructione ita est B ad E , vt C ad D : seponatur ratio B E ; & loco rationis C D statuatur. Tunc si duo antecedentes A & B duarum rationum A B & B E in se ducantur , vt fiat G : ducantur etiam earundem rationum consequentes B & E inter se , vt fiat H : ratio G H erit composita ex duabus rationibus A B & B E iuxta allatam superiorem demonstrationem. Sed ratio G H eadem est cum ratione A E. Ergo ratio A E composita est ex rationibus A B & B E , siue A B , & C D. Probatur minor. Idem numerus B multiplicat duos numeros A & E ; duosque numeros G & H producit , vt patet ex constructione. Ergo per Prop. 17. libri 7. Elem. ita se habent inter se duo multiplicati numeri A & E ; vt se habent ex multiplicatione producti duo G & H. Ergo ratio A E composita est ex duabus rationibus A B , C D ; ex quibus componi ostensa est ratio G H. Quod si plures quàm duæ rationes darentur , ex quibus ratio componi deberet : post statutam rationem ex duabus prioribus compositam ; hæc cum tertia componeretur eâdem methodo seruatâ ; nec alia demonstratione constructio probaretur , quotquot tandem rationes rationem hoc modo componerent. Ex duabus ergo , vel pluribus rationibus rationem composuimus. Quod faciendum erat.

Scholium.

Ne hîc te turbet ea , quam præcipio , terminorum multiplicatio , quibus constant rationes duæ , vel plures ; ex quibus ratio componi iubetur, quæ à multiplicatione rationum , de qua propositione antecedente tam multis actum est ; longè diuersa est : hîc enim rationum datarum, ex quibus ratio cōponenda est, antecedẽtes in antecedẽtes; consequentes in consequẽtes duci debent: cum tamen illic duci debere singularũ rationum terminos inter se, hoc est , antecedentem quemque in suum consequentem , declaratum

ratum fit; vt ratio ex rationibus componi dicatur. Ne, inquam, diuersitas hæc, quæ primâ fronte pugnantia inuehere videtur, te percellat: in memoriam reuoca, & denuò perpende, quæ ibidem ex mente Euclidis exposui. Nimirum, id vnum definitione illa sexta libri 6. Geometræ propositum fuisse; vt explicaret quid per rationem ex rationibus compositam intelligi deberet. Rationem scilicet; cuius vterque terminus ex duobus duplicis rationis alicuius terminis inter se ductis gigneretur; quæcunque sint alioqui rationes illæ: quod tantùm exigit definitio. Non autem ipsum statuere voluisse, ex quibus rationibus ratio composita, componeretur. Quod theorematis naturam sapit; & verò Prop. 23. eiusdem lib. 6. ab eo in continua quantitate; in discreta autem lib. 8. Prop. 5. adductum est. Hoc autem problemate modum tradidi, quo haberetur ratio composita ex rationibus datis ad citatas illas Euclidis Propositiones apposite.



Quod vt clariùs constet, hæreatque firmiùs: perpende schema huiuscemodi. In quo ex duabus rationibus A B, CD, ratio componenda est. Ex duobus antecedentibus A, C, fiat rectangulum, vel planus numerus 10; & ex duobus consequentibus B, D, rectangulum alterum, alterque planus numerus 18. Constat rationem prioris rectanguli ad secundum, vel numeri 10 ad numerum 18 componi ex rationibus A B, & C D; non autem ex rationibus A C, & D B (quæ sunt illarum permutatæ) ratio enim rectanguli (idem esto de planis numeris 10 & 18 iudicium) ex citatis locis Euclidis, componitur ex ratione A ad B, & ratione C ad D: non autem ex rationibus A C, D B: quas constituunt multiplicati termini A C, & B D. Nec refert, quod eadem ratio rectanguli ad rectangulum, vel numeri 10 ad numerum 18, componi etiam possit ex ratione lateris A ad D, & ratione lateris C ad latus B. Ratio enim rectanguli ad rectangulum componi potest ex variis rationibus vt ex Prop. 5. constabit. Sed hîc satis est ad Problematis solutionem, vt rationem composuerim ex duabus datis rationibus A B, & C D. Esto plures aliæ sint aptæ ad eandem componendam.

PROP. XXI. *Theor.*

Eadem ratio, quæ per duarum rationum multiplicationem producitur; ex eisdem rationibus componitur: ita vt rationis compositio à multiplicatione formaliter quidem discrepet, materialiter idem sit.

Demonstratio.

Plerique omnes, qui de rationibus loquuntur saniùs, discrimen nullum inter rationum compositionem & multiplicationem agnoscunt. Aliquod tamen esse ex dictis constat; quod assero formale esse. Ostendo. Duæ rationes A B, C D in se ductæ producunt rationem E F. Ducuntur autem in se, dum duo antecedentes A, C, in se; & in se duo consequentes B, C ducuntur, iuxta Prop. 18.

A 5	C 4	E 20
B 3	D 6	F 18

Sed dum earumdem rationum A B, C D, antecedentes in se; & in se consequentes ducuntur, rationem E F producunt compositam ex rationibus A B, C D, per Prop. antecedentem. Ergo eadem operatione habetur ratio E F ex eisdem rationibus composita; & ex eisdem in se ductis producta per multiplicationem: materialiter. Ergo compositio & multiplicatio idem sunt; formaliter tamen valde differunt dum ratio E F, vt ex multiplicatione oritur dicitur ita esse ad rationem C D multiplicatam; vt A B multiplicans est ad rationem æqualitatis: vt verò E F per compositionem genita consideratur: dicitur ex rationibus A B, C D composita. Quod longè diuersum est. Eadem ergo ratio quæ per &c. Quod erat ostendendum.

Corollarium.

Cum compositionis & multiplicationis eadem sit operatio: nouus habetur rationes multiplicandi modus ex secundo rationes componendi modo Prop. 20. superiori tradito. In quo ostensum est duas datas rationes A B, C D rationem componere; si fiat vt posterioris rationis antecedens C ad suum consequentem D, ita rationis A B, consequens B ad terminnm E; est siquidem ratio termini primi A ad tertium E, ratio composita ex rationibus datis A B, C D. Ergo etiam eadem ratio A E, ea est quæ producitur per multiplicationem earumdem duarum rationum A B, C. D. Quod eadem probatione superiùs allata ostendi potest; hæc enim methodus ad priorem

A 5	C 2
B 3	D 6
E 9	

rem facilè reuocatur, vt citato loco factum est, quem consule.

Addam tamen ad ampliorem rationum compositionis & multiplicationis intelligentiam, rationem compositam ex duabus rationibus A B, C D non tantùm haberi, si fiat vt C ad D ita B ad alium terminum, vt paulò ante factum est: Sed etiam si fiat vt consequens D ad suum antecedentem C; ita prioris rationis antecedens A ad terminum E. Erit enim ratio E 4 ad B 3 composita ex rationibus A B, C D datis: eadémque proinde genita per rationum A B, C D multiplicationem. Hanc eandem hoc etiam modo haberi poterit. Fiat vt A ad B; ita alterius rationis consequens D ad terminum F: erit ratio C ad F, & composita ex rationibus A B, C D; & genita per earundem rationum A B, C D multiplicationem. Qui diuersi casus, siue modi rationes vel componendi, vel multiplicandi, vnâ omnes probatione superiùs adducta demonstrantur.

E 4	
A 12	C 2
B 3	D 6
	F 3
	—
	2

PROP. XXII. *Theor.*

Ratio Æqualitatis cum alia ratione composita ipsam non immutat; nec rationem immutat, quam multiplicat.

Demonstratio.

Sint duæ rationes, A B, Æqualitatis; & C D alia quælibet: componantur, siue multiplicentur hæ duæ rationes; vt fiat ratio E F, vel composita, vel ex multiplicatione producta. Dico hanc rationem E F eandem esse cum ratione C D. Nam cum rationis A B duo termini A & B sint ex suppositione æquales, tamque compositio, quàm multiplicatio fiat ductis antecedentibus A, C; & consequentibus B D: patet eundem numerum duci in duos numeros C & D. Ergo per Prop. 17. libri 7. elementorum. Producti duo numeri E & F in eadem sunt ratione cum numeri C & D. Ergo si ratio Æqualitatis componatur cum alia qualibet ratione; vel eam multiplicet; eam non immutat. Quod probandum erat.

A 5	C 2	E 10
B 5	D 6	F 30

PROP. XXIII. *Theor.*

Si duarum rationum termini ſint inuersè proportionales: hæ multiplicatæ, rationem producunt æqualitatis.

Demonſtratio.

A 6	C 4	E 24
B 2	D 12	F 24

Sint duæ rationes A B, C D. Sit autem, vt antecedens A ad conſequentem B; ita inuertendo, alterius rationis conſequens D ad ſuum antecedentem C. Dico duas rationes A B, C D compoſitas, ſiue multiplicatas, rationem æqualitatis (vt rationem E F) producere. Nam: cum A, B, & D, C ſint quatuor termini proportionales. Idem numerus fit ex A primo in C quartum; qui fit ex B ſecundo in D tertium per Prop. 19. libri 7. Elem. Sed ductis A & C, item B & D fit compoſitio, vel multiplicatio rationum A B, C D. Ergo ſi duarum rationum termini &c. Quod erat probandum.

Alia Demonſtratio

A 6	C 4	E 24
B 2	D 12	F 24
A 6	G 2	K 12
B 2	H 6	L 12

Cum ex ſuppoſitione rationes A B, & D C ſint æquales: ſi termini rationis A B inuertantur, vt fiat ratio G H: æquales erunt rationes C D, G H. Quod ſi A B & G H in ſe ducantur: producetur neceſſariò ratio æqualitatis K L. Nam tam duo numeri A, G, quàm duo B H ſinguli ſingulis ſunt æquales. Ergo etiam rationes duæ A B, C D in ſe ductæ producunt rationem æqualitatis E F. Nam dum ratio A B ducitur in rationes C D & G H, & producit rationes E F, K L; ita ſe habet per Prop. 17. ratio æqualitatis ad rationem A B; vt tam ratio C D ad rationem E F, quàm ratio G H ad K L ſed C D & G H ſunt rationes æquales ſiue ſimiles: ſimiles ergo erunt rationes E F, K L. Sed K L eſt ratio æqualitatis. Ergo etiam ratio E F erit ratio æqualitatis. Quod erat probandum.

PROP. XXIV. *Probl.*

Duas aut plures rationes diſparatas continuare.

Conſtructio & Demonſtratio.

Datæ ſint duæ rationes A B, C D diſparatæ. Fiat vt C ad D; ita prioris rationis A B conſequens B ad numerum E. Dico abſolutum eſſe, quod proponebatur datas ſcilicet rationes continuari in terminis A, B, E. Quod idem ita quoque abſolui poteſt. Fiat vt prioris rationis conſequens B ad ſuum antecedentem A; ita rationis poſterioris antecedens C ad numerum F: continuatæ erunt datæ rationes in terminis F, C, D, non ſecùs ac in terminis A, B, E. Ex ipſa conſtructione patet ſolutionis demonſtratio. Eſt enim B ad E, vt C ad D. Ergo in tribus terminis A, B, E medius B eſt vtrique rationi communis; prioris ſcilicet conſequens, & poſterioris B E (quæ eſt æqualis facta rationi C D) antecedens. Nec diuerſa eſt probatio in terminis F, C, D. Eſt enim ratio F C æqualis facta rationi A B. Ergo medius terminus C eſt vtrique rationi communis.

A 12,	B 8	C 6	D 3
A 12,	B 8	E 4	
F 9.	C 6	D 3	

ALITER.

Alia eſt eiuſdem problematis ſolutio, quam exhibet Propoſitio 4. libri 8. Elem. quæ eſt eiuſmodi. Ducatur rationis A B conſequens B in rationis C D vtrumque terminum C & D; vt fiant numeri E, F: tum ducatur C in prioris rationis antecedentem A, vt fiat G. Dico terminos G, E, F, continuare rationes datas A B & C D. Nam C multiplicans A & B producit duos numeros G & E in eadem ratione cum ratione A B per Prop. 17. lib. 7. Elem. eodem modo B multiplicans C & D, & producens E F; in eadem ratione cum C D eos producit. Duæ ergo rationes datæ A B, C D diſparatæ, ad alios terminos continuos G, E, F reductæ ſunt.

A 12	B 8	C 6	D 3
	G 72	E 48	F 24

Quod si plures quàm duæ rationes disparatæ, continuandæ proponantur, vt A B, C D, K L. Continuentur iuxta primum modum duæ priores A B, C D in terminis A, B, E: tum fiat vt k ad L ita E ad M. Patet tres illas rationes A B, C D, k L continuari in quatuor illis terminis A, B, E, M.

A 12	B 8.	C 6	D 3.	K 2.	L 8
A 12.	B 8.	E 4.	M 16.		

Quæ eædem continuarentur, si primùm duæ posteriores C D, k L continuentur in terminis N, k, L. Tum fiat, vt reliquæ rationis A B consequens B ad antecedentem A; ita N ad P. Erunt tres rationes disparatæ in æquales continuas reductæ, quatuor terminis P, N, k, L expressas.

A 12	B 8.	C 6	D 3	K 2	L 8
		P 6.	N 4.	K 2.	L 8.

Quod si ex citata Euclidis Propositione 4. libri 8. hoc ipsum præstare lubeat, ita absoluetur. Duæ priores rationes A B, C D, reducantur ad continuatas G, E, F. Tum antecedens K rationis tertiæ k L ducatur in terminos G, E, F rationum continuatarum, & ex ea multiplicatione gignantur tres alij termini H, M, N: qui per Prop. 17. libri 7. Elem. in eadem erunt ratione, in qua erant multiplicati G, E, F; atque adeò & ipsi duas rationes A B, C D connectent. Ducatur demùm tertiæ rationis k L, consequens L, in terminum F, & gignatur P. Qui cæteris terminis H, M, N ex multiplicatione terminorum G, E, F per K genitis adiungatur. Dico tres datas disparatas rationes ad continuas reductas esse; quas exprimunt termini quatuor H, M, N, P. Nam tres priores H, M, N, duas rationes A B, C D continuant, vt dictum est. Quia verò tertiæ rationis antecedens K multiplicans F genuit N: eundem autem terminum F. Multiplicauit eiusdem tertiæ rationis K L consequens L, & produxit P: erunt per Prop. 17. libri 7. Elem. duo termini N, P, & K, L in eadem ratione. Ergo quatuor termini H, N, M, P exhibent tres rationes disparatas A B, C D, K L ad continuitatem reuocatas.

A 12	B 8	C 6	D 3	K 2	L 8
	G 72	E 48.	F 24		
	H 144.	M 96.	N 48		P 32

Quod si alia adhuc ratio, superesset continuanda; eadem methodo id præstaretur. Eius scilicet antecedens duceretur in quatuor terminos H; M, N, P, tres priores rationes exhibentes: consequens autem eiusdem duceretur in vltimum terminum P, genitúsque ad quatuor illos apponeretur. Atque ita deinceps, si plures forent rationes continuandæ. Duas ergo aut plures rationes continuauimus. Quod faciendum erat.

PROP.

PROP. XXV. *Theor.*

Si inter duos terminos rationis cuiuſcunque,alij quotcunque termini medij interiiciantur : ratio illa ex rationibus continuis mediorum terminorum componitur.

Expoſitio.

A 12	C 6.	B 4

Sit ratio A antecedentis, ad B conſequentem quæcunque. Inter cuius terminos A & B interponatur primò medius quiſpiam terminus C vnicus. Dico rationem A ad B compoſitam eſſe ex duabus rationibus A ad C, & C ad B.

Præparatio.

A 12	C 6	E 72
D 6	B 4	F 24

Statuatur terminus D æqualis interiecto termino C vt fiant duæ rationes terminis ſuis ſeorſim conſtitutæ A D, & C B. Tum inter ſe multiplicentur ambæ iuxta Propoſitionem 18. gignetur ex ea multiplicatione ratio E F : cuius antecedens E fit ex antecedentibus A, C, in ſe ductis, & conſequens F ex conſequentibus D, & B.

Demonſtratio.

Ratio E F genita per multiplicationem rationum A D, C B continuatarum componitur ex rationibus ipſis A D, C B per Propoſitionem 22, vel 24. Sed ratio E F æqualis eſt rationi A B. Ergo ratio A B componitur ex rationibus A D, ſiue A C, & C B. Minor probatur. Terminus C medius interiectus inter A & B, multiplicans A producit E : idem etiam terminus C (vel ei æqualis D) multiplicans B, producit F. Cum ergo idem numerus C ducatur in duos numeros A, B : producti E, & F eandem rationem habent inter ſe, quam multiplicati A & B per Prop. 17. libri 7. Elem. Ergo ratio A ad B, medio interiecto quocunque termino C vnico, componitur ex duabus rationibus continuatis A C, & C B. Quod erat demonſtrandum. Quoad hunc primùm caſum, in quo vnicus medius terminus ponitur inter rationis datæ.

Quod ſi duo aut plures medij termini ſtatuantur inter terminos A & B, rationis A B : cuiuſmodi ſunt C & D. Verum nihilominus erit rationem A

B

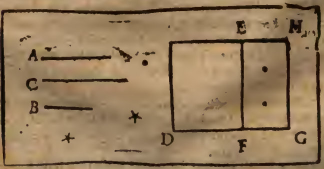
B componi ex tribus continuatis rationibus

| A 12 C 6 D 5 B 4 | A ad C, & C ad D, ac denique D ad B. Quod vt probetur, attendédæ tantùm sunt duæ priores rationes tribus terminis A, C, D constitutæ. Certum ergo est ex præcedenti demonstratione rationem primi termini A ad tertium D componi ex rationibus A C, & C D. Iam verò attendantur duæ rationes A D, & D B: certum etiam est rationem A B componi ex duabus rationibus A D, & D B. Sed ratio A D iam componebatur ex duabus rationibus A C & C D. Ergo ratio A B componi dicenda est ex rationibus tribus A C C D, D B. Atque eodem modo, si plures quâm duo termini inter terminos A & B statuerentur; probaretur ratio A B componi ex illis omnibus mediis rationibus. Quare, si inter duos terminos rationis cuiuscunque &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Theorema hoc, quod in rationum doctrina perillustre est, tanquam principium per se notum non tantum à Geometris veteribus clari nominis: verum etiam à recentioribus veterum placita secutis. Inter quos eximius Geometra R. P. Gregorius à Sancto Vincentio reperitur. Vt videre est libro 8. Princ. 2. Quadraturæ circuli ab eo expositæ. Illud tamen, nec mea quidem sententia immeritò, in theorematum numerum reponi debere contendi libro 1. Prop. 22. Examinis citatæ quadraturæ. Locum consule. Vbi hanc ipsam propositionem ratiocinatione ab hic allata haud admodum diuersa demonstraui. Nec in quantitate tantùm discreta, verùm etiam in continua, demonstrari posse monui; ac demùm obiter demonstratum est. Quod propter theorematis præstantiam, hîc prætermittendum non est.

Sit itaque ratio quædam A B: inter cuius terminos medius statuatur C. Dico rationem lineæ primæ A ad lineam tertiam B componi ex rationibus duabus A ad C & C ad B. Probatur.



Construatur enim rectangulum D E, cuius basis D F sit æqualis lineæ A; altitudo verò F E æqualis lineæ C: quæ eadem altitudo

altitudo F E sit altitudo rectanguli F H; cuius basis est F G æqualis lineæ B. Quia igitur quantitates D F, F E rationis antecedentis D F ad consequentem F E, hoc est, quantitates rationis A C, inter se multiplicantur, vt fiat rectangulum D E: & quantitates F E, F G, rationis F E, ad F G, hoc est, rationis C B, inter se etiam multiplicantur, vt fiat rectangulum F H: erit ratio rectanguli D E ad rectangulum F H composita per Propositionem 20. Composita autem erit per Prop. 23 libri 6. Elem. ex ratione lateris D F ad latus F E, quatenus F E est latus rectanguli secundi F H; & ex ratione lateris F E, vt est latus rectanguli prioris D E, ad latus F G. Sed ratio rectanguli D E ad rectangulum F H eadem est per Prop. 1. lib. 6. cum ratione basium D F, F G. Ergo etiam ratio D F ad F G componitur ex rationibus D F ad F E, & F E ad F G. Hoc est, ratio A antecedentis, ad B consequentem componitur ex rationibus A ad C, & C ad B. Sunt enim ex hypothesi tres lineæ A, C, B, æquales tribus lineis D F, F E, F G. Patet ergo cum vnicus est interpositus terminus, rationem primi termini ad tertium componi ex duabus rationibus, quas cum extremis constituit medius interiectus terminus quicunque.

Quod si plures medij termini interponantur inter datæ rationis A B terminos: eodem ferè modo demonstrabitur ratio A B, ex mediis omnibus rationibus composita. Nam si sumantur tres priores termini duas rationes constituentes: probabitur, vt proximè probatum est, rationem primi termini ad tertium componi ex ratione primi termini ad secundum, & ex ratione secundi ad tertium. Quo posito, primus & tertius terminus tanquam vnus censebitur; & primi termini vices geret, qualis est in superiori schemate basis D G. Secundus verò erit F G, qui statuetur altitudo communis duorum rectangulorum: quorum posterioris basis erit terminus tertius, siue linea quarta, quæ tunc locum suplet termini tertij: & ostendetur, vt hîc iam præstitum est, rationem primi ad tertium componi ex duabus rationibus: sed iam ex duabus rationibus componebatur ratio primi ad tertium, cum tres tantum termini existebant. Ergo cum quatuor existunt id est, cum inter duos datæ rationis terminos; duo termini interiiciuntur medij, ratio primi ad quartum componetur ex rationibus tribus; primi ad secundum: secundi ad tertium: tertij ad quartum. Nec alia afferetur demonstratio: si termini quinque, sex, aut quotcumque extiterint: non secùs ac in quantitate discretâ superiùs ostensum est. Atque adeò planissimum euasit illud Axioma tam insigne, & quidem demonstratione haud adeo à longè petitâ: vt mirer non mediocriter hactenùs prætermissam, & vt Axioma, admissam fuisse Propositionem: quæ reuerà theorema est, medióque non caret; vt ex allata demonstratione cernere est; quo probari possit: quod est à principiorum natura alienum; cum debeant ita esse per se nota, vt nihil prius ex quo pendeant, &

probari possint, reperiatur. Eius porrò demonstrationis omissio non aliunde accepta referri debet (neque enim ex incuria, aut vt operæ parceretur, contigit; vt vel ex ipso Geometra insigni R. P. Gregorio à Sancto Vincentio citato colligitur) quàm à definitione illa quinta libri 6. Euclidis, quam Prop. 20 exposui, perperam intellecta. Nisi enim ipsa primò rationum compositionis notio perspecta fuerit: quid certi ex ea deinceps colligatur?

PROP. XXVI. *Theor.*

Si quantitati cuipiam plures quotcunque, & quæcunque deinceps apponantur: ratio primo positæ ad vltimam componitur ex rationibus quantitatum intermediarum.

Demonstratio.

Quantitati A apponantur quotlibet quantitates B, C, D. Dico rationem primæ A ad vltimam D componi ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D. Nam cum inter duas quantitates A & D duæ mediæ B & C interponantur; ratio A ad D componitur per Propositionem proximè antecedentem ex rationibus intermediis A ad B, B ad C, & C ad D. Ergo. Si quantitati cuipiam plures quotcunque &c. Quod erat probandum.

| A 4 B 8 C 3 D 6 |

PROP. XXVII. *Theor.*

Si inter duas quantitates, aliæ quotcunque interiiciantur; quarum duæ immediatæ sint æquales, siue rationem habeant Æqualitatis: ratio primæ ad vltimam perinde componitur; ac si vnica æqualium illarum quantitatum interponeretur.

Demonstratio.

Inter A & D duæ quantitates æquales B & C interponuntur, siue aliæ cum ipsis interponantur; siue ipsæ solæ, vt hîc. Dico rationem A ad D perinde componi, ac si earum altera tantùm B, vel C interponeretur: componi scilicet ex ratione A ad B; & ratione B ad C: quæ alioqui componeretur ex rationibus A ad B, B ad C (æqualitatis) & C ad D. Nam ratio

ratio æqualitatis B ab C cum alia quavis composita ipsam non immutat per Propositionem 22. huius libri. Ergo ratio æqualitatis B ad C expungi potest ab hac compositione, & ratio B ad D tantùm attendi, omissâ ratione B ad C æqualitatis. Eadem foret demonstratio, si vel plures quàm duæ æquales quantitates interponerentur, plures rationes æqualitatis constituentes: vel plures aliæ rationes inæqualitatis cum ipsis æqualitatis rationibus inter extremas quantitates interiicerentur. Ergo. Si inter duas quantitates aliæ quotcunque interiiciantur &c. Quod erat probandum.

Corollarium ex tribus proximis propositionibus deductum.

Sequitur ex proximis Propositionibus quantitates, inter primam & vltimam quantitatem interiectas; ex quarum rationibus componi probata est ratio primæ ad vltimam; locum inter se permutare posse, aliásque proinde rationes à prioribus omninò diuersas rationem primæ ad vltimam componere. Vt si inter A & D interponantur quantitates B & C: possunt duæ interpositæ quantitates B & C locum permutare, vt refert schema; ac proinde rationes diuersas generare: quæ tamen rationem primæ A ad vltimam D component.

A 4.	B 8.	C 3.	D 6
A 4.	C 3.	B 8.	D 6

Nam ratio primæ A ad vltimam D, semper componetur ex intermediis quibuscúnque rationibus per Prop. 25. libri huius. Ergo ex rationibus: quæ ex permutatione loci quantitatum priorum generantur, eadem ratio primæ ad vltimam componetur.

Quod si ratio quædam media, ratio sit æqualitatis: poterunt reliquarum omnium rationum quantitates siue termini intermedij, inter duos æquales terminos rationem æqualitatis continentes, compingi; ac postea deleri tanquam inutiles. Ratio enim primæ ad vltimam ex reliquis componitur. Vt, ratio datur A primæ ad vltimam D; inter quas quantitates B & C sunt interiectæ æquales: tum prætetea E, vel vnica vel plures aliæ quæcunque. Si E locum permutet, & inter duas quantitates æquales B & C interponatur: poterit expungi E, & simul C; atque adeo duæ rationes E ad C, & C ad D omitti ad componendam rationem primi termini A ad vltimum D: dúæque solum rationes A ad B, & B ad D; quibus ratio A ad D componatur, retineri.

A 4.	B 8.	C 8.	E 10	D 6
A 4.	B 8.	E 10.	C 8.	D 6
A 4.	B 8	———	———	D 6

Nam ratio æqualitatis B ad C interiecto medio termino E componitur per Prop. 25. libri huius ex rationibus B ad E, & E ad C. Sed ratio æqualitatis; atque adeo rationes quæcunque rationem æqualitatis componentes; siue duæ fuerint, vt hîc, cum vnicus terminus E interponitur, siue

plures, pluribus interiectis terminis; in compositione rationis primi termini A ad vltimum D omitti potest, tanquam ad compositionem nihil conferens iuxta Propositionem 27. præcedentem. Atque ex his vniuersaliùs demonstretur modus ille ratiocinandi ex æqualitate, siue ordinata, siue perturbata: quem libro 5. defin. 18. & 19. exponit Euclides, & demonstrat prop. 22. & 23. Quotcunque enim termini inter primum & vltimum, & quovis ordine interponantur: quia eædem sunt rationes: ratio primi ad vltimum ex rationibus intermediis semper componetur. Verùm tam hoc ipsum, quàm reliqua omnia; quæ hactenùs de rationum compositione proposita, & verò demonstrata sunt, iuuat sequenti scholio, quod contemplatione dignissimum est, planissimè declarare. Ecce.

Scholium perinsigne ad rationem compositionem pertinens.

Ostensum est tum Proposirione 25. tum 26. positis ordine pluribus quantitatibus rationem primæ ad vltimam componi ex rationibus continuis illarum omnium quantitatum. Quod, vt axioma, admissum est à geometris pluribus non infimi ordinis. Nunc ante quàm ab hac rationum compositione ad alia gradum facio: eandē nouâ, facillimáque expositione denuò illustrare conabor. Memineris, opinor, aliàs Prop. 5. libri 2. monuisse me summam rationes inter, & numeros fractos conuenientiam reperiri: animaduerteris etiam, sæpiùs hactenùs obseruatam fuisse; nec parùm lucis toti huic rationum tractationi obscuriori ex ea deriuatum; nec minùs deriuari in rationum compositionem, quæ præ cæteris videtur impeditior, hîc obseruaturus es.

Sunto ordine positæ quantitates quæcunque A, B, C, D, E, ratio primæ A ad vltimam E asseritur citatis propositionibus 25 & 26. Componi ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D, ac denique D ad E. Soluatur harum rationum continuitas, & singulis antecedentibus sui subiiciantur consequentes, vt appositum schema refert; & velut fracti numeri censeantur singulæ rationes A B, B C, C D, D E. Dico his positis, si hi omnes numeri fracti in se deinceps ducantur vt A B in B C. Vt fiat fractus F G: tum in F G sequens fractus C D, vt fiat H K; ac denique in hunc H k ducatur fractus D E: vt fiat L M. Dico, inquam, per huiusmodi multiplicationem genitum numerum vltimum L M. Æqualem esse fracto numero, cuius numerator

A 12	B 3	C 4	D 2	E 6
B 3	C 4	D 2	E 6	

A 12	B 3	C 4	D 2	E 6
B 3	C 4	D 2	E 6	
	F 36	H 144.	L 288	
	G 12.	K 24	M 144	

rator sit prima quantitas A 12. denominator autem sit E 6. quantitas vltima. Nec huius assertionis obscura est ratio.

Nam dum facti numeri A B, B C, C D, D E sese deinceps multiplicant: multiplicatur A per tres numeros B, C, D, qui sunt factionum numeratores. Sed iidem tres numeri B, C, D, vt sunt earundem fractionum denominatores, multiplicant etiam numerum vltimum E. Ergo fractionis L M, numerator L ex multiplicatione numeri A per numeros B, C, D, genitus, eandem rationem habet ad denominatorem M ex multiplicatione numeri E per eosdem numeros B, C, D, genitum; quam habet quantitas A ad quantitatem E. Probatur hæc consequentia. Numeratores A, B, C, D; & denominatores B, C, D, E quocunque ordine sese multiplicent, eundem semper numerum producunt, vt libro 1. Propositione 32. declaratum est. Ergo si numeratores B, C, D, sese primò multiplicent, sicut & iidem denominatores B, C D: factique numeri duo æquales, vel potiùs vnus idémque ducatur tam in numeratorem reliquum A; quàm in reliquum denominatorem E; duo numeri L & M producentur: qui per Prop. 17. libri 7. Elem. eandem inter se rationem seruant, quam multiplicati numeri A & E. Cum ergo ratio L ad M composita sit ex rationibus A B, B C, C D, D E: ratio etiam A primæ quantitatis ad quantitatem E vltimam, ex iisdem rationibus componetur. Quod erat declarandum.

Ex qua declaratione constat quomodo positis ordine quantitatibus pluribus ratio primæ ad vltimam non solùm componatur ex rationibus intermediis; sed etiam rationes intermediæ variati omnem in modum possint variato quantitatum ordine. Imò variatis quantitatibus ipsis, aliisque earum loco substitutis non tantùm pari multitudine; sed etiam maiore, vel minore: id enim ex allata demonstratione necessariò sequitur: quæ nisi foret apertissima; verum illud esse vix sibi quisquam persuaderet. Quia porrò rationum multiplicatio à compositione materialiter non differre ostensa est Prop. 21. constat etiam quomodo variæ rationes à primo antecedente, vt A, in superiori schemate, ad consequentem vltimum E, continuatæ; si in se ducantur deinceps quovis seruato ordine eandem rationem A ad E semper producturæ sint: quomodo item (quod mirere) quotcunque rationes, quibuscúnque terminis constent, interponantur inter A & E; si in se ducantur; eandem semper rationem A ad E generare debeant. Vnde infinita possint singularia theoremata ad rationes pertinentia deduci: sed fontem aperuisse, vnde hauriantur, nunc satis esto: esto etiam satis de compositione, & multiplicatione rationum: nunc de earundem diuisione, siue resolutione compositione, & multiplicationi opposita differendum.

PROP. XXVIII. *Defin.*

Rationis per rationem diuiſio, eſt inueſtigatio rationis: quæ ad rationem æqualitatis eandem habeat proportionem: quam habet ratio diuiſa ad diuidentem.

Expoſitio.

Perſimilis, ne dicam eadem, eſt hæc definitio, ei; quam libro primo examinis nouæ Circuli quadraturæ Prop. 14. propoſui: eique; quam Propoſitione 17. ad multiplicationem rationum ſpectantem adduxi, ex oppoſito, vt oppoſitæ eſſe ſolẽt hæ duæ operationes, reſpõdens. Si itaque ratio A B per rationem C D diuidi debeat: quæritur ratio E F: quæ ad rationem æqualitatis G H; cuius videlicet antecedens G, & conſequens H ſint æquales, eandem habeat proportionem: quam habet ratio A B diuiſa ad diuidentem C D.

A 12.	C 3.	E 4.	G 2.
B 4.	D 2.	F 2.	H 2.
A 24.	C 12.	E 2.	G 1.
B 8.	D 8.	F 1.	H 1.

Vt in hoc paradigmate duplam: vt patet, ſi duæ rationes, diuiſa A B, & diuidens C D, ad eundem conſequentem reducantur: ponantur autem duo termini rationis G H & inter ſe, & conſequenti F æquales: ſunt enim tunc rationes inter ſe per Propoſitionem 10. huius. Vt inter ſe ſunt antecedentes rationum ipſarum: eſt autem antecedens A ad antecedentem C; vt antecedens E ad antecedentem G, rationis G H æqualitatis. Atque hæc definitio ab ea haud admodum eſt aliena: quæ ex corollario Propoſitionis 125 libri 8, qui eſt de proportionalitatibus P. Gregorij à ſancto Vinc. colligi poteſt. Cum ait *diuiſionem vnius rationis per alteram, coincidere cum aſſignatione illius rationis*, ſiue Proportionis, *quam continent inter ſe*, ſiue obſeruant, *duæ rationes inuicem diuidendæ*. Vt in ſuperiori ſchemate diuiſio rationis A B per rationem C D, eſt aſſignatio rationis E F: cuius antecedens E ad conſequentem F eandem habet rationem; quam rationem, ſiue aptiùs, proportionem, habet ratio A B diuiſa ad diuidentem C D. Vt autem rationis E F antecedens E ad conſequentem ſuum F; ita eſt ipſa ratio E F ad rationem G H æqualitatis, per Propoſitionem 19. citatam, ob earum rationum conſequentes F & H æquales. Hæc porrò definitio diuiſionis rationis per rationem, ei conformis eſt, quam libro 1. Prop. 40. attuli diuiſionis numeri abſoluti per numerum abſolutum. Eſt enim diuiſio vt ibidem expoſui, inueſtigatio numeri; qui ad vnitatem eandem habet rationem; quam numerus diuiſus ad diuidentem.

tem. Vnitas enim est in absolutis numeris idem, quod in relatiuis, siue rationibus, est ratio æqualitatis; vt etiam suprà Prop. 17. obseruaui. Relatiua enim non nisi cum relatiuis comparari possunt; nec nisi per relatiua explicari. Quæ causa est, vt ratio æqualitatis tam ad multiplicationis, quàm diuisionis rationum per rationes adducenda fuerit, vt vtriusque natura posset explicari. Quamquam hæc æqualitatis ratio non exprimi soleat, sed tantùm connotetur, vt in rationum denominatoribus vnitatem connotari diximus aliàs. Nunc ipsam diuidendi methodum exponamus.

PROP. XXIX. *Probl.*

Rationem per rationem alteram diuidere.

Constructio.

A 12	C 4	E 3	G 4
B 8	D 2	F 4	H 4

Sit ratio A B diuidenda per rationem C D. Diuidatur tum antecedens A rationis diuidendæ per antecedentem C rationis diuidentis, vt fiat E antecedens rationis quæsitæ; tum consequens B per consequentem D, vt fiat F consequens eiusdem quæsitæ rationis. Dico rationem E F eam esse quæ per diuisionem inuestigatur. Quæ scilicet iuxta definitionem Prop. proxima explicatam eandem proportionem habet ad rationem æqualitatis; quam habet ratio A B diuidenda ad diuidentem C D: siue quæ ostendit suis terminis E & F, quænam sit habitudo, siue proportio rationis A B ad rationem C D.

Demonstratio.

Ponatur æqualitatis ratio G H: cuius vterque terminus æqualis sit consequenti F, rationis inuentæ E F. Quia ergo rationis E F antecedens E genitus est diuiso antecedente A per antecedentem C; consequens item F productus est diuiso consequente B per D. Si inuersâ operatione antecedens E ducatur in C, & consequens F in consequentem D, hoc est, ratio E F multiplicet rationem C D: restituetur ratio A B. Atque adeò per propositionem 17. eadem erit proportio rationis G H æqualitatis ad rationem E F multiplicantem; quæ est rationis C D multiplicatæ ad rationem A B per multiplicationem genitam. Ergo etiam inuertendo. Eadem erit proportio rationis A B ad rationem C D: quæ est rationis E F ad rationem G H Æqualitatis. Ergo iuxta præcedentem Propositionem re-

ctà

ctè diuisa est ratio A B per rationem C D, rectéque inuenta ratio E F; cuius consequens F, cum æqualis ponatur vtrique termino rationis G H æqualitatis (liberum enim semper est rationem æqualitatis construere ex quibuslibet terminis inter se æqualibus) ita se habebit ratio E F ad rationem G H, cuius consequens H æqualis est consequenti F, vt antecedens E ad antecedentem G per propositionem 10. Cum ergo antecedens G æqualis sit ex suppositione consequenti F, rationis E F: ita erit E ad F; vt ratio E F ad rationem G H, æqualitatis: ac proinde ratio E F suis terminis rectè exprimit habitudinem siue proportionem, quam habet ratio A B diuisa ad rationem C D diuidentem. Siue igitur diuisio sit inuestigatio rationis, quæ ad rationem æqualitatis expressam, aut connotatam, eandem habet proportionem; quam ratio diuisa ad rationem diuidentem: siue sit assignatio rationis, quæ proportionem rationis diuisæ ad diuidentem, suis terminis exhibeat: rectè determinatur traditâ methodo ratio ex diuisione rationis per rationem genita. Quod præstandum erat.

Alia Constructio.

A 12	C 4	E 24
B 8	D 2	F 32
A 24	C 32	E 24
B 16	D 16	F 32

Datæ sint eædem rationes A B, C D: quarum illa per hanc diuidi debeat. Ducatur rationis C D diuidentis, consequens D in rationis A B diuisæ, antecedentem A, vt fiat E. Ducatur vicissim rationis diuisæ consequens B in rationis diuidentis antecedentem C, vt fiat F. Dico rationem E F eam esse; quæ ex diuisione rationis A B per rationem C D producitur; quæque assignat suis terminis, quam proportionem habeat ratio A B ad rationem C D.

Demonstratio.

Reducantur duæ rationes A B, C D ad æquales consequentes per propositionem 13. Id non aliter absoluitur; quam ductis decussatim terminis A in D, & C in B, vt hîc præstitum est; vt haberetur ratio E F: tum ductis duobus consequentibus inter se, vt habeatur communis consequens. Factâ autem hac reductione, vt in secundo schemate cernitur; ita se habet ratio A B ad rationem C D, vt antecedens A ad antecedentem C per Propositionem 10. hoc est, vt E ad F. Ratio ergo E F ex duobus antecedentibus A & C post reductionem eorum conflata, exprimit proportionem rationis A B diuisæ ad rationem diuidentem C D, eodem planè modo: quo eam exprimeret proportio rationis E F ad rationem æqualitatis; si ipsa æqualitatis ratio terminis constaret, (vt constare

nihil

nihil vetat) æqualibus inter se. & consequenti F, rationis E F: qualis est superius allata æqualitatis ratio G H. Hac ergo methodo ratio quælibet data per alteram quancunque rationem rectè diuidi potest. Et quidem non rarò commodiùs, quàm per præcedentem. Cum enim diuisione terminorum rationis diuidendæ per terminos homologos rationis diuidentis absoluatur; sæpissimè autem contingat diuisionem præcisam minimè occurrere: sæpissimè etiam occurrere necesse est operationem esse impeditiorem ob fractos numeros ex diuisione profectos; à quibus semper immunis est multiplicatio; etsi termini maiores esse non rarò contingat.

Alia Constructio.

Data sit eadem ratio A B diuidenda per eandem rationem C D. Fiat vt rationis diuidendæ consequens B ad antecedentem A eiusdem rationis; ita consequens D rationis C D diuidentis, ad terminum E. Dico rationem; cuius antecedens sit E terminus inuentus, consequens autem sit C (qui est antecedens rationis diuidentis) esse quæsitam rationem, & exhibere habitudinem rationis A B ad rationem C D, vt per diuisionem fieri debet.

A 12.	C 4.	E 3.	E 3.
B 8.	D 2.	D 2.	C 4.

Demonstratio.

Cum ex constructione sit vt B ad A; ita D ad E: erit inuertendo A ad B; ita E ad D: Ergo cum ratio E D æqualis sit rationi A B diuidendæ, eius loco substitui potest, ac suponi; vt diuidenda per C D. Cum igitur duæ rationes E D diuidenda, & C D diuidens eundem habeant consequentem D: ita erit ratio E D diuidenda ad rationem C D diuidentem; vt antecedens E ad antecedentem C per Prop. 10. Quare si ex terminis E & C fiat fractio E C: hæc ostendet, quam proportionem habeat ratio E D, siue A B diuidenda, ad rationem C D diuidentem. Quare ratio E C, ea est quæ quærebatur.

Alia similis Constructio.

Data sit tam diuidenda ratio A B, quàm diuidens C D, eadem quæ supra. Fiat vt rationis diuidendæ antecedens A, ad suum consequentem

A 12	C 4	C 4		D 2	
			8		8
B 8	D 2	B 2	—	E 2	—
			12		12

B, ita rationis diuidentis antecedens C, ad alium terminum E. Tum statuatur ratio ex consequente D rationis diuidentis, & termino E inuento, cuius antecedens sit D, & consequens E. Dico hanc rationem D E, eam esse, quæ inuestigatur: & proportionem exhibere rationis A B ad rationem C D.

Demonstratio.

Cum sit ex constructione C ad E, vt A ad B: erit ratio C E loco rationis A B, diuidenda per C D. Quia verò rationes C E & C D, eundem habent antecedentem C: ita per Propositionem 11. Erit ratio C E diuidenda ad rationem C D diuidentem, vt reciprocè consequens D, rationis C D, ad consequentem E, rationis C E. Quare si fiat ratio D E; cuius antecedens sit D, & consequens E, ea indicabit, quænam sit inter rationes A B & C D proportio: atque adeò erit ratio, quæ per diuisionem quærebatur.

Scholium.

Primo obseruandum hic occurrit, rationem illam, quæ per diuisionem quouis ex superioribus modis inuenta est, conflari ex duobus denominatoribus duarum datarum rationum, diuidendæ scilicet, & diuidentis, hi enim sunt, qui proportionem exhibent rationis diuisæ ad rationem diuidentem. Quod quemadmodum contingat, ne quid te remoretur, accipe, etsi ex iis quæ suprà Prop. 4. de rationum denominatoribus dicta sunt, colligi possint. In prima solutione huius problematis, habetur per diuisionem rationis A B per rationem C D, ratio E F: quam dico ex rationum A B, C D denominatoribus confici, hoc modo. Diuiso rationis A B antecedente A per consequentem B, nascitur denominator K per Prop. 8. Diuiso autem rationis C D, antecedente C per consequentem D, gignitur rationis C D denominator L, siue M (si L reducatur ad denominationem fracti numeri k per Prop. 21. libri 2. huius) quibus positis, ita est ratio A B ad rationem C D; vt illius denominator K ad huius denominatorem M: tam enim K quam M, dum velut antecedentes connotant vnitatem tanquam

A 12.	C 4.	E 3	G 4
B 8.	D 2.	F 4.	H 4
3	2		4
K —	L — *siue*		M —
2	1		2

consequentem

consequentem, sunt ipsis suis rationibus A B & C D similes rationes. Quia verò fracti numeri K, M eundem habent denominatorem, nempe 2: ita erunt inter se: vt ipsi numeratores 3 & 4 per Prop. 10. libri 2. hoc est, vt rationis E F ex diuisione rationis A B per rationem C D genitæ antecedens E ad consequentem F. Nec alia est in sequentibus diuidendi methodis ratio: vt pluribus exponi non sit opus.

Obserua secundò. Rationem inuentam per diuisionem, quovis ex traditis modis, semper eandem habere proportionem ad rationem æqualitatis; quam habet ratio diuisa A B ad diuidentem C D: vt patet, si ratio æqualitatis constituatur ex terminis, & æqualibus inter se, & consequenti rationis per diuisionem inuentæ: qualis est ratio G H in schemate superiori; vt mirari minimè debeas, me ad probationem datarum solutionum, omissa rationis æqualitatis mentione, ex qua definitio diuisionis petitur, quæ ad demonstrationem afferri debet: solius meminisse rationis: quæ proportionem rationis diuisæ ad diuidendam exhiberet: vt alia fert diuisionis allata definitio. Porrò vide quædam alia ad hanc diuisionem spectantia corollario 1. Propositionis 31.

PROP. XXX. *Defin.*

Ratio in rationes resolui dicitur: cum rationis quantitates diuisæ aliquas efficiunt rationes.

Expositio.

Definitio hæc definitioni opposita est ei: quam Propositione superiori 29. ex Euclide retuli rationum compositionis. Quam, quò pluribus exposui; eò paucioribus hanc sum complexurus. Memoriâ itaque repetendum est in primis quomodo duarum rationum quantitates, exempli gratia, duarum E F & C D inter se multiplicatæ, rationem componunt A B: cuius terminus vterque nempe antecedens A, & consequens B est numerus planus iuxta Propositionem 29. libri 1. ac proinde per Propositionem 5. libri 8. Elem. ratio antecedentis A ad consequentem B componetur ex ratione lateris E ad latus C, & ex ratione lateris F ad latus D. Vt citatâ Propositione 19. declaratum est.

A 12	B 8
E 3	C 4
F 4	D 2

Ergo vice versâ. Si antecedens A diuidatur per E, vt fiat F, & consequens B diuidatur per C, vt fiat D. Ratio A B resolui dicenda est in duas rationes E F, & C D iuxta hanc definitionen, eò quod rationis A B tàm quantitas antecedens A diuidatur per E, nouúsque gignatur terminus F,

qui cum E diuisore rationem E F constituit; quàm quantitas consequens B diuidatur per C, indéque oriatur D, qui cum diuisore C rationem creat alteram C D. Nec ratio dispar est in quantitate continua. Quælibet enim ratio composita censeri debet ex natura compositionis, constare duobus rectangulis; quorum vnum ad alterum velut ad rationis compositæ consequentem referri debet, & ad illud rationem habet ex lateribus suis ad singula huius latera compositam iuxta Propositionem 23. libri 6. Elem. Habes ergo quænam ratio in rationes resoluta, vel dissoluta dicatur: atque etiam obiter, quænam sint illæ rationes per resolutionem effectæ, quarum vnius termini ad alterius terminos referuntur. Quod hîc erat exponendum.

PROP. XXXI. *Theor.*

Ratio quælibet in quotlibet rationes resolui potest: quæ præter vnam aliquam dentur omnes.

Expositio.

Proponatur ratio A B. Constat quidem per Propositionem 25, hanc, & aliam quamlibet in quotcunque rationes indeterminatas, siue nullâ earum assignatâ habitudine, aut quantitate dissolui posse interiectis inter rationis datæ antecedentem A & consequentem B tot terminis mediis vno minùs; quot rationes exiguntur, in quas resolutio fieri debet.

A 12 | C 4   D 5   E 6 | B 8

Vt in exemplo apposito ratio A B resoluetur in quatuor rationes tribus mediis terminis C, D, E, inter A & B positis; vt habeantur quatuor rationes A C, C D, D E, E B nulla earum certâ assignatâ habitudine. At verò si rationum habitudo siue quantitas desideretur: assero non omnium assignari posse; sed vnam earum aliquam excipi debere; cuius species ignota sit, vel quæ dati non potest.

Demonstratio.

Demonstratio.

A 12	C 4	B 8
G 3	K 1	
H 1	L 2	

Si ratio A B in duas rationes, quæ ipsam componendi sunt capaces, resoluenda sit: id absoluetur medio vnico termino interiecto, vno scilicet minùs, quàm duæ rationes. Dico ergo ex his duabus rationibus alterutram in specie assignari posse, vtramque non posse. Vt si prior ratio, cuius scilicet antecedens est A, eadem est cum ratione G H; posterior ratio, cuius consequens futurus est B, est ignota & indeterminata. Fiat enim vt G ad H; ita A ad C: & terminus C, inter A & B medius interponatur: resoluta erit ratio A B in duas rationes A C, C B ex quibus componi potest (sunt enim aliæ innumeræ, ex quibus eadem ratio A B componi nata est) quarum prior A C in specie est assignata, eadem nimirum cum ratione G H. At species rationis posterioris C ad B non potuit assignari: sed ex priore A ad C stabilitâ & determinatâ, per se consequitur. Similiter, si duarum rationum, rationem A B componentium posterior determinetur, rationíque K L æqualis esse debeat; si fiat, vt eius consequens L ad suum antecedentem k; ita consequens B ad antecedentem C: ísque terminis C medius statuatur inter A & B; ratio A B in duas rationes A C, C B, quæ ipsam componere aptæ sunt, resoluta est; earúmque posterioris C B species nota, siue data ante resolutionem esse potuit, cuiusmodi est ratio K L; tunc autem rationis prioris A C species non potuit assignari; sed eam ex suppositione rationis C B, siue k L, consequi necesse est, vt eius cognitio potiùs inuestigetur stabilita ratione C B, quàm detur, aut assignari queat. Illud porrò caput est: quod hîc declarari, & ostendi debet.

Obserua itaque hanc rationis A B resolutionem in duas rationes ipsam componentes; quarum vna assignatur, vt G H, coincidere cum diuisione rationis A B per rationem G H; quemadmodum suprà Propositione 21. ostensum est compositionem rationis ex rationibus datis coincidere cum rationum componentium mutua multiplicatione; sibi enim ex opposito semper respondent, tam compositio, & dissolutio; quàm multiplicatio, & diuisio, & siue quantitates absolutæ sint, siue, vt hîc, relatiuæ. Et verò, vt clariùs, quod assero, innotescat: si superior allata ratio A B per datam rationem G H diuidatur ratio, quæ per hanc diuisionem generatur, alia non est quàm ratio C B, quæ habetur: si vt suprà dictum est, fiat vt G ad H, ita A ad C; & terminus C inter A & B medius interponatur. Construatur enim schema in hunc modum. Sit ratio A B diuidenda

A 12	A 12	C 4	E 8
B 8	C 4	B 8	F 8
G 3			
H 1			

per rationem A C: quæ ex ſuppoſitione, æqualis, vel ſimilis eſt rationi G H diuidenti datæ. Prodibit ex ea diuiſione ratio C B. Nam cum rationes A B diuidenda, & AC diuidens habeant eundem antecedentem A; ita erit ratio A B ad rationem A C; vt rationis A C, conſequens C, ad rationis A B, conſequentem B per Prop. 11. huius. Ratio ergo C B exhibet Proportionem rationis A B diuiſæ ad rationem A C, ſiue G H diuidentem. Ergo per expoſitionem Propoſitionis 28. diuisâ ratione A B per A C, ratio C B producitur. Quod etiam ita concludetur. Seponatur ratio E F æqualitatis: cuius terminus vterque ſit æqualis conſequenti B rationis C B. Quia ergo ratio A B ad rationem A C ita ſe habet, vt antecedens C rationis C B, ad eiuſdem conſequentem B, ſiue ei æqualem E antecedentem rationis E F æqualitatis: vt autem C ad E; ita eſt per Prop. 10. huius ratio C B ad rationem E F, eò quod conſequentes B, F ſint æquales: ita erit ratio A B diuiſa ad A C diuidentem, vt ratio C B ad rationem E F æqualitatis. Ergo ratio C B per citatam Prop. 28. ea eſt, quæ produci debet diuisâ ratione A B per rationem A C, ſiue G H.

Cum ergo eadem ratio C B; quæ per reſolutionem rationis A B in duas rationes; quarum vna, nempe A C, ſiue G H data eſt; habebatur: habeatur etiam per diuiſionem eiuſdem rationis A B per eandem rationem A C, vel G H; ita vt reſolutio eadem ſit ſaltem materialiter cum diuiſione; non mirum, ſi quemadmodum cum ratio aliqua per datam rationem diuiditur, non poteſt ſimul dari ipſa ratio per diuiſionem producenda, ſed ignota eſt donec abſoluta diuiſione innoteſcat: ita etiam cum ratio in duas rationes reſoluenda eſt, quarum vna data eſt, altera dari non poteſt niſi per ipſam reſolutionem.

Nec aliter oſtendetur rationem A C dari non poſſe, ſi eadem ſuperior ratio A B reſoluenda ſit in duas rationes; quarum poſterior C B, eundem ſcilicet conſequentem B habens, nota vel data eſt, data ratione K L: cui fiat æqualis ratio C B. Oſtendetur enim diuisâ ratione A B per rationem datam C B produci rationem A C: quæ producitur eadem ratione A B reſolutâ in duas rationes; quarum poſterior, ſiue conſequenti B, rationis reſoluendæ adhærens, datur, cuiuſmodi eſt ratio C B, quæ ex ſuppoſitione æqualis eſt datæ rationi K L. Ex qua diuiſionis, & reſolutionis identitate colligetur, vt priùs, vtramque rationem A C, C B, in quas reſoluitur ratio A B, dari non poſſe: ſed datâ C B, alteram A C ignotam eſſe, notámque fieri per ipſam reſolutionem, quemadmodum notus ſit quotiens per ipſam numeri

A 12	C 4	B 8
K 1		
L 2		

per

per numerum diuiſionem.

Patet ergo datam rationem in duas rationes reſolui poſſe, quarum alterutra, ſiue prior, ſiue poſterior, data ſit: non autem vtramque ſimul dari poſſe; ita vt reſolutio datæ rationis in duas tanquam eam componentes abſoluatur medio termino interiecto inter antecedentem & conſequentem rationis reſoluendæ: qui ante reſolutionem abſolutam, ad vtrumque terminum extremum rationem habeat datam. Qui eſt primus caſus in allata Propoſitione attendendus. Nunc verò alter caſus perpendendus eſt. An ſcilicet, cum data ratio in plures quam duas rationes reſoluenda eſt, dari omnes præter vnam poſſint, vt fert Propoſitio: & præterea quænam illa ignota eſſe poſſit an prima, an vltima, an etiam intermedia?

Itaque data ſit ratio A B. Dico eam reſolui poſſe in tres rationes: quarum duæ quæcumque datæ ſint, dum tertia non datur, ſiue prima, ſiue vltima, ſiue inter datas media illa fuerit. Dentur enim duæ rationes

A 12	C 16	D 32	B 8
G 3	K 1	R 4	
H 4	L 2	S 1	

G H, & K L, quæ in terminis A, C, D continuentur: fiat ſcilicet, vt G ad H, ita A antecedens rationis reſoluendæ, ad terminum C; & vt K ad L ita conſequenter fiat C ad D iíque duo termini C & D inter datæ rationis terminos A & B ſtatuantur. His poſitis manifeſtum eſt rationem A B reſolutam eſſe in tres rationes A C, C D, D B: quarum vltima D B dari non poteſt. Quod eadem ratiocinatione concludi poteſt, quà ſuperior primus caſus, in quo vnicus medius terminus inter A & B ſtatuitur, probatus eſt. Nam ſi inter A & B vnicus terminus D ſtatuatur medius, ita vt ratio A B in duas rationes A D, D B reſoluatur: iam in primum illum caſum recidimus, in quo datur ratio A D nota eiúſque ope altera D B haberi poteſt. Tunc autem conſtat non tantùm rationem A D notam eſſe, ſed etiam duas rationes A C & C D, ex quibus componitur; ſunt enim eædem cum duabus rationibus datis G H, K L. Eodem modo ſi duæ rationes poſteriores aſſignarentur, vt K L & R S: reliqua tertia dari non poteſt: ſed per reſolutionem ipſam inueſtigatur. Si enim fiat, vt S ad R, ita rationis A B conſequens B ad terminum D; & vt L ad K, ita terminus D ad alium terminum C: erunt duæ rationes C D, D B, notæ: prima verò A C non datur, vt nota; ſed velut ignota inueſtigatur; perindè ac ſi duæ tantum rationes forent A C, C B; ex quibus ratio A B compoſita foret, ac proinde in eas reſoluenda. Duæ enim C D, D B rationes notæ ſunt; & vnicam rationem C B componunt: ex qua deinde, & vnà cum ratione primâ A C, ratio A B componitur.

Quod ſi duæ rationes datæ, terminis A & B, rationis A B reſoluendæ, adhæreant: non ſecùs quam priùs tertia media ratio, nota dari non poteſt; ſed,

ſed per reſolutionem rationis A B poteſt innoteſcere, & definiri. Vt in eodem ſchemate ratio A B in tres rationes diſſolui debet: quarum prima ſit G H, vltima verò R S. Si fiat vt G ad H, ita A ad C: & vt S ad R, ita B ad D: Iam ratio A B componetur ex tribus rationis rationibus A C, C D, D B: quarum duæ A C prima, & D B vltima dari poſſunt: media verò C D non poteſt eſſe nota, ſi notæ ſupponantur duæ A C, D B. Nam cum duæ A C, D B notæ ſint; notus erit terminus D, & definitus: cum ſupponatur rationem habere notam (rationem ſcilicet R S datam) ad terminum B notum. Nota ergo eſt ratio antecedentis A conſequentem D: quæ ratio A D ex duabus rationibus A C, & C D componitur, ac proinde in eas reſolui poteſt: quare cum ex duabus rationibus A C, C D, in quas reſolui poteſt ratio A D, nota ſit A C; altera C D, vt nota non poterit dari, ſed per reſolutionem ipſam determinabitur; vt in primo caſu (qui cum hoc ipſo idem eſt) declaratum fuit. Quod idem oſtendi perinde poterit aſſumptis rationibus duabus poſterioribus C D, D B in quas reſolui poteſt nota ratio C B: earum autem poſterior D B, æqualis datæ rationi R S, nota eſt. Ergo prior C D non datur ante reſolutionem, ſed per eam inueſtigatur, vt per diuiſionem rationis C D datæ per datam rationem D B, illa ipſa ratio C D inueſtigatur, vt diuiſionis quotiens. Vt ſupra declaratum eſt.

Quod ſi ratio A B in plures quàm tres rationes ſoluẽda ſit oſtendetur eas omnes rationes dari poſſe vnica ſola excepta: quæ ſit vel prima vel vltima vel alia quælibet ex intermediis. Nec aliter oſtendetur; quam quomodo proximè oſtenſum eſt, rationem: A B reſolui poſſe in tres rationes: quarum duæ poſſunt aſſignari quælibet: tertiam autem ex iis tribus quamlibet neceſſe eſt ignorari ante reſolutionem. Quare ratio quælibet in quotlibet rationes, & quaſcunque, vnicâ exceptâ reſolui poteſt. Quod erat oſtendendum.

Corollarium. I.

Ex huius propoſitionis allata demonſtratione colligitur facilis æquè ac iucunda methodus rationem per rationem alteram diuidendi: quæ ſic habet. Sit ratio A B diuidènda per datam rationem G H terminis quibuſcunque expreſſam. Fiat vt G ad H, ita rationis A B diuidendæ antecedens A ad terminum C: cui velut antecedenti aſſignetur conſequens B, ille ipſe, qui conſequens eſt rationis diuidendæ A B. Dico per diuiſionem rationis A B per rationem G H generari rationem C B. Illud enim ſuperius euidenter demonſtratum eſt: vbi diuiſionem rationis per rationem, oſtendi cum reſolutione rationis in duas

A	12	G	6
B	8	H	2
C	4		
B	8		

duas rationes conuenire, & vtriusque eundem effectum esse.

Hanc solutionem hoc etiam modo licebit obtinere. Fiat vt rationis G H diuidentis consequens H ad antecedentem G; ita consequens B rationis A B diuidendæ ad terminum C: cui velut consequenti tribuatur antecedens A ille ipse, qui rationis A B est antecedens. Dico rationem A C, eam esse quæ ex ratione A B diuisâ per rationem G H, siue per rationem, cuius antecedens est C, & consequens B (quæ ex constructione æqualis est rationi G H) generari debet.

A 12	G 6
B 8	H 2
A 12	
C 24	
B 8	

Eadem est probatio, quæ proximè relata ex superioribus. Ratio enim A B hac methodo resoluitur in duas rationes A C, C B: quarum C B æqualis est datæ rationi G H diuidenti. Ergo altera ratio A C, ea est quæ per diuisionem generari debet: siquidem resolutio hæc diuisioni æquiualet. Vt ostensum est. Vnde præterea sequitur.

Corollarium 2.

Ex propositionis huius demonstratione constat rationis alicuius resolutionem in duas rationes, quarum vna data sit: rationes easdem exhibere, quas exhibet diuisio eiusdem rationis per datam illam rationem: Id enim in dicta demonstratione probatum est. Atque adeò quod suprà Prop. 21. de multiplicationis & compositionis rationum conuenientia materiali, & formali disconuenientia ostensum est: idem hîc de rationis cuiusvis resolutione, & eiusdem diuisione asseri debet: eas scilicet materialiter conuenire, differre formaliter (diuersæ siquidem sunt vtriusque definitiones, quas Prop. 28. & Prop. 30. exposui) vt non minori iure rationum resolutio: & diuisio vnà eadémque operatio censeri possint, quam rationum compositio, & multiplicatio. Quod etsi ex proxima demonstratione constet euidenter: quia tamen hæc rationum contemplatio non adeo trita ad earum cognitionem percipiendam momenti est grauissimi: eandem data hîc occasione apertius expono. Quare.

Duæ sumantur rationes continuatæ (si enim non continuari contingat: continuari possunt, vt ex hac constat Propositione) quales sunt A C, & G B, medio termino vtrique communi connexæ; dum prioris idem est consequens, & antecedens posterioris, nempe C, aut G: ita vt in hunc modum A 12 C 4 B 8 duæ rationes A C, G B continuentur: æquales enim supponuntur duo termini C & G; eorúmque alteruter, vt C, duorum vices gerit. Si igitur ratio A C diuidatur per rationem G B: quæ diuisio iuxta propositionem

A 12	G 4	H 3
C 4	B 8	L $\frac{4}{8}$
E 3	F $\frac{4}{8}$	

ſuperiorem 29. abſoluitur diuiſis rationis A C ſingulis terminis A & C per terminos ſingulos G & B rationis diuidentis G B: ex ea diuiſione producetur ratio H L. At ſi eædem duæ rationes A C, G B reſoluantur. Iuxta definitionem Prop. 30. expoſitam, debent per Propoſitionem 31. duo antecedens A & G diuidi per ſuos conſequentes C & B: ex qua diuiſione naſcentur termini E, & F iidem cum terminis H, L. Æquales enim ſunt in vtraque diuiſione numeri tam diuidendi A, C, & A G; quàm diuiſores G B, C B ex ſuppoſitione. Ergo æquales etiam eſſe debent producti duo H, L, duobus productis E, F. Atque ita in hoc caſu, in quo rationes duæ continuantur; reſolutio eodem modo abſoluitur quo diuiſio, eademque dici poteſt materialiter eò quod termini G C in vtraque iidem materialiter ſint; formaliter tamen inter ſe differunt. Nam C eſt conſequens rationis A C; at G eſt antecedens alterius rationis G B. Differunt item formaliter; eò quod in diuiſione diuidi debet antecedens A rationis A C per antecedentem G rationis G B; & illius conſequens C per huius conſequentem B. At in reſolutione duo antecedentes A & G ſinguli per ſingulos ſuos conſequentes C & B diuidi debent. Quæ omnia, quàm aptè iis, quæ de compoſitione, & multiplicatione rationum ſuperiùs dicta ſunt, ex oppoſito reſpondeant; contemplari iuuat, vt ex contrariorum collatione maior, vt ſolet, lux vtriſque concilietur.

A 12	G 4	H 3
C 4	B 8	L $\frac{4}{8}$
E 3	F $\frac{4}{8}$	

Ecce itaque ſi duæ rationes G B, H L (quarum illa rationem A C diuiſit, genuitque H L) in ſe mutuò ducantur: generabitur per hanc multiplicationem ratio A C diuiſa: eritque per multiplicationis rationum, definitionem Propoſ. 17. allatam, vt ratio æqualitatis ad rationem H L multiplicantem, ita ratio G B multiplicata ad rationem A C per multiplicationem genitam. Erit præterea vterque rationis A C terminus planus numerus per defin. 16. libri 7. Element. Ac proinde ratio antecedentis A ad conſequentem C tanquam plani ad planum componetur per Prop. 5. libri 8. Elem. ex ratione lateris G ad latus B, & ex ratione lateris H ad latus L; vno verbo, ratio A C componitur ex rationibus G B, & H L; ex quarum multiplicatione mutua producitur ratio A C. At verò ſi duæ rationes C E, B F componantur: aliæ obſeruantur formalitates planè diuerſæ. Nam primò quidem duci debent vtriuſque rationis termini in ſe mutuò, antecedens ſcilicet C in ſuum conſequentem E; & antecedens B in ſuum item conſequentem F ex compoſitionis definitione Prop. 19. explicatam. Fiunt verò ex ea multiplicatione duo numeri plani A & G per Defin. 16. lib. 7. Elem. Ac proinde ratio numeri A ad numerum G componetur per Propoſitionem 5. libri 8. Elem.

Elem. ex ratione antecedentis C ad antecedentem B alterius rationis B F: & ex ratione consequentis E ad consequentem F. Tam ergo diuisio rationis per rationem, à resolutione eiusdem rationis in duas rationes; quarum vna data sit (quæ scilicet rationi respondet, quæ in diuisione diuidentis munere fungitur) formaliter differt: quàm multiplicatio mutua duarum rationum ab earundem compositione. Materialiter autem tam diuisio cum resolutione; quàm multiplicatio cum compositione conueniet, eadémque erit semper: quoties duæ rationes ad has vtrasque operationes adhibendæ, continuatæ fuerint: sin secùs; & formaliter & materialiter etiam discrepabunt; vt experiere, si in hoc schemate terminus G, diuersus à termino C statuatur, & abrumpatur continuatio rationum A C, G B. Tunc enim ex diuisione rationis A C per rationem nouam G B, nascetur ratio etiam noua H L; atque adeò diuersa à ratione E F: quæ per resolutionem earundem rationum A C, & G B (mutato, vt suppositum est, termino G) nasceretur. Quia tamen non tantùm duæ, sed quotlibet rationes disparatæ possunt semper continuari: ideo diuisio cum resolutione, vt compositio cum multiplicatione pro vna eadémque operatione sumi, confundíque, vt vulgò solet, tutò possunt: quamquam aliàs sublatâ continuatione rationum, non sine grauium errorum periculo possint idem esse censeri. Quod autem de duabus solùm rationibus hîc explicatum est: idem de pluribus quotcunque est intelligendum. Etsi enim tum ad diuisionem tum ad resolutionem duæ tantùm rationes adhibeantur: hæ tamen alias rationes continere possunt; quæ & diuidi & resolui in alias possint: velut si numerus absolutus per alterum numerum diuideretur, factúsque ex diuisione numerus per alium rursus foret diuidendus. Consule Propositionis huius 31 casum secundum ad plures rationes pertinentem superiùs explicatum.

PROP. XXXII. *Theor.*

Ratio quælibet in easdem rationes resolui potest vnâ exceptâ: in quas alia quælibet ratio resoluta est.

Expositio & Demonstratio.

Paradoxum quidpiam sapit hæc Propositio: vix enim sibi quis primâ fronte persuadeat ex vnica sola ratione inter infinitas, pendere duarum rationum ex infinitis illis compositarum diuersitatem; præsertim, si liberum sit, vt liberum verè est, rationem illam quovis ordine inter reliquas assumere. Plana tamen est Propositio, nec magis obscura eius veritas;

quàm si asserantur duo numeri absoluti in partiales æquales numeros vno excepto resolui posse: vnius enim inæqualitas, numerorum inæqualitatem inuehere sola potest. Sint ergo duæ rationes A B, A D: quarum hæc illius est dupla per Propositionem 11. cum enim ambarum idem sit antecedens A, ita est ratio A D ad rationem A B; vt huius consequens B ad illius consequentem D. Iam inter vtriúsque terminos A & B, item A & D, quotcunque iidem termini, duo, verbi gratiâ, E, F interponantur. Resoluetur, vel diuidetur vtraque ratio A B, & A D, in tres rationes: illa quidem in tres A E, E F, F B; hæc verò in tres A E, E F, F D: eruntque duæ A E, E F in vtraque æquales: tertiæ verò F B, F D, erunt inæquales. Rursùs eadem ratio A D resoluatur in tres rationes A E, E G, G D; ita vt ratio G D similis sit rationi F B: si nimirum fiat, vt B 8 ad F 6; ita D 4 ad G 3. Tunc rationes A B, A D in easdem rationes resoluuntur vnâ mediâ excepta E G: ex qua sola proinde petetur rationum A B, & A D inæqualitas. Denique, si fiat vt F ad E, ita G ad H; ita vt duæ rationes H G, G D æquales sint duabus rationibus E F, F B singulæ singulis; tunc eadem ratio A D soluetur in tres rationes A H, H G, G D. Quarum duæ posteriores H G, G D æquales erunt duabus rationibus E F, F B posterioribus, in quas soluitur ratio A B: sed prima ratio A H sola rationi soli A E inæqualis erit, & ex ea sola proficiscetur inæqualitas duarum rationum A B, A D. Patet itaque duas diuersas rationes, in quotcunque rationes (si enim plures termini, quàm duo, vt hîc, interponerentur; eadem ratio foret) multitudine pares resolui posse: quæ omnes vnâ exceptâ sint vtrobique æquales, quemvis locum inter reliquas occupet ratio inæqualis quare ratio quælibet in easdem &c. Quod erat probandum.

A 12	A 12	A 12	A 12
E 4	E 4	E 4	H 2
F 6	F 6	G 3	G 3
B 8	D 4	D 4	D 4

Scholium.

Non perperam obseruaueris rationes illas inæquales, ex quibus duarum rationum A B, & A D inæqualitas nascitur, & vnde A D dupla creatur rationis A B, semper habere debere consequentes huiusmodi, vt in ratione A B consequens duplus sit consequentis ei respondentis rationi in ratione A D. Vt, quia duæ partiales rationes vltimæ F B, F D sunt inæquales, & ex eis petitur inæqualitas rationum totalium A B, A D: quarum hæc illius est dupla: debet rationis F B, consequens B duplus esse consequentis D ad rationem F D pertinentis vt scilicet per citatam Prop. 11. huius. Ratio F D dupla sit rationis F B propter æquales antecedentes F. Similiter quia rationes duæ mediæ E F, E G, sunt inæquales: illius consequens

quens F duplus est huius consequentis G, propter allatam causam: quæ eadem futura est quotquot fuerint rationes in quas resolutæ fuerint rationes A B, & A D.

Obiiciat hîc quispiam. Si est tota ratio A D ad totam rationem A B, vt ratio partialis F D ad partialem rationem F B. Nempe A D dupla est rationis A B, & F B dupla rationis F B: si ratio F D dematur ex ratione A D, & F B ex ratione A B: erit & reliqua ratio ex A D, dupla reliquæ rationis ex A B per Propositionem 19. libri 5. Elem. quâ constat. *Si fuerit vt totum, ad totum, ita ablatum ad ablatum: ita fore reliquum ad reliquum, vt totum ad totum.* Ergo ratio A F composita ex A E & A F, quatenùs relinquitur ex tota ratione A D, est dupla rationis A F relictæ ex ratione tota A B. Quod est absurdum: cum binæ illæ rationes A F relictæ ex A D & A B, sint ex suppositione æquales, & ex æqualibus A E, E F vtrobique compositæ. Quid ad hoc respondeant vix occurrat iis: qui rationum compositionem cum additione, & cum subtractione diuisionem confundunt, non sine vtrarúmque naturæ ignoratione: quas si rectè distinguerent haud quaquam in respondendo laborarent.

Respondetur itaque non fieri hîc rationum ex rationibus veram subtractionem: sed rationum componentium omissionem. Expono. Vt ex ratione A B subtrahatur per Propositionem 16. ratio F B eiusdem cum ratione A B consequentis (vt ex præscripto illius Propositionis necessarium est) debet antecedens F rationis subtrahendæ, ex antecedente A rationis maioris A B subtrahi, & reliquo numero L idem consequens B assignari; vt fiat ratio L B reliqua per subtractionem. Eodem modo ex ratione A D, factâ rationis F D subtractione, relinquitur ratio L D: cuius idem est consequens D cum consequente rationum A D, & F D. Atque ita verum esse contingit quod obiiciebatur, nimirum reliquam rationem L D duplam esse rationis reliquæ L B per Propositionem ill 19. libri 5. Elem.

A 12	B 8	A 12	D 4
F 6	B 8	F 6	D 4
L 6	B 8	L 6	D 4

At verò cum ex ratione A B composita ex rationibus A E, E F, F B, resecatur ratio vltima F B; vltima item ratio F D ex ratione A D composita ex rationibus A E, E F, F D expungitur; non fit diminutio illa per veram rationis à ratione subtractionem, vt patet ex veræ subtractionis paradigmate proximè allato: in quo factâ subtractione rationis F B à ratione A B; reliqua fit ratio L B eundem consequentem B sibi vendicans; qui ad totam rationem A B, & ad subtractam F B pertinebat. Quod idem in alterius rationis F D subtractione à

A 12	A 12	A 12	A 12
E 4	E 4	E 4	H 2
F 6	F 6	G 3	G 3
B 8	D 4	D 4	D 4

ratione A D obseruatur: reliqua enim ratio L D eundem consequentem D postulat, qui ad rationes A D, F D pertinebat. Non fit, inquam reiectio illa rationis F B à ratione A B, vel rationis F D à ratione A D per subtractionem rationum: sed per solam rationis F B abrasionem à ratione A B, & rationis F D à ratione A D ita vt ex tribus rationibus A E, E F, F B; ex quibus ratio A B componebatur, duæ tantùm supersint A E, E F; ex quibus componitur ratio A F reliqua post reiectionem rationis F B: & ex quibus iisdemmet eadémet ratio A F cõponitur resectâ ratione F D ex ratione A D. Similiter. Si ex rationibus A B & A D (hîc tertius est paradigmatis ordo) reiiciantur rationes mediæ, E F ex illa, & E G ex ista: reliquæ fient ex ratione A B, duæ disparatæ, siue discontinuæ rationes A E & F B; ex ratione verò A D, duæ discontinuæ A E, G D; duabus A E, F B æquales singulæ singulis; siquidem ratio G D, æqualis est posita superiùs in expositione rationi F B. Idem esto iudicium, si ex ratione A B ratio prima A E; & ex ratione A D vltimi ordinis ratio prima A H expungantur: reliquæ enim fient ex ratione A B duæ continuatæ rationes E F, F B ex quibus componitur ratio E B: ex ratione autem A D, duæ continuatæ H G, G D æquales singulæ singulis E F, F B: ex quibus componitur ratio H D æqualis rationi E B. Atque ita quocunque in loco ordinum suorum statuantur duæ rationes dissimiles; ex quibus proficiscitur rationum A B & A D compositarum dissimilitudo; siue in primo, siue in vltimo, siue in aliquo ex mediis (si plures tribus rationes ordinem constituant) semper rationes reliquæ, sublatis dissimilibus, æquales erunt singulæ singulis, siue continuæ fuerint, siue discontinuæ, vt ostensum est. Quod ipsum planissimè proponi potest & explicari in quantitatibus absolutis.

A 20	C 18
E 12	E 12
F 2	F 2
B 6	D 4

Duo sunt inæquales numeri A & C. Ille ex tribus numeris E, F, B simul sumptis coalescit: hic verò ex tribus, E, F D: quorum duo E & F vtrobique reperiuntur æquales. Ita vt tota inæqualitas numerorum A & C sit penes duas partes reliquas B & D. Si ergo duæ illæ partes B & D inæquales abradantur; duæ reliquæ E, F vtrobique æquales erunt, & simul additæ æqualem conflabunt numerum. Ita omninò in relatiuis quantitatibus solo relationis seruato discrimine contingit; vt patet ex superiori paradigmate: in quo rationes A B, A D sunt inæquales. Illa componitur ex tribus rationibus A E, E F, F B: hæc ex tribus A E, E F, F D; in quas & resoluuntur. Si ergo ex A B, & A D duæ rationes F B, & F D inæquales, & inæqualitatem in ipsas rationes A B, A D inducentes ex ipsis A B, A D eradantur; reliquæ rationes vtrobique A E æquales erunt, &

A 12	A 12
E 4	E 4
F 6	F 6.
B 8	D 4

componentur

componentur ex æqualibus rationibus A E, E F. Quæ rationum A B & A D mutilatio à vera subtractione longè est diuersa, vt declaratum est.

PROP. XXXIII. *Probl.*

Datam rationem in rationes quotlibet resoluere: quarum omnes præter vnam datæ sint.

Constructio.

Sit data ratio A B in tres rationes resoluenda. Id si tantùm præstandum proponatur nullâ rationum quantitate præstitutâ, dicto citius absoluitur duobus terminis E & F inter antecedentem A datæ rationis, & eius consequentem B interpositis. Ratio enim A B componitur per Prop. 25. ex tribus rationibus A E, E F, F B: in quas & resoluitur

A 12	E 5	F 6	B 8

At si eadem ratio A B in tres rationes resoluenda sit, quarum duæ quælibet assignentur (tres enim assignari nequeunt, vt fert Propositio 31 superior) id haud multò maiori operâ præstabitur. Sit enim ratio A B in tres resoluenda: quarum duæ datæ sint, nempe G H tripla, & K L subsesqui altera. Fiat vt G ad H, ita A ad E: & vt K ad L; ita E ad F: duóque termini inuenti E & F interponantur. Præstitum erit: quod quærebatur componitur enim ratio A B ex tribus rationibus A E, E F, F B, in quas & resoluitur: quarum duæ A E, E F datæ sunt reliqua F D per se ex positis emanante. Quia verò duæ datæ rationes G H, k L sicut nec ratio tertia, quæ per se emanat, nullum certum ordinem exigunt, in quo collocentur, vt superiùs declaratum est: Si fiat vt H ad G; ita rationis A B, consequens B ad M: & vt K ad L, ita A ad N: duóque termini inuenti N & M interponantur inter A & B. resoluetur ratio A B perinde vt ante in tres rationes A N, N M, M, B: quarum duæ A N, prima, & M B vltima, datæ sunt: tertia verò N M (quæ media est) ex aliis positis determinatur seipsa. Eodémque modo sæpiùs misceri poterit rationum trium ordo: in quas ratio A B resoluenda proponitur. Quare datam rationem in rationes quotlibet resoluimus: quarum omnes præter vnam datæ sunt. Quod faciendum erat.

A 12	E 4	F 6	B 8
G 3	K 2		
H 1	L 3		
A 12	N 18	M 24	B 8

PROP. XXXIV. *Probl.*

Rationem datam in rationes quotlibet æquales resoluere.

Expositio.

Ostensum est Propositione antecedente, quomodo ratio quælibet in quotlibet rationes resolui possit nullâ æqualitatis factâ mentione: imò in quotlibet rationes datas vnâ exceptâ: adeò vt rationes datæ, sint æquales. Hîc verò proponitur vt ratio data resoluatur in rationes quotlibet, non datas quidem (id enim proponi non potest) sed quæ sint omnes ne vnâ quidem exceptâ, æquales. Quod problema in illud recidere videtur: quo quæratur progressio geometrica; cuius primus terminus sit datæ rationis antecedens; vltimus autem eiusdem rationis consequens: constet verò tot mediis terminis progressiuis vno minùs, in quot rationes æquales data ratio resoluenda proponitur. Vt, si ratio A B in duas æquales rationes resoluenda proponitur: quid aliud quæritur quàm vt instituatur progressio tribus terminis constans: quorum primus sit A; tertius autem B? vel, vt reperiatur medius proportionalis terminus C inter duos terminos A & B datam rationem constituentes. Sic enim ratio A B in duas rationes æquales A C, C B. resoluetur; & ex iisdem componetur. per Propos. 25.

A 2	B 18	
A 2	C 6	B 18

Constructio

Quando data ratio, vt A B, in duas tantum rationes æquales resolui debet: id leui opera præstabitur. Si enim inter duos terminos A & B medius statuatur numerus, nempe C, ad quem terminus A eandem habeat rationem, quam ipse C habet ad terminum B: haud dubium quin ratio A B in duas æquales rationes A C, & C B resoluatur. Vt autem terminus ille medius C proportionalis statuatur. Multiplica datæ rationis terminos A & B in se inuicem, vt fiat numerus D. Ex quo radix quadrata eruatur: ea enim erit medius ille terminus C inter A & B proportionalis. Nam C in se ductus generat D (est enim numeri D radix quadrata) qui generatur ex duobus in se ductis numeris A & B. Ergo tres numeri A, C, B sunt continuè proportionales per Prop. 20. libri 7. Elem. Ergo ratio A B in duas rationes æquales A C, & C B resoluta est. Quod

A 4	B 9	D 36
A 4	C 6	B 9

si contingat, vt continget non rarò, numerum D ex duobus terminis A B inter se multiplicatis genitum radice quadratâ præcisâ carere: tunc radici veræ, quàm proxima libuerit, media statuetur inter A & B. Tunc ergo data ratio A B in duas æquales rationes, quæ numeris exprimantur, resolui non poterit; eruntque duæ rationes, in quas resolui potest, datæ rationi A B irrationales. Quæ præcisæ & veræ fuerint: si charactere debito, vt in Algebra fieri solet, medius ille terminus D designetur, vel vt hîc designatur, hoc modo ℞ q. vel alio aliquo apud Logistas vsurpari solito. Atque ea est rationem in duas æquales resoluendi methodus. Nunc in quotcunque resoluenda est, vt exigit propositio.

A 3	B 13	D 39
A 3	C ℞ q. 39	B 13

Sit ergo data ratio A B eadem, quæ superius: quam in quatuor rationes æquales oporteat resoluere. Quod fiet si inter duos terminos A &

		N 1		
	A 4		9 B	
	C 16	36	81 F	
D 64	144	324	729 G	
E 256.	K 576.	L 1296.	M 2916.	6561 H
A 4.	R 5.	S 6.	T 7.	B 9.

B datæ rationis tres medij proportionales constituantur: sic enim in quatuor rationes æquales resoluetur, quas progressio quinque terminorum exhibebit; quorum primus erit A, quintus autem & vltimus erit B: adeò vt vnum idémque sit opus inter duos terminos A & B rationis datæ tres medios proportionales statuere; & vt suprà monui, datam rationem in quatuor æquales resoluere. Illud ergo ita absoluetur. Statuantur duæ progressiones à duobus terminis A & B inchoatæ, quarum vtriusque radices & denominatores sint ipsi termini A & B: vtraque verò tot constet terminis; quot sunt rationes, in quas resolui debet data ratio, vt hîc, quatuor. Quales sunt progressiones A, C, D, E: & B, F, G, H. (quas in obliquos ordines ab vnitate N inchoatos composui quo sit schema ad demonstrationem aptius) Sunt ergo extremi progressionis vtriusque termini E & H quadrato-quadrati: & inter vtrumque tres termini medij continuè proportionales cadunt in ratione A ad B; quot scilicet inter vnitatem N & vtrumque terminum E & H constituti sunt per propositionem 10. libri 8. Elem. Sed præsertim per Prop. 41. libri 3. huius.

Inuestigentur ergo tres illi termini medij inter E & H. Quod duobus modis absolui potest. Primo si fiat vt A ad B; ita E ad K; tum rursùs vt A ad B; ita K ad L: denique L ad M iterum vt A ad B. Tunc enim M ad H

non poterit non esse sicut A ad B:atque adeo termini E, k, L,M, H, continuè erunt proportionales. Altero modo elegantissimo ijdem medij proportionales inuenientur iuxta methodum Propositione 49. libri 3. superioris in præparatione demonstratam : si nimirum numeri vtriúsque ordinis A E, & B H sese reciprocè multiplicent vt, A multiplicans G producet M; reciprocè B multiplicans D producet k eò quod tam M, quàm k sint duorum diuersorum ordinum termini communes; M quidem ordinum M A, M G, & k ordinum k B, K D, consule citatum locum : vbi schema videre est huic persimile. Medius verò terminus, L cum sit duorum obliquorum ordinum L C, L F numerus communis; siue in quo duo illi obliqui ordines conueniunt ; generabitur ductis in se duobus numeris C & F.

Vtrâuis porrò methodo statutis numeris E, K, L, M,H, eruatur è singulis radix quadrato-quadrata, vel vera, si vera ipsis competat, vel veræ proxima iuxta modos libro 3. superiore traditos. Erutæ huiusmodi radices in hoc paradigmate sunt A, R, S, T, B;singulæ suis subscriptæ potestatibus E, K, L, M, H: quarum A & B sunt ipsi datæ rationis termini, vt patet ex constructione: qua numeri E & H, quadrato-quadrati radicum A & B constituti sunt. Radix autem S inter reliquas media, quæ ad medium quadrato-quadratum L pertinet, vera est & præcisa. Reliquarum verò R, T irrationalium, paulò maior verâ est R; at T, verâ paulò minor. Dico igitur has radices A, R, S, T, B, problema soluere : rationem nimirum A B in æquales quatuor rationes A R, R S, S T, T B esse resolutam. Atque hoc demùm demonstrandum est.

Demonstratio.

Quadrato-quadrati E, k, L, M, H,sunt continuè proportionales per constructionem. Ergo etiam eorum radices A, R, S, T, B, sunt continuè proportionales. Probatur consequentia. Potestates E, K L &c. sunt omnes similes (sunt enim numeri ex suppositione quadrato-quadrati) ergo inter E & K tot cadunt medij proportionales in ratione radicum A & R ad eos pertinentium : quot termini cadunt inter ipsos & vnitatem vt Propositione 41. libri 3. superioris ostensum est. Hoc est, ratio quadrato-quadrati E ad quadrato-quadratum K componitur ex tot rationibus radicis A ad radicem R per Prop. 25. huius, quot sunt rationes inter ipsos singulos E & k; & vnitatem, nempe quatuor; vt patet ex schemate, in quo cernere est inter quadrato-quadratum E, & vnitatem N; quatuor rationes intercedere; quod idem in quibusvis quadrato-quadratis fieri necesse est : cum omnes ex radice toties semper in se multiplicata continuè, generentur. Ratio ergo potestatis E ad potestatem k componitur

tur ex quatuor rationibus radicis A ad radicem R, siue ratio E ad k quadruplicata est rationis A ad R. Eodem modo quia k, L sunt potestates similes, nempe quadrato-quadrati, rationem habebunt compositam ex quatuor rationibus radicis R ad radicem S. Cum ergo potestatis k ad potestatem L ratio æqualis sit rationi E ad K: componetur etiam ratio k ad L ex rationibus quatuor A ad R. Ergo æquales sunt duæ rationes A R & R S. Eodem modo æquales ostendentur rationes reliquæ R S, S T, T B. Sunt ergo rationes quatuor A R, R S, S T, T B, continuè similes atque adeò ratio A B resoluta est in quatuor rationes æquales. Quod præstandum erat.

Alia solutio eiusdem problematis.

Non minùs elegans est hæc altera eiusdem problematis solutio, quàm præcedens; nec minùs expedita, iucundáque futura est: si tamen aliqua habeatur numerorum algebricorum, eósque tractandi methodi cognitio propter numeros quosdam irrationales; qui non rarò occursuri sunt inter operandum; quorum operâ faciliùs & tutiùs ad optatum finem peruenitur; quàm si soli adhibeantur numeri rationales; qui radices surdas minùs præcisè non possunt non exhibere. Quia tamen, cum res feret, radices huiusmodi surdas eruere licet in infinitum præcisiores, vt libro 3. superiore declaratum est; iisque satis tutò vti quisque, potest loco numerorum Cossicorum; ideo visa est hîc non prætermittenda solutionis hæc altera methodus, cuius hîc est scopus; vt nullâ datæ rationis in rationes resoluendæ mentione facta; inter duos datos numeros, numeros quotlibet continuè proportionales interiiciat. His enim interiectis necessariò consequitur, vt ratio duorum datorum numerorum in rationes resoluatur, vnâ plures, quàm sint interiecti medij numeri. Vt in superiori paradigmate (quod hîc repetiturus sum) cum ratio A B in quatuor rationes æquales resoluenda proponatur: id absoluetur tribus numeris mediis proportionalibus interpositis inter duos A & B.

Sint itaque inter duos numeros A & B tres medij interponendi.

A 4 B 9

C $\frac{9}{4}$

D 1 C $\frac{9}{4}$ E $\frac{81}{16}$ F $\frac{729}{64}$ G $\frac{6561}{256}$

D 1. H ℞q $\frac{3}{2}$. K $\frac{3}{2}$. L ℞q $\frac{27}{8}$. T $\frac{9}{4}$

A 4. M ℞q $\frac{48}{2}$. N $\frac{12}{2}$. P ℞q $\frac{432}{8}$. Q $\frac{36}{4}$

A 4. M ℞ 24. N 6. P ℞q 54. Q 9

A 4. M 5. N 6. P 7 Q 9

Diuidatur maior terminus B per minorem A. Quotiens eſt C. Tum progreſſio inſtituatur ab vnitate D ; cuius ſecundus terminus ſit C; quæ terminis cõſtet duobus ampliùs quã ſint medij numeri proportionales interponendi, vt hîc quinque, quales ſunt D, C, E, F, G. Tertio, ab his ſingulis terminis eruendæ ſũt radices quadrato-quadratæ. Verùm à ſolis duobus terminis E & G erui præcisè poſſunt; quales ſunt K & T. A duobus verò reliquis terminis C & F, educi quidem poſſunt quadratæ; ex quibus rursùs quadratæ educi deberent, vt quadrato-quadratæ, eductæ forent: quod cum fieri nequeat; vel educendæ ſunt ex illis iam repertis quadratis radicibus, quæ quadrati numeri non ſunt, quadratæ radices veris proximè; vel certè, quod ſatiùs eſt, quodque hîc præſtiti, character coſſicus radices ſurdas quadratas eruendas deſignans apponendus eſt, vel hîc ℞q. quo vſus ſum, vel alius aliquis idem ſignificans (varij enim varios adhibere ſolent) atque ita habentur radices terminorum ſuperiorem progreſſionem conſtituentium, vt habet ſchema, huiuſmodi D, H, k, L, T.

Quartò. Hæ radices ſingulæ, multiplicandæ ſunt per numerum A minorem, ducetur nimirum A 4 in D 1, & fiet A 4. tum ducetur idem A 4 in H: ſed quia H eſt radix ſurda quadrata, vt eius character ℞ q. denotat: ideo vt rectè ducatur A 4 in H, reducendus erit A 4 in ſuum quadratum 16, ac per 16 multiplicandus erit H. Quod idem propter eandem rationem in multiplicatione radicis ſurdæ L per eundem numerum A 4 obſeruandum erit. Atque ita abſoluta hac multiplicatione habentur in ſchemate huiuſmodi numeri A, M, N, P, Q. Qui reuera ſunt hi qui

inueſtigantur

i nuestigantur, sunt scilicet tres medij M, N, P, continuè proportionales inter A & Q; qui numerus Q est æqualis numero B, vt patet reductis fractis numeris ad integros. Vt refert schema. In quo denique cernere est extractis radicibus à surdis numeris M & P, quæ sint veris propinquiores: haberi tandem eosdem numeros qui in superiore solutione reperti sunt, nempe, 4, 5, 6, 7, 9.

Demonstratio.

Cum ex diuisione consequentis B per antecedentem A datæ rationis A B, gignatur Quotiens C: ita erit vnitas D ad C; vt rationis A B antecedens A ad consequentem B per Propos. 40. libri 1. huius. Sunt autem ex constructione termini D, C, E, F, G, continuè proportionales. Ergo ita erit non tantùm D ad C, vt est A ad B; sed etiam C ad E, & E ad F, ac demùm F ad G. Quod cum ita sit: radices etiam terminorum horum D, C, E, F, G, quadrato-quadratæ D, H, K, L, T, proportionales erunt, vt in Demonstratione præcedenti ostensum est. Ex qua præterea constat rationes D ad C, & C ad E &c. quadruplicatas esse rationum D ad H, & H ad K, &c. Hoc est compositas ex rationibus quatuor similibus, aut æqualibus rationi D ad H, siue H ad K &c. Sed ratio D ad C, aut C ad E; æqualis est ostensa rationi datæ A B. Ergo ratio A B componitur ex ratione D H quater posita continuè, quales sunt rationes D H, H K, K L, L T, progressionem constituentes: adeò vt ita sit A ad B, vt progressionis primus terminus, D ad terminum vltimum T. Quare ratio data A B componitur ex iisdem rationibus D H, H K, k L, L T: ex quibus ratio D ad T componitur. His positis.

Cum omnes progressionis D, H, K, L, T, termini per rationis A B datæ antecedentem A multiplicentur per constructionem; vt fiant termini A, M, N, P, Q: erunt etiam hi termini continuè proportionales, eiusdémque proportionis cum terminis D, H, K, L, T. Qui multiplicati sunt per antecedentem A, vt habetur per Propositionem 3. libri 2. huius, Ergo ratio A ad B non secùs componitur ex rationibus A M, M N, N P, P Q quàm ex rationibus D H, H k, k L, L T. Ex quibus per Prop. 25. huius, componitur ratio primi termini A ad vltimum progressionis terminum Q. Sunt ergo duæ rationes A B, & A Q, ex iisdem rationibus compositæ, æquales. Cum ergo duo antecedentes A & A rationum A B, A Q æqualium, sint æquales: æquales etiam erunt per Prop. 14. libri 5. Elem. duo consequentes B & Q. Constat ergo inter datæ rationis A B terminos A & B tres medios M, N, P, continuè proportionales rectè constitutos hac methodo fuisse: & (quod ex ea trium mediorum terminorum inter A & B interpositione necessariò sequitur) constat

rationem A B in quatuor rationes æquales resolutam esse. Quæ methodus cum vniuersalis sit, & quilibet datæ rationi in quotlibet rationes resoluendæ conueniat: proposito problemati hac etiam secunda solutione satisfactum est. Quod erat præstandum.

Scholium.

In posteriore problematis huius solutione iussi, vt rationis datæ A B, maior terminus B diuidatur per minorem terminum A. Quod haud ita necessarium est; quin minor terminus A per maiorem diuidi possit, si ita visum animi gratiâ fuerit. Iidem enim eadem seruata constructionis methodo reperientur termini diuiso numero A per B: qui reperti sunt diuiso B per A: id solùm discriminis inter hanc vtramque initam viam consequetur; vt termini ordine planè innerso, vt par est, constituantur. Et verò ratione A B in quatuor rationes resolutâ, ratio illius inuersa B ad A, in quatuor etiam rationes eadem operâ resoluitur, si termini ordine etiam inuerso sumantur. Itaque siue detur ratio minoris antecedentis A ad consequentem B maiorem, siue contrà, maioris antecedentis B ad minorem consequentem A: semper licebit maiorem terminum, siue antecedens ille fuerit, siue consequens; diuidere per alterum terminum minorem: si modò terminorum ordo debitè restituatur, quando rationis terminos inuerti contigerit. Debet siquidem, vt ordo terminorum mediorum debitus seruetur, consequens rationis datæ diuidi per antecedentem, siue hîc consequente rationis datæ maior fuerit, siue minor.

PROP. XXXV. *Probl.*

Datam rationem in duas, vel plures rationes resoluere: quarum proportio data sit.

Expositio.

Propositione antecedente tradita est methodus rationem quamlibet datam in rationes quotlibet æquales resoluendi, siue diuidendi: quarum scilicet proportio foret deinceps æqualis. In hac verò modus inuestigatur, quo ratio quælibet possit (quod operosius iure videatur) in rationes quotlibet dissolui: quarum data sit proportio quæcunque. Vt si detur ratio A B resoluenda in tres rationes, ita vt proportio primæ rationis ad secundam

A 24	C 4	D 1
		1
B 9	D 1	E —
		3

secundam sit, vt C ad D (quadrupla) secundæ verò ad tertiam sit, vt D ad E (nempe tripla) atque ita C D, & D E sint denominatores proportionum, quæ inter rationes quæsitas inter terminos A & B medias intercedunt. In quo problema hoc longè differt à problemate Propositione 33. superiori, exposito: quod non rationum proportiones datas supponit, vt istud; sed rationes ipsas præter vnicam earum assignat, quæ & ipsa ex reliquis colligitur, vt illic exposui. At verò propositio hæc proportiones rationum, & quidem omnium, nullam autem rationem supponit: quod à citatâ illa Propositione omninọ diuersum est. Duplicem porrò problematis huius constructionem iuxta duplicem casum nonnihil discrepantem allaturus sum. Prior est, cum data ratio in duas tantum rationes datæ proportionis resoluenda est; posterior, cum in plures, plurium proinde datarum proportionum.

Constructio prioris casus.

Data sit ratio A B in duas rationes resoluenda, quarum prior ad posteriorem ita se habeat, vt D ad E, hoc est, earum proportio sit, vt D ad E.

A 24	D 4	F 48		G 36
B 2	E 3	A 24	X	C 6
F 48	G 36	C 6		B 2
A 24	C 6 B 2		H 12	

Ducatur datæ rationis A B consequens B in antecedentem A, & fiat F. Tum fiat vt D ad E: ita numerus F ad G. Denique à numero G educatur radix quadrata per propositionem 14. libri 3. huius. Eáque sit C: Dico radicem hanc C inter terminos A & B datæ rationis interpositam, ipsam in duas rationes A C & C B resoluere siue diuidere: quarum illa ad hanc ita se habet, vt se habet D ad E, hoc est proportio rationum A C & C B est D E.

Demonstratio.

Rationes A C & C B ita inter se è regione constituantur, vt constitui solent cum ad eundem consequentem per Prop. 13. huius. Reuocandæ sunt. Vt schema secundum refert. Tunc igitur constat numeros F, G produci ductis decussatim numeris A in B, & C in C (est enim per constructionem C radix quadrata numeri G: quæ in se ducta ipsum G nata est generare) atque adeo, si rationum A C, C B consequentes C, B in se mutuò ducantur, vt fiat H: reductæ erunt duæ rationes A C, C B ad rationes F H, & G H consequentis eiusdem H iuxta citatam Propos. 13.

Ergo

Ergo ita erit ratio F H ad rationem G H, hoc eſt, ratio A C ad rationem C B; vt eſt antecedens F ad antecedentem G iuxta Propoſitionem 10. huius. Sed eſt F ad G, vt D ad E per conſtructionem. Ergo ita eſt ratio A C ad rationem C B, vt D ad E. Quare ratio data A B rectè diſſoluta eſt in duas rationes A C & C B: quæ datam habent inter ſe proportionem D E. Quod faciendum erat.

Alia ſolutionis eiuſdem conſtructio.

Idem problema, cum ratio data in duas tantùm rationes reſolui debet propoſitum à R. P. G. à ſancto Vincentio Propoſ. 123. libri 8. & ſolutum eſt in hunc modum. Data ſit eadem ratio A B, eadémque proportio D E rationum duarum, in quas ratio A B reſoluenda eſt. Fiat vt D ad E; ita A ad G. Tum inter B & G reperiatur medius proportionalis terminus C: qui inter A & B medius ſtatuatur. Dico rationes A C & C B habere inter ſe proportionem datam D E.

A 24	D 4	A 24
B 2	E 3	G 18
C 6		
G 18		
A 24	C 6	B 2

Demonſtratio.

Ratio A C ad rationem G C ita ſe habet per Prop. 10. huius. Vt antecedens A ad antecedentem G, cum vtriuſque idem ſit conſequens C. Sed A ad G ita eſt per conſtructionem, vt D ad E. Ergo ita eſt ratio A C ad rationem G C, vt D ad E. Sed ratio G C æqualis eſt per conſtructionem rationi C B. (eſt enim terminus C medius proportionalis inter G & B conſtitutus) ergo ita eſt ratio A C ad rationem C B, vt D ad E: quæ data erat proportio rationum definiendarum. Rectè igitur etiam hoc modo data ratio A B reſoluitur in duas rationes A C & C B datam inter ſe ſeruantes proportionem D E. Quod erat præſtandum.

Conſtructio caſus poſterioris: cum ratio in plures quàm duas rationes; quarum dantur proportiones reſoluenda eſt.

Sit ratio A B in tres rationes reſoluenda: quarum primæ ad ſecundam propoſtio ſit, vt C ad D, ſeſqui-altera. Secundæ verò ad tertiam, vt D ad E, octupla. (Quæ proportiones niſi continuatæ forent, continuari debent vt Prop. 24. docetur. Hîc iam continuatæ ſupponuntur) Ducantur in ſe termini C & D proportionis prioris, vt fiat vnicus terminus F. Qui ad terminum E collatus tanquam ad conſequentem proportionem exhibeat

exhibeat; ſecundum quam reſoluatur ratio A B in duas rationes alterutro ex duobus traditis modis in caſu præcedenti. Reperietur enim terminus G: quo ratio A B in duas rationes A G, G B reſoluitur: quæ datam ſeruant proportionem F ad E: vt patet. Si enim diuidatur A per G quâ diuiſione habetur denominator rationis A G per Prop. 8. huius) producitur F: ex diuiſione verò antecedentis G per conſequentem B naſcitur E denominator rationis G B. Atque adeò duo termini F, E proportionem exhibent rationum A G & G B. Iam ergo ex ea operatione definitus eſt alter duorum terminorum mediorum inter A & B: qui datam rationem A B reſoluturi ſunt; & quidem is, qui cum conſequente B tertiam rationem conſtituit, cuiuſmodi eſt terminus G.

A 48	B 4		
C 6	D 4	E $\frac{1}{2}$	
F 24	E $\frac{1}{2}$		
A 49	G 2	B 4	
A 48	H 8	G 2	B 4

Hoc ergo termino G ſtabilito, ſtatutáque ratione tertia G B: reſoluatur iam ratio A G tanquam data, in duas rationes quarum proportio ſit C D prior è datis duabus proportionibus. C D & D E. Sitque terminus ille H inter A & G medius conſtituendus: erit tunc ratio A B in tres rationes A H, H G, G B iuxta datas proportiones C D, D E, reſoluta. Quod oſtendo.

Demonſtratio.

Dubium minimè eſt quin ratio A B reſoluta probè ſit in duas rationes A G, G B quarum proportio data ſit F E. Id enim in priore caſu oſtenſum eſt. Nec certum minùs eſt propter eiuſdem prioris caſus demonſtrationem; rationem A G in duas rationes A H, H G, quarum proportio C D data eſt, probè diſſolui. Quod ergo hic probari debet, eſt illud vnum: rectè nimirum terminos C D, proportionis, quam ſeruare debet prima ratio ad ſecundam in ſe mutuò multiplicari, vt habeatur numerus F, qui ſtatui debet antecedens proportionis, quam habet prima & ſecunda ſimul ratio ad tertiam rationem; eiuſdem autem proportionis conſequens ſit E, qui conſequens eſt proportionis D E datæ inter ſecundam, & tertiam rationem. Id autem planiſſimè concluderur Analyſim inſtituendo.

Itaque ſit ratio A B rectè diſſoluta in tres rationes A H, H G, G B: quarum prima A H ita ſe habeat ad ſecundam H G; vt C ſe habet ad D: vt autem ſecunda H G, ſe habet ad tertiam G B, ita ſe habeat D ad E. Hoc eſt proportio rationis A H ad rationem H G, ſit C D; & proportio rationis H G ad rationem G B ſit D E, quæ vtraque datur. Cum ergo proportio inter duas rationes aliud nihil ſit quàm habitudo quantitatis illarum rationum, ſiue illarum rationum ratio: quantitas autem rationis

A 48	H 8	G 2	B 4
	C 6	D 4	E $\frac{1}{2}$
	L 1	L 1	L 1
	F 24	D 4	E $\frac{1}{2}$
	D 4	L 1	L 1

cuiuslibet per rationis eiusdem denominatorem exhibeatur: erit duarum rationum A H, & H G proportio, ea ratio; quam habent inter se earum denominatores: sicut & duarum rationum H G, G B proportio, eadem erit cum earum denominatorum ratione: vt propositione 4. huius declaratum est. Quare cum duo termini C, D, duarum rationum A H, H G, sint denominatores; & similiter duo termini D, E, denominatores sint rationum duarum H G, G B. Denominatores autem vt Propositione 4. huius, declaratum est, adsciscentes vnitatem, vel expressam, vel connotatam in consequentem, rationem rationi, quam denominant, similem constituant: si singulis terminis C, D, E adhibeatur vnitas L velut consequens: fient tres rationes C L, D L, E L tribus rationibus A H, H G, G B æquales, singulæ singulis. Quæ cum sint discontinuæ; continuentur per Propositionem 24. huius, priores duæ C L, D L. Quod in hoc casu, in quo rationis prioris C L consequens L est vnitas, absoluetur expeditissimè ducto rationis D L Antecedente D in terminos C L, rationis C L. Hinc enim fiet ratio F D æqualis rationi C L per Prop. 17. libri 7. Elem. eritque idem terminus D tam consequens rationis F D, quàm antecedens rationis D L.

His ita constitutis. Cum ratio C L, siue F D, æqualis ostensa sit rationi A H; & ratio D L rationi H G: ita erit F ad D, vt A ad H; & D ad L, vt H ad G. Ergo ex æquo, ita erit F ad L vt A ad G. Cum autem rationis F L, consequens L sit vnitas: erit ratio F L denominator rationis A G. Est autem ratio E L. cuius consequens est etiam vnitas, denominator rationis G B (est enim ex suppositione ratio E L æqualis rationi G B) ergo ratio F L, tanquam antecedens, comparata ad rationem E L tanquam consequentem, exhibet proportionem duarum rationum A G, G B, vt superiùs declaratum est. Quia verò harum duarum rationum F L, E L idem est consequens L; atque adeò per Propos. 10. huius, ita se habet ratio F L ad rationem E L, vt illius antecedens F ad huius antecedentem E: erit ratio, cuius antecedens sit F, & consequens E, hoc est, ratio F E, proportio rationum duarum A G, G B.

Quare cum In constructione imperatur: vt rationum A H, H G, rationis: siue proportionis C D datæ, termini C, D, in se mutuò ducantur, vt fiat F; qui assumatur vt antecedens proportionis; quæ est inter rationes A G, G B; cuius proportionis consequens sit E: & vt deinceps data ratio A B in duas rationes A G, G B, quarum proportio data est, nempe F

E

E, resoluatur; rectè imperatum esse, rectéque eo modo solui problema, euidenter constat seruata prioris casus solutione: iuxta quam ex data proportione F E, rationum A G, G B resoluitur data ratio A B in ipsas duas rationes A G, G B, termino G inuestigato. Termino autem G definito, resumetur ratio A G; quæ rursùs in duas rationes A H, H G resoluatur ex data proportione C D, quam ipsæ rationes A H, H G obseruare debent. Atque ita tandem tota ratio A B in rationes A H, H G, G B; quarum datæ sunt proportiones C D, D E resoluta fuerit. Quod erat præstandum.

Scholium.

Rationis eiusdem A B in easdem rationes ex eisdem datis rationibus C D, D E resolutio ita quoque iniri poterit: vt primo loco inuestigetur numerus H; qui rationis datæ A B antecedenti A: proximus est. Si enim duo termini D, E posterioris proportionis datæ in se mutuò ducantur, vt fiat F. Tum inquiratur terminus H medius per alterutrã primi casus solutionẽ; qui rationem datam A B resoluat in duas rationes: quarum proportio data, sit C F: denique ratio H B rursùs resoluatur eodem modo in duas rationes quarum proportio data, sit D E: habebitur alter terminus G medius. Atque ita ratio A B resoluta fuerit in tres rationes: quarum duæ proportiones datæ, sunt C D, & D E. Quod eodem modo per Analysim demonstrabitur: quo superius vsus sum.

A 48.	B 4		
C 6.	D 4.	E $\frac{1}{2}$	
C 6.	F 2		
A 48.	H 8	B 4	
A 48.	H 8.	G 2.	B 4.

Quod si ratio data in plures, quàm tres rationes; quarum proportiones plures etiam quam duæ (sunt enim proportiones rationum vnâ semper pauciores quàm ipsæ rationes) datæ sint; resoluenda proponatur: eadem semper methodus adhibebitur. Vt si ratio A B in quatuor rationes resolui debeat: quarum datæ sint proportiones C D, D E, E P. Reperietur terminus Q proximus rationis A B consequenti B. Ductis in se tribus proportionum terminis C, D, E: vt habeatur F; qui cum reliquo termino P constituet proportionẽ F P, secundum quam resoluetur ratio A B in duas rationes A Q, Q B. Hoc autem termino Q ita de-

A 48.	B 4			
C 6.	D 4.	E $\frac{1}{3}$	P $\frac{1}{2}$	
F 8	P $\frac{1}{2}$			
		S 24.	T 2.	
C 6	R 2			
A 48.	Q 6.	B 4		
A 48.	H 8.	G 2.	Q 6.	B 4

finito, resoluetur ratio A Q in tres rationes: quarum proportiones datæ sunt C D, D E; & inuenietur terminus G: eoque inuento, inquiretur tandem terminus H antecedenti A proximus. Qui quidem terminus H etiam primo loco inquiri potuisset, vt paulò ante declaratum est, multiplicatis scilicet datarum proportionum terminis D, E, P in se mutuò, genitóque numero R in consequentem proportionis, cuius antecedens sit C, assumpto: secundum quam ratio A B resoluatur. Imò etiam terminus G medius primo loco definiri poterit: si duo termini tam primæ proportionis C D, quàm postremæ E P in se ducantur: vt habeatur proportio S T, secundum quam resoluatur ratio A B. Inuento autem termino G reperientur termini H & Q; ille, si ratio A G resoluatur in duas rationes, quarum proportio est C D; hic verò resolutâ ratione G B in duas iuxta datam proportionem E P. Ex quibus, quid dato quolibet casu, vel debeat, vel possit præstari, manifestum est.

Monitum.

Hactenùs ea omnia mihi videor exposuisse satis multis, satísque, quoad per rem haud ita perspicuam licuit, claris & apertis: quæ ad rationum cognitionem tanti in mathematicis momenti assequendam, sufficere videri possint. Ea siquidem omnia, quæ ad hoc relatiuæ quantitatis genus pertinent, accuratè persequi sum conatus: dum quæ ad illius mutationem, siue per augmentum, siue per decrementum eam fieri contingat, ineundam necessaria sunt, vel Theoremata, vel Problemata protuli; nec sine sua quæque demonstratione constituta. Pertractaui scilicet post expositam rationum naturam, & insigniores aliquod ex ea manantes facultates; eas vel addendi, vel vnam ab altera subducendi; aut easdem per se mutnò multiplicandi, aut denique alteram per alteram diuidendi rationem ac modum: nec earum compositionem & dissolutionem (quæ vtraque in hoc vno quantitatis genere reperitur; quæque peculiari aliqua expositione indigebat) prætermisi. Quibus ita absolutis, etiam in hac ad rationes proportionesúe pertinente grauiore materia, institutoris muneri non omninò defuisse videri possim; nec aliud quidpiam ad propositum scopum desiderari. Verùm, cum ex tam vbere támque amplo rationum campo infinita tum Theorematum, tum problematum copia sobolescat; quam omnem colligere vt impossibile, ita foret abs re alienum, attamen quædam sunt, quorum tam frequens, ne dicam perpetuus, est vsus ad difficultatum passim in Arithmeticis occurrentium solutionem obtinendam; vt omitti sine discentium dispendio non possint: præsertim cum eorum demonstratio, qua quædam hactenùs carere videntur, ex dictis planè & apertè consequatur. Ea porrò omnia vni illi proportionum aureæ regulæ

regulæ variis modis, qui aperiendi sunt, nituntur. Sit itaque:

PROP. XXXVI. *Probl.*

Datis tribus numeris quartum proportionalem inuenire. Siue, regulam proportionum explicare

Expositio.

Hæc eadem propositio iam aliàs lib. 1. prop. 50. allata, & demonstrata fuit loco quidem non suo; cum ad hunc omninò pertineat: sed quia, vt in insignioribus quibusque hactenùs explicatis difficultatibus cernere licet, eius passim erat deinceps fax adsciscenda. Quæ enim tum in Geometricis, tum in Arithmeticis caligo, nisi ea admota discutiatur? Eadem ergo hic denuò exhibenda est, vt aliæ aliquot Arithmeticæ familiaris, & ad res concretas ferè pertinentes, quæ ex ea pendent, regulæ clarius proponantur, faciliúsque percipiantur. Quæ cum vulgò crebriùs soleant vsurpari; earum præcepta, vt in cæteris sæpius obuiis Arithmeticis regulis præstitum est, memoriæ causa metro complecti visum est.

Constructio.

Tertia quærenti: similique huic prima: secunda
Sit reliquo sedes. Postremos ducito. Factum
Diuide per primum: quartum in quotiente creabis.

Primum præceptum aptam docet trium datorum numerorum inter se coordinationem. Qualis tunc futura est; si è tribus datis numeris ille; cui quartus proportionalis inuestigatur, quique propterea quæstionem habet annexam in tertia sede, siue tertio in loco statuatur, iuxta illa verba *tertia quærenti*. In primo verò loco statuatur *huic similis*, siue homologus numerus: qui scilicet est rationis, quam cum reliquo dato numero constituit, Antecedens. Reliquus denique è tribus datis numeris, quique est rationis consequens, sedem secundam reliquam occupabit. Vno verbo duo illi numeri, qui Rationem habent inter se iam notam & constitutam, primum & secundum locum occupare debent; primam quidem rationis antecedens, consequens secundum. Tertius autem numerus; cui velut Antecedenti respondens quæritur consequens, tertium locum sibi vendicat. Vt si proponatur quæstio huiusmodi rectangulum est; cuius lon-

gitudo est palmorum 12. & latitudo palmorum 9: construendum est aliud huic simile; cuius longitudo est pedum 30. Quot ergo pedibus constare debet latitudo? Cum vtriusque rectanguli latera circa angulum rectum debeant esse proportionalia, vt iuxta definitionem 1. libri 6. sint, velut hic exigitur, rectangula similia: hic inuestigari debet latitudo rectanguli secundi, quæ velut rationis consequens respondeat longitudini pedum 30 velut antecedenti. Longitudo ergo pedum 30 quæstionem habet annexam; ergo inter datos tres numeros tertius statui debet. At alterius rectanguli longitudo palmorum 12, longitudini pedum 30 similis, siue homologa (est enim vtraque rationis suæ Antecedens) primum locum occupabit. Denique secundus locus reliquo numero latitudinis palmorum 9 tribuetur. Ita ergo habebunt ordinati tres dati numeri.

Long. Palm.	Latit. Palm.	Long. Pedum.	Latit. Ped.
12	9	30?	$22\frac{1}{2}$

Numeris iuxta primum hoc præceptum ita statutis, ita porro pergendum est.

Secundum præceptum *postremos ducito* multiplica scilicet inter se duos postremos numeros 9 & 30: vt fiat numerus 270.

Tertium Præcep. *factum diuide per primum.* Diuide numerum 270. ex duobus numeris 9 & 30. inter se ductis proximè genitum per primum numerum 12. & per hanc diuisionem, quem quæris, *quartum in quotiente creabis*, pedum scilicet 22. cum semisse. Atque ea est latitudo rectanguli posterioris priori similis. Nec alia vnquam futura est quartum ignotum numerum ex tribus datis inquirendi ratio; siue numeri secundum se, & in abstracto; siue in concreto, & materiæ cuipiam immersi proponantur: si tamen eiusmodi sit illa numeris adhærescens materia, qualis in obseruationibus scholij sequentis præscribitur num. 4.

Demonstratio.

Tradita est & diagrammate geometrico explanata problematis huius demonstratio libro 1. prop. 50. quam præstat consulere, quàm hic denuò sine necessitate repetere. Verùm aliam nobis offert propositionis 23. libri huius 4. secundo loco allata probatio: quam ob insignem problematis huius præstantiam huc afferri par est.

Ostensum est citata propositione duabus positis rationibus A B, & D C huiusmodi, vt ratio D C terminis inuersis eadem sit cum ratione

A B, vel ei æqualis, aut similis id est, ita sit A antecedens ad B consequentem, vt, inuertendo, D consequens ad antecedentem suum C. ostensum, inquam est; si hæ duæ rationes A B, C D in se mutuò ducantur iuxta methodum propositione 18. traditam, ducti scilicet in se mutuò tùm antecedentibus A & C, tum consequentibus B & D, generari rationem æqualitatis E F.

A 12	C 27	E 324
B 9	D 36	F 324

Quod cum ita sit, si tres dentur numeri A, B, D; & quæratur quartus numerus, ad quem ita se habeat tertius D, vt primus A se habet ad secundum B: si duo posteriores B, D in se mutuò ducantur; habebitur numerus F; cui æqualis esse debet numerus ex multiplicatione numeri primi A in quartum, qui inquiritur, ducti.

A 12.	B 9.	D 36?	C 27

Ergo si numerus F ex duobus numeris posterioribus B & D in se ductis procreatus diuidatur per primum numerum A; quotiens diuisionis non potest non esse quartus quæsitus numerus C: vt scilicet duobus numeris A & C in se ductis, restituatur diuisus numerus F, siue ei æqualis numerus E. Rectè igitur ex traditis præceptis, quartus numerus tribus datis proportionalis repertus est. Quod præstandum erat.

Noua eiusdem regulæ proportionum Constructio.

Hac altera methodo tribus datis numeris quartus proportionalis adiungi potest seruatis, hisce præceptis.

Tertia quærenti; similique huic prima; secunda
Sit reliquo sedes; primum qui diuidat. Ortus
Diuidat extremum: quartum in quotiente creabis.

Præceptum primum ad aptam datorum trium numerorum compositionem pertinens, ab eo minimè differt; quod in præcedenti constructione traditum est.

Præceptum secundum. *primum qui diuidat.* Numerus scilicet ille, qui ordine secundus est, sedémque secundam occupat; siue qui rationis datæ consequens est, diuidat numerum primum, siue antecedentem suum.

Præceptum tertium. *ortus diuidat extremum.* Id est, quotiens, qui ex diuisione primi numeri per secundum genitus est, diuidat etiam extremum, hoc est, numerum tertium, qui quæstionem habet annexam. Quotiens enim erit quartus quæsitus numerus. Exemplum appono.

Sit

Sit tribus numeris A, B, C, quartus proportionalis inueſtigandus

A 32	B 4	C 24 :	D 3
	E 8		

Diſpoſitis, vt par eſt numeris: diuidatur primus A per ſecundum B: quotiens autem ex ea diuiſione productus ſit E: per quem tertius numerus C diuidatur: habebitur numerus D in quotiente. Hunc itaque numerum D aſſero eſſe quartum tribus datis numeris A, B, C proportionalem. Quod oſtendo.

Demonſtratio.

Cum quartus numerus quæratur, ad quem numerus C eandem rationem habeat; quam numerus A habet ad numerum B: idem erit denominator rationis vtriuſque per propoſitionem 4. huius in qua denominatoris faculias & natura exponitur. Sed rationis A B antecedente A diuiſo per conſequentem B, producitur eiuſdem rationis A B denominator E per propoſ. 9. huius. Ergo idem numerus E denominator etiam eſt rationis C D. Denominator autem rationis, diuidens eius antecedentem generat conſequentem rationis eiuſdem; vt ſcilicet poſſit conſequens denominatorem multiplicans antecedentem reſtituere iuxta propoſitionem 8. huius. Ergo numerus D hac methodo definitus, eſt quartus tribus datis numeris proportionalis, qui erat inueſtigandus.

Scholium.

Primò obſerues hinc poſteriorem, quartum proportionalem numerum Inueſtigandi rationem, cum priore poſſe coincidere. Quod quomodo contingat repetito proximo paradigmate declaro. Datis ergo numeris A, B, C ritè diſpoſitis, diuidendus eſt A primus per B ſecundum. At hæc diuiſio abſolui poteſt fracto numero conflato ex diuidendo A, qui ſit Numerator, & diuiſore B, qui ſit denominator. Quo poſito, ſi tertius numerus C diuidatur per fractum numerum A B iuxta methodum

A 32.	B 4.	C 24.	
A 32 / B 4	C 24 / L 1	G 96 / A 32	D 3

priorem fractos diuidendi prop. 25. libri 2. expoſitam: ducetur ſecundus numerus B, qui eſt fractionis A B diuidentis denominator, in diuidendum numerum C; vt fiat G: & numerator A in vnitatem L (quæ eſt denominator quaſi fracti C L) & fiet idem A denominator quotientis fracti G L ex diuiſione fracti C L per fractum A B geniti. Debet demùm huius fracti

fracti numeri G A numerator G per Denominatorem A diuidi, vt fractio ad integrum reducatur Factâ autem diuisione, habetur D integer: qui quartus est proportionalis. Patet ergo praxi ita per diuisionem instituta, duos posteriores numeros B, C inuicem multiplicari, ac demùm ex ea multiplicatione genitum numerum per primum numerum A diuidi, vt habeatur quartus D. Quæ omnia in priore methodo præcipiebantur.

Obserua secundò. Duos tantum interdum numeros dari, quibus tertius quæratur proportionalis. Sed tunc secundus duorum vices gerit: est enim datæ rationis consequens; & idem antecedens ad numerum, qui quæritur: cum quo rationem alteram constituat. Quare in eo casu secundus numerus bis ponendus est; & tribus quartus proportionalis, vt traditum est, inquirendus.

Obserua tertiò. Non rarò posse duos priores numeros rationem datam constituentes reduci, non sine compendio, ad minores terminos. Vt, si dentur tres numeri A, B, C, duo priores A, B priorem rationem datam constituentes ad rationem E F, æqualem minoribus terminis expressam reduci poterunt per Prop. 12 Tunc autem tribus E, F, C quartus proportionalis D inquiretur: quem eundem esse necesse est, qui haberetur numeris A, B, C adhibitis.

A 12.	B 9.	40 ? D 30
E. 4	F 3.	

Obserua quartò cum datis tribus numeris alligata est materia quæpiam: cautio quædam, vt superiùs memini, adhibenda est, hæc nimirum in vniuersum. Debent semper trium numerorum duo aut primus & secundus; aut primus & tertius materiâ affici eiusdem speciei: Quod si primus & secundus eâdem afficiantur: tunc etiam quartus, qui inquiritur, eadem materia, qua tertius affici censeri debet. At verò, si primus & tertius in materia conueniant: quartus cum secundo in materia item conueniet, licet à primi & tertij materiâ discrepet. Vnde patet, cum tres eadem omnes materia constiterint, qua quartus constare dici debeat; eadem nimirum, qua reliqui tres. Exemplis res eiúsque ratio clarior euadet.

In allato superiori paradigmate quærebatur rectanguli latitudo, cuius longitudo foret pedum 30, forétque simile rectangulo: cuius longitudo supponitur palmorum 12, latitudo verò palmorum 9. conueniunt ergo primus & secundus; vterque enim à palmis denominatur, à mensura scilicet eiusdem speciei. Tunc autem quartus, qui est latitudo rectanguli posterioris, eandem donominationem mensuræ sibi vendicat, qua afficitur tertius, pedum scilicet.

Quod si ita quæstio proponeretur. Prioris rectanguli longitudo est, vt priùs, palmorum 12: at latitudo est pedum 9: rectanguli verò priori similis longitudo est palmorum 30; cuius latitudo quæritur: Ita ergo ad

Long. Palm.	Latit. Pedum	Long. Palm.	Latit. Pedum
12	9	30	$22\frac{1}{2}$

praxim parabuntur numeri factáque operatione iuxta tradita præcepta repetietur quartus numerus 22 cum semisse; qui non palmorum, quibus afficitur tertius numerus, eius rationis antecedens; sed pedum denominationem assumit; eam scilicet, quæ secundum numerum 9, siue consequentem prioris rationis afficit. Sicut enim duo antecedentes 12 palm. & 30 palm. eiusdem speciei materia afficiuntur; ita eadem inter se materia affici censendi sunt duo rationum consequentes, pedes 9, & pedes 22 cum semisse; alioqui non eadem esset ratio secunda cum priore; nec rectangulum priori simile constitueretur. Nec par est ratio cum primus & secundus eiusdem materiæ denominatione afficiuntur, vt in priori altero exemplo contingebat. Tunc enim propter illam in vtroque termino prioris rationis materiam eandem, ipsi termini quasi à materia absoluti sunt, & in abstracto rationem tantùm exprimunt; quam tertius datus numerus ad quartum, qui inuestigatur, debet obseruare: quam sanè obseruabunt, quæcumque materia, modo eiusdem speciei, vtrumque afficiat. Innumera occurrunt eius generis exempla: qualia sunt quæ in longitudinem dimensionibus vsui esse solent. In iis siquidem duo priores numeri habentur certæ cuiusdam mensuræ notæ minoris modi, quem varia Geometrica instrumenta continent; vt rationem exhibeant, quam tertius & quartus in assumpta mensura quantitatum metiendarum debent obseruare nullâ habitâ ratione quantitatis mensuræ illius minoris ex qua Geometricum instrumentum diuisum est. Iuxta quod idem fundamentum paratus est insignis ille Geometricus Sinuum, Tangentium atque Secantium Canon: ex quo hauriantur in aliis mensuris, de quibus quærendum fuerit, rationes quantitatum; atque adeò ipsæ quantitates; quamuis particularum, in quas diuiduntur Sinus, Tangentes & Secantes, mentio nulla fiat; neque enim ex eis rerum materialium quantitates mensurantur; sed ex aliis ex instituto definitis variis mensuris: quæ tamen eandem rationem seruent; quam numeri ex canonibus illis deprompti; quorum proinde operâ habeantur tres numeri ad regulam proportionum absoluendam, & quartum ignotum numerum inueniendùm necessarij. At verò si à primo numero secundus ratione materiæ, atque adeò ratione mensuræ (neque enim materiæ diuersæ eadem potest applicari mensura) discrepet, nulla certa inter eos concretos numeros potest haberi ratio; cui fiat similis ratio tertij numeri ad quartum inueniendum. Ratio siquidem tantùm reperitur

petitur inter eiusdem generis quantitates; imò & eiusdem speciei in numeris concretis. Quæ enim ratio haberi queat numeri 10 palmorum ad 100 passuum numerum, nisi hic ad palmos reducatur? Tunc ergo, vt superiùs asserui, eadem debet esse materia tertij numeri cum materia numeri primi; eadem, inquam, specie, ac proinde eiusdem mensuræ capax: vt mox ostendam, vt scilicet habeatur nota ratio (ope permutationis) primi numeri ad tertium: quam secundus seruet ad quartum, qui inuestigatur. Vnde patet euidentius, cur in huiusmodi casu quartus eâdem materiâ affici censeri debeat, quâ secundus afficitur: vt scilicet inter eos ratio mensuræ intercedere possit, quam habet numerus primus ad tertium. Quæ ex traditis superius exemplis, si perpendantur, clarissima euadunt: vt pluribus ad hanc rem illustrandam non sit opus.

Monui proximè in eo casu, in quo concreti duo numeri primus & secundus discrepant ratione materiæ, vel eius mensuræ; atque adeò, vt explicatum est, primus & tertius conuenire debent: ita debere conuenire; vt non genere tantùm, sed etiam specie conueniant, vt quartus numerus colligatur. Quod certum esse patet; quod tunc, etsi tres dari videantur numeri, ex quibus quartus eruatur; nulla tamen datur inter eorum binos nota ratio; cui similis ratio altera per hanc proportionum regulam statui possit: quæ, vt absoluatur, rationem aliquam notam dari supponit. Imo nec ipsi numeri tunc noti dici possunt; cum non sint eiusdem naturæ vnitatum numeratarum multitudo; ad quam si reuocentur, erunt hi reuocati à prioribus longè diuersi. Ergo ante reductionem non dabantur tanquam noti. Rem exemplo illustro. Est rectangulum quoddam; cuius longitudo est palmorum 10, latitudo pedum 4. Cui simile aliud rectangulum sit exhibendum; cuius longitudo sit passuum 5. habentur ergo tres numeri tribus diuersis denominationibus palmorum, pedum, & passuum affecti: inter quorum binos vtlibet assumptos nulla intercedit nota ratio; quæ enim ratio siue habitudo secundum quantitatem intercedere potest inter 10 palmos, & pedes 4. numerum primum & secundum, nisi alterum eorum ad alterius denominationem, vt palmos ad pedes, vel pedes ad palmos prius reduxeris? nec minus ignota est ratio numeri primi palmorum 10 ad tertium passuum 5; nisi accedat reductio ad eiusdem speciei mensuram. Ad hæc si, vt regula præcipit, duos posteriores numeros pedum 4. & passuum 5 in se mutuo ducas: cuius mensuræ denominatione productum numerum 20 affecturus es, pedumne, an passuum? cuius item mensuræ futurus est numerus 2: qui oritur ex numero; illo 20 per multiplicationem secundi 4, & tertij 5 genito; si per primum palmorum 10 diuidatur? Neque enim huic numero 2, palmorum denominationem potiori iure tribuas, quàm pedum aut passuum. Quare, vt quartus numerus debitam à materia impositam denominatio-

nem assequatur: vel primus ad secundi, aut tertij denominationem; vel è contra, secundus aut tertius ad denominationem primi reuocandus erit, aut etiam, si lubeat vterque. Tunc enim quarto sua denominatio assignabitur, ea quidem, quæ ad tertium pertinet, si primus & secundus eâdem potiantur: aut ea, quæ ad secundum spectat, si primus & tertius conueniant, vt paulò ante declaratum est. In exemplo itaque proposito, in quo primus numerus est palmorum 10, secundus pedum 4. Tertius passuum 5. reuocari poterit secundus pedum 4 ad primi speciem, & in palmos 16 commutari. Tunc autem tribus numeris, palmis 10, palmis 16. passibus 5, quartus proportionalis seruatis præceptis inuenietur numerus passuum 8. Quod si tertius numerus passuum 5 ad palmos, quæ est primi numeri denominatio, reducatur; vt fiat eius loco numerus 100 palmorum: tribus numeris, 10 palmorum, 4 pedum, 100 palmorum quartus proportionalis futurus est 400 palmorum: qui si per 4 diuidantur (per numerum scilicet, qui quot palmos pes quilibet continet, indicat) habebuntur pedes 40. Quos si ad passus reduxeris diuiso numero 40 per 5 (cum passus sit pedibus quinque æqualis) habebuntur passus 8, vt priùs, qui sit quartus quæsitus proportionalis numerus. Sed quoad hanc reductionem.

Obserua quintò. Necessarium non esse, vt ante initam operationem ad quartum numerum definiendum adhibendam, fiat illa; de qua proxima obseruatione dictum est, numerorum ad eandem speciem reductio: sed posse tribus datis numeris immutatis quartum adiungi more solito. Verùm tunc quartus ille numerus ad speciem reducetur; vel secundi, vel tertij ope diuisionis, aut multiplicationis (vt res feret) per eundem numerum, per quem reductio fieri debebat priùs quàm regula proportionum de more institueretur. Reducetur autem ad speciem secundi, vt ex dictis supra constat, si primus & tertius eiusdem sint speciei, siue denominationis: ad speciem autem tertij; si primum & secundum specie conueniro, at tertium ab his dissentire contigerit. Quod si tres illi dati numeri specie omnes differant ab innicem: quartus ille, ad denominationem vel secundi, vel tertij, vt libuerit, reuocari poterit. Rem nouam, & hac in aurea regula nec dum in vsum adductam, rectè adduci allato exemplo demonstro. Ecce rectangulum est, cuius longitudo est 10 palmorum, latitudo 4 pedum: alterum verò rectangulum priori simile, construendum est, cuius longitudo sit pedum 5. quæritur eius latitudo in mensura pedum? Itaque quia neque primus & secundus; neque primus, & tertius eiusdem speciei mensuræ conueniunt; vt alterutro modo conuenire necesse est, vt regula instituatur, quemadmodum suprà ostensum

Palmi.	Pedes.	Pedes?
10.	4.	5.

ostensum est. Necesse ergo foret vt vel secundus numerus pedum 4. ad palmos 16 reduceretur multiplicato numero 4 pedum per numerum 4 (tot enim palmos pes quilibet continet) vt sic staret exemplum, & absoluta operatione haberetur latitudo quæsita pedum 8. vel tertius numerus pedum 5 ad palmos 20 reuocaretur; eóque in casu haberetur,, vt prius quæsita latitudo pedum 8, vt hoc schema duplex repræsentat. Verum-tamen prætermissâ hac pedum in palmos reductione; aut saltem in alium locum remissâ, si iuxta datos numeros 10 palmorum, pedum 4. & pedum 5 regula absoluatur, habebitur quartus quidam numerus 2: qui si per numerum 4 multiplicetur, per numerum scilicet, quo multiplicari debet, vel secundus numerus pedum 4; vel tertius pedum 5; vt ad palmos vterque reuocetur; fiet quæsitus quartus numerus, siue latitudo rectanguli posterioris primo similis, pedum 8. quæ habebatur communi seruatâ methodo operandi.

Pal.	Pal.	Ped.	Ped.
10.	16.	5 ?	8
Pal.	Ped.	Pal.	Ped.
10.	4.	20 ?	8.

Ratio est. Quia si quatuor numeri 10, 4, & 5, 2 in abstracto nulláque denominatione affecti sumantur: proportionales reuerà sunt, vt patet ex probatione methodi Regulæ huius proportionum. Iam si duobus prioribus 10 & 4 suæ denominationes restituantur: tertio autem 5 denominatio primi, quæ palmorum est, assignetur; tunc quartus 2 denominationem pedum ad secundum spectantem sibi vendicabit: erunt enim sicut palmi 10 ad pedes 4; ita palmi 5 ad pedes 2. Quod si iidem duo numeri tertius 5 & quartus 2 per quemcumque numerum multiplicentur, vt per numerum 4. (qui pedes ad palmos reuocat) producti 20 palmi, & 8 pedes eandem rationem habebunt inter se; quam habent 5 & 2 per prop. 17 libri 7. Elem. aut per prop. 3. libri 2. huius. Ergo & eandem, quam habent primus 10 palmorum, & secundus 4 pedum. Licet ergo tertius 5 pedum ad palmos non reducatur per multiplicationem eius per numerum 4, pedum ad palmos reductiuum; sed eâ dissimulatâ reductione, solus numerus quartus 2 tribus datis proportionalis inuentus per numerum illum 4 multiplicetur; habebitur verus quartus numerus 8, qui quæstioni satisfaciet. Nec verò minùs idem quartus numerus 8 haberetur in hoc exemplo, in quo secundus & tertius eiusdem sunt denominationis; si secundus 4. Pedes, depositâ denominatione, primi denominationem palmorum induat. Tunc enim permutando, ita erit primus numerus palmorum 10 ad tertium numerum pedum 5; ita secundus numerus palmorum 4 ad quartum numerum pedum 2. Si ergo tam secun-

Pal.	Ped.	Ped.	Ped.
10.	4.	5. ?	2. 8.

nem assequatur: vel primus ad secundi, aut tertij denominationem; vel è contra, secundus aut tertius ad denominationem primi reuocandus erit, aut etiam, si lubeat vterque. Tunc enim quarto sua denominatio assignabitur, ea quidem, quæ ad tertium pertinet, si primus & secundus eâdem potiantur: aut ea, quæ ad secundum spectat, si primus & tertius conueniant, vt paulò ante declaratum est. In exemplo itaque proposito, in quo primus numerus est palmorum 10, secundus pedum 4. Tertius passuum 5. reuocari poterit secundus pedum 4 ad primi speciem, & in palmos 16 commutari. Tunc autem tribus numeris, palmis 10, palmis 16. passibus 5, quartus proportionalis seruatis præceptis inuenietur numerus passuum 8. Quod si tertius numerus passuum 5 ad palmos, quæ est primi numeri denominatio, reducatur; vt fiat eius loco numerus 100 palmorum: tribus numeris, 10 palmorum, 4 pedum, 100 palmorum quartus proportionalis futurus est 400 palmorum: qui si per 4 diuidantur (per numerum scilicet, qui quot palmos pes quilibet continet, indicat) habebuntur pedes 40. Quos si ad passus reduxeris diuiso numero 40 per 5 (cum passus sit pedibus quinque æqualis) habebuntur passus 8, vt priùs, qui sit quartus quæsitus proportionalis numerus. Sed quoad hanc reductionem.

Obserua quintò. Necessarium non esse, vt ante initam operationem ad quartum numerum definiendum adhibendam, fiat illa; de qua proxima obseruatione dictum est, numerorum ad eandem speciem reductio: sed posse tribus datis numeris immutatis quartum adiungi more solito. Verùm tunc quartus ille numerus ad speciem reducetur; vel secundi, vel tertij ope diuisionis, aut multiplicationis (vt res feret) per eundem numerum, per quem reductio fieri debebat priùs quàm regula proportionum de more institueretur. Reducetur autem ad speciem secundi, vt ex dictis supra constat, si primus & tertius eiusdem sint speciei, siue denominationis: ad speciem autem tertij; si primum & secundum specie conuenire, at tertium ab his dissentire contigerit. Quod si tres illi dati numeri specie omnes differant ab inuicem: quartus ille, ad denominationem vel secundi, vel tertij, vt libuerit, reuocari poterit. Rem nouam, & hac in aurea regula nec dum in vsum adductam, rectè adduci allato exemplo demonstro. Ecce rectangulum est, cuius longitudo est 10 palmorum, latitudo 4 pedum: alterum verò rectangulum priori simile, construendum est, cuius longitudo sit pedum 5. quæritur eius latitudo in mensura pedum? Itaque quia neque primus & secundus; neque primus, & tertius eiusdem speciei mensuræ conueniunt; vt alterutro modo conuenire necesse est, vt regula instituatur, quemadmodum suprà ostensum.

Palmi.	Pedes.	Pedes?
10.	4.	5.

oſtenſum eſt. Neceſſe ergo foret vt vel ſecundus numerus pedum 4. ad palmos 16 reduceretur multiplicato numero 4 pedum per numerum 4 (tot enim palmos pes quilibet continet) vt ſic ſtaret exemplum, & abſoluta operatione haberetur latitudo quæſita pedum 8. vel tertius numerus pedum 5 ad palmos 20 reuocaretur; eóque in caſu haberetur, vt prius quæſita latitudo pedum 8, vt hoc ſchema duplex repræſentat. Verum-tamen prætermiſsâ hac pedum in palmos reductione; aut ſaltem in alium locum remiſsà, ſi iuxta datos numeros 10 palmorum, pedum 4. & pedum 5 regula abſoluatur, habebitur quartus quidam numerus 2: qui ſi per numerum 4 multiplicetur, per numerum ſcilicet, quo multiplicari debet, vel ſecundus numerus pedum 4; vel tertius pedum 5; vt ad palmos vterque reuocetur; fiet quæſitus quartus numerus, ſiue latitudo rectanguli poſterioris primo ſimilis, pedum 8. quæ habebatur communi ſeruatâ methodo operandi.

Pal.	Pal.	Ped.	Ped.
10.	16.	5	? 8
Pal.	Ped.	Pal.	Ped.
10.	4.	20	? 8.

Ratio eſt. Quia ſi quatuor numeri 10, 4, & 5, 2 in abſtracto nulláque denominatione affecti ſumantur: proportionales reuerà ſunt, vt patet ex probatione methodi Regulæ huius proportionum. Iam ſi duobus prioribus 10 & 4 ſuæ denominationes reſtituantur: tertio autem 5 denominatio primi, quæ palmorum eſt, aſſignetur; tunc quartus 2 denominationem pedum ad ſecundum ſpectantem ſibi vendicabit: erunt enim ſicut palmi 10 ad pedes 4: ita palmi 5 ad pedes 2. Quod ſi ijdem duo numeri tertius 5 & quartus 2 per quemcumque numerum multiplicentur, vt per numerum 4. (qui pedes ad palmos reuocat) producti 20 palmi, & 8 pedes eandem rationem habebunt inter ſe; quam habent 5 & 2 per prop. 17 libri 7. Elem. aut per prop. 3. libri 2. huius. Ergo & eandem, quam habent primus 10 palmorum, & ſecundus 4 pedum. Licet ergo tertius 5 pedum ad palmos non reducatur per multiplicationem eius per numerum 4, pedum ad palmos reductiuum; ſed eâ diſſimulatâ reductione, ſolus numerus quartus 2 tribus datis proportionalis inuentus per numerum illum 4 multiplicetur; habebitur verus quartus numerus 8, qui quæſtioni ſatisfaciet. Nec verò minùs idem quartus numerus 8 haberetur in hoc exemplo, in quo ſecundus & tertius eiuſdem ſunt denominationis; ſi ſecundus 4. Pedes, depoſitâ denominatione, primi denominationem palmorum induat. Tunc enim permutando, ita erit primus numerus palmorum 10 ad tertium numerum pedum 5; ita ſecundus numerus palmorum 4 ad quartum numerum pedum 2. Si ergo tam ſecun-

Pal.*	Ped.	Ped.	Ped.
10.	4.	5. ? 2.	8.

nem aſſequatur : vel primus ad ſecundi, aut tertij denominationem ; vel è contra, ſecundus aut tertius ad denominationem primi reuocandus erit, aut etiam, ſi lubeat vterque. Tunc enim quarto ſua denominatio aſſignabitur, ea quidem, quæ ad tertium pertinet, ſi primus & ſecundus eâdem potiantur : aut ea, quæ ad ſecundum ſpectat, ſi primus & tertius conueniant, vt paulò ante declaratum eſt, In exemplo itaque propoſito, in quo primus numerus eſt palmorum 10, ſecundus pedum 4. Tertius paſſuum 5. reuocari poterit ſecundus pedum 4 ad primi ſpeciem, & in palmos 16 commutari. Tunc autem tribus numeris, palmis 10, palmis 16. paſſibus 5, quartus proportionalis ſeruatis præceptis inuenietur numerus paſſuum 8. Quod ſi tertius numerus paſſuum 5 ad palmos, quæ eſt primi numeri denominatio, reducatur ; vt fiat eius loco numerus 100 palmorum : tribus numeris, 10 palmorum, 4 pedum, 100 palmorum quartus proportionalis futurus eſt 400 palmorum : qui ſi per 4 diuidantur (per numerum ſcilicet, qui quot palmos pes quilibet continet, indicat) habebuntur pedes 40. Quos ſi ad paſſus reduxeris diuiſo numero 40 per 5 (cum paſſus ſit pedibus quinque æqualis) habebuntur paſſus 8, vt priùs, qui ſit quartus quæſitus proportionalis numerus. Sed quoad hanc reductionem.

Obſerua quintò. Neceſſarium non eſſe, vt ante initam operationem ad quartum numerum definiendum adhibendam, fiat illa ; de qua proxima obſeruatione dictum eſt, numerorum ad eandem ſpeciem reductio : ſed poſſe tribus datis numeris immutatis quartum adiungi more ſolito. Verùm tunc quartus ille numerus ad ſpeciem reducetur ; vel ſecundi, vel tertij ope diuiſionis, aut multiplicationis (vt res feret) per eundem numerum, per quem reductio fieri debebat priùs quàm regula proportionum de more inſtitueretur. Reducetur autem ad ſpeciem ſecundi, vt ex dictis ſupra conſtat, ſi primus & tertius eiuſdem ſint ſpeciei, ſiue denominationis : ad ſpeciem autem tertij ; ſi primum & ſecundum ſpecie conuenire, at tertium ab his diſſentire contigerit. Quod ſi tres illi dati numeri ſpecie omnes differant ab inuicem : quartus ille, ad denominationem vel ſecundi, vel tertij, vt libuerit, reuocari poterit. Rem nouam, & hac in aurea regula nec dum in vſum adductam, rectè adduci allato exemplo demonſtro. Ecce rectangulum eſt, cuius longitudo eſt 10 palmorum, latitudo 4 pedum : alterum verò rectangulum priori ſimile, conſtruendum eſt, cuius longitudo ſit pedum 5. quæritur eius latitudo in menſura pedum ? Itaque quia neque primus & ſecundus ; neque primus, & tertius eiuſdem ſpeciei menſuræ conueniunt ; vt alterutro modo conuenire neceſſe eſt, vt regula inſtituatur, quemadmodum ſuprà oſtenſum

Palmi.	Pedes.	Pedes ?
10.	4.	5.

ostensum est. Necesse ergo foret vt vel secundus numerus pedum 4. ad palmos 16 reduceretur multiplicato numero 4 pedum per numerum 4 (tot enim palmos pes quilibet continet) vt sic staret exemplum, & absoluta operatione haberetur latitudo quæsita pedum 8. vel tertius numerus pedum 5 ad palmos 20 reuocaretur; eóque in casu haberetur,, vt prius quæsita latitudo pedum 8, vt hoc schema duplex repræsentat. Verum-tamen prætermissâ hac pedum in palmos reductione; aut saltem in alium locum remissâ, si iuxta datos numeros 10 palmorum, pedum 4. & pedum 5 regula absoluatur, habebitur quartus quidam numerus 2: qui si per numerum 4 multiplicetur, per numerum scilicet, quo multiplicari debet, vel secundus numerus pedum 4; vel tertius pedum 5; vt ad palmos vterque reuocetur; fiet quæsitus quartus numerus, siue latitudo rectanguli posterioris primo similis, pedum 8. quæ habebatur communi seruatâ methodo operandi.

Pal.	Pal.	Ped.	Ped.
10.	16.	5 ?	8

Pal.	Ped.	Pal.	Ped.
10.	4.	20 ?	8.

Ratio est. Quia si quatuor numeri 10, 4, & 5, 2 in abstracto nulláque denominatione affecti sumantur: proportionales reuerà sunt, vt patet ex probatione methodi Regulæ huius proportionum. Iam si duobus prioribus 10 & 4 suæ denominationes restituantur: tertio autem 5 denominatio primi, quæ palmorum est, assignetur; tunc quartus 2 denominationem pedum ad secundum spectantem sibi vendicabit: erunt enim sicut palmi 10 ad pedes 4: ita palmi 5 ad pedes 2. Quod si ijdem duo numeri tertius 5 & quartus 2 per quemcumque numerum multiplicentur, vt per numerum 4. (qui pedes ad palmos reuocat) producti 20 palmi, & 8 pedes eandem rationem habebunt inter se; quam habent 5 & 2 per prop. 17 libri 7. Elem. aut per prop. 3. libri 2. huius. Ergo & eandem, quam habent primus 10 palmorum, & secundus 4 pedum. Licet ergo tertius 5 pedum ad palmos non reducatur per multiplicationem eius per numerum 4, pedum ad palmos reductiuum; sed eâ dissimulatâ reductione, solus numerus quartus 2 tribus datis proportionalis inuentus per numerum illum 4 multiplicetur; habebitur verus quartus numerus 8, qui quæstioni satisfaciet. Nec verò minùs idem quartus numerus 8 haberetur in hoc exemplo, in quo secundus & tertius eiusdem sunt denominationis; si secundus 4. Pedes, depositâ denominatione, primi denominationem palmorum induat. Tunc enim permutando, ita erit primus numerus palmorum 10 ad tertium numerum pedum 5; ita secundus numerus palmorum 4 ad quartum numerum pedum 2. Si ergo tam secun-

Pal.	Ped.	Ped.	Ped.
10.	4.	5. ?	2. 8.

nem aſſequatur: vel primus ad ſecundi, aut tertij denominationem; vel è contra, ſecundus aut tertius ad denominationem primi reuocandus erit, aut etiam, ſi lubeat vterque. Tunc enim quarto ſua denominatio aſſignabitur, ea quidem, quæ ad tertium pertinet, ſi primus & ſecundus eâdem potiantur: aut ea, quæ ad ſecundum ſpectat, ſi primus & tertius conueniant, vt paulò ante declaratum eſt. In exemplo itaque propoſito, in quo primus numerus eſt palmorum 10, ſecundus pedum 4. Tertius paſſuum 5. reuocari poterit ſecundus pedum 4 ad primi ſpeciem, & in palmos 16 commutari. Tunc autem tribus numeris, palmis 10, palmis 16. paſſibus 5, quartus proportionalis ſeruatis præceptis inuenietur numerus paſſuum 8. Quod ſi tertius numerus paſſuum 5 ad palmos, quæ eſt primi numeri denominatio, reducatur; vt fiat eius loco numerus 100 palmorum: tribus numeris, 10 palmorum, 4 pedum, 100 palmorum quartus proportionalis futurus eſt 400 palmorum: qui ſi per 4 diuidantur (per numerum ſcilicet, qui quot palmos pes quilibet continet, indicat) habebuntur pedes 40. Quos ſi ad paſſus reduxeris diuiſo numero 40 per 5 (cum paſſus ſit pedibus quinque æqualis) habebuntur paſſus 8, vt priùs, qui ſit quartus quæſitus proportionalis numerus. Sed quoad hanc reductionem.

Obſerua quintò. Neceſſarium non eſſe, vt ante initam operationem ad quartum numerum definiendum adhibendam, fiat illa; de qua proxima obſeruatione dictum eſt, numerorum ad eandem ſpeciem reductio: ſed poſſe tribus datis numeris immutatis quartum adiungi more ſolito. Verùm tunc quartus ille numerus ad ſpeciem reducetur; vel ſecundi, vel tertij ope diuiſionis, aut multiplicationis (vt res feret) per eundem numerum, per quem reductio fieri debebat priùs quàm regula proportionum de more inſtitueretur. Reducetur autem ad ſpeciem ſecundi, vt ex dictis ſupra conſtat, ſi primus & tertius eiuſdem ſint ſpeciei, ſiue denominationis: ad ſpeciem autem tertij; ſi primum & ſecundum ſpecie conuenire, at tertium ab his diſſentire contigerit. Quod ſi tres illi dati numeri ſpecie omnes differant ab inuicem: quartus ille, ad denominationem vel ſecundi, vel tertij, vt libuerit, reuocari poterit. Rem nouam, & hac in aurea regula nec dum in vſum adductam, rectè adduci allato exemplo demonſtro. Ecce rectangulum eſt, cuius longitudo eſt 10 palmorum, latitudo 4 pedum: alterum verò rectangulum priori ſimile, conſtruendum eſt, cuius longitudo ſit pedum 5. quæritur eius latitudo in menſura pedum? Itaque quia neque primus & ſecundus; neque primus, & tertius eiuſdem ſpeciei menſuræ conueniunt; vt alterutro modo conuenire neceſſe eſt, vt regula inſtituatur, quemadmodum ſuprà oſtenſum

Palmi.	Pedes.	Pedes?
10.	4.	5.

ostensum est. Necesse ergo foret vt vel secundus numerus pedum 4. ad palmos 16 reduceretur multiplicato numero 4 pedum per numerum 4 (tot enim palmos pes quilibet continet) vt sic staret exemplum, & absoluta operatione haberetur latitudo quæsita pedum 8. vel tertius numerus pedum 5. ad palmos 20 reuocaretur; eóque in casu haberetur, , vt prius quæsita latitudo pedum 8, vt hoc schema duplex repræsentat. Verum-tamen prætermissâ hac pedum in palmos reductione; aut saltem in alium locum remissâ, si iuxta datos numeros 10 palmorum, pedum 4. & pedum 5 regula absoluatur, habebitur quartus quidam numerus 2: qui si per numerum 4 multiplicetur, per numerum scilicet, quo multiplicari debet, vel secundus numerus pedum 4; vel tertius pedum 5; vt ad palmos vterque reuocetur; fiet quæsitus quartus numerus, siue latitudo rectanguli posterioris primo similis, pedum 8. quæ habebatur communi seruatâ methodo operandi.

Pal.	Pal.	Ped.	Ped.
10.	16.	5 ?	8
Pal.	Ped.	Pal.	Ped.
10.	4.	20 ?	8.

Ratio est. Quia si quatuor numeri 10, 4, & 5, 2 in abstracto nulláque denominatione affecti sumantur: proportionales reuerà sunt, vt patet ex probatione methodi Regulæ huius proportionum. Iam si duobus prioribus 10 & 4 suæ denominationes restituantur: tertio autem 5 denominatio primi, quæ palmorum est, assignetur; tunc quartus 2 denominationem pedum ad secundum spectantem sibi vendicabit: erunt enim sicut palmi 10 ad pedes 4: ita palmi 5 ad pedes 2. Quod si ijdem duo numeri tertius 5 & quartus 2 per quemcumque numerum multiplicentur, vt per numerum 4. (qui pedes ad palmos reuocat) producti 20 palmi, & 8 pedes eandem rationem habebunt inter se; quam habent 5 & 2 per prop. 17 libri 7. Elem. aut per prop. 3. libri 2. huius. Ergo & eandem, quam habent primus 10 palmorum, & secundus 4 pedum. Licet ergo tertius 5 pedum ad palmos non reducatur per multiplicationem eius per numerum 4, pedum ad palmos reductiuum; sed eâ dissimulatâ reductione, solus numerus quartus 2 tribus datis proportionalis inuentus per numerum illum 4 multiplicetur; habebitur verus quartus numerus 8, qui quæstioni satisfaciet. Nec verò minùs idem quartus numerus 8 haberetur in hoc exemplo, in quo secundus & tertius eiusdem sunt denominationis; si secundus 4. Pedes, depositâ denominatione, primi denominationem palmorum induat. Tunc enim permutando, ita erit primus numerus palmorum 10 ad tertium numerum pedum 5; ita secundus numerus palmorum 4 ad quartum numerum pedum 2. Si ergo tam secun-

Pal.	Ped.	Ped.	Ped.
10.	4.	5. ?	2. 8.

Long. Palm.	Latit. Pedum	Long. Palm.	Latit. Pedum
12	9	30	$22\frac{1}{2}$

praxim parabuntur numeri factáque operatione iuxta tradita præcepta reperietur quartus numerus 22 cum semiſſe; qui non palmorum, quibus afficitur tertius numerus, eius rationis antecedens; ſed pedum denominationem aſſumit; eam ſcilicet, quæ ſecundum numerum 9, ſiue conſequentem prioris rationis afficit. Sicut enim duo antecedentes 12 palm. & 30 palm. eiuſdem ſpeciei materia afficiuntur; ita eadem inter ſe materia affici cenſendi ſunt duo rationum conſequentes, pedes 9, & pedes 22 cum ſemiſſe; alioqui non eadem eſſet ratio ſecunda cum priore; nec rectangulum priori ſimile conſtitueretur. Nec par eſt ratio cum primus & ſecundus eiuſdem materiæ denominatione afficiuntur, vt in priori altero exemplo contingebat. Tunc enim propter illam in vtroque termino prioris rationis materiam eandem, ipſi termini quaſi à materia abſoluti ſunt, & in abſtracto rationem tantùm exprimunt; quam tertius datus numerus ad quartum, qui inueſtigatur, debet obſeruare: quam ſanè obſeruabunt, quæcumque materia, modo eiuſdem ſpeciei, vtrumque afficiat. Innumera occurrunt eius generis exempla: qualia ſunt quæ in longitudinem dimenſionibus vſui eſſe ſolent. In iis ſiquidem duo priores numeri habentur certæ cuiuſdam menſuræ notæ minoris modi, quem varia Geometrica inſtrumenta continent; vt rationem exhibeant, quam tertius & quartus in aſſumpta menſura quantitatum metiendarum debent obſeruare nullâ habitâ ratione quantitatis menſuræ illius minoris ex qua Geometricum inſtrumentum diuiſum eſt. Iuxta quod idem fundamentum paratus eſt inſignis ille Geometricus Sinuum, Tangentium atque Secantium Canon: ex quo hauriantur in aliis menſuris, de quibus quærendum fuerit, rationes quantitatum; atque adeò ipſæ quantitates; quamuis particularum, in quas diuiduntur Sinus, Tangentes & Secantes, mentio nulla fiat; neque enim ex eis rerum materialium quantitates menſurantur; ſed ex aliis ex inſtituto definitis variis menſuris: quæ tamen eandem rationem ſeruent; quam numeri ex canonibus illis deprompti; quorum proinde operâ habeantur tres numeri ad regulam proportionum abſoluendam, & quartum ignotum numerum inueniendum neceſſarij. At verò ſi à primo numero ſecundus ratione materiæ, atque adeò ratione menſuræ (neque enim materiæ diuerſæ eadem poteſt applicari menſura) diſcrepet; nulla certa inter eos concretos numeros poteſt haberi ratio; cui fiat ſimilis relatio tertij numeri ad quartum inueniendum. Ratio ſiquidem tantùm reperitur

peritur inter eiuſdem generis quantitates; imò & eiuſdem ſpeciei in numeris concretis. Quæ enim ratio haberi queat numeri 10 palmorum ad 100 paſſuum numerum, niſi hic ad palmos reducatur? Tunc ergo, vt ſuperiùs aſſerui, eadem debet eſſe materia tertij numeri cum materia numeri primi; eadem, inquam, ſpecie, ac proinde eiuſdem menſuræ capax: vt mox oſtendam, vt ſcilicet habeatur nota ratio (ope permutationis) primi numeri ad tertium: quam ſecundus ſeruet ad quartum, qui inueſtigatur. Vnde patet euidentius, cur in huiuſmodi caſu quartus eâdem materiâ affici cenſeri debeat, quâ ſecundus afficitur: vt ſcilicet inter eos ratio menſuræ intercedere poſſit, quam habet numerus primus ad tertium. Quæ ex traditis ſuperius exemplis, ſi perpendantur, clariſſima euadunt: vt pluribus ad hanc rem illuſtrandam non ſit opus.

Monui proximè in eo caſu, in quo concreti duo numeri primus & ſecundus diſcrepant ratione materiæ, vel eius menſuræ; atque adeò, vt explicatum eſt, primus & tertius conuenire debent: ita debere conuenire; vt non genere tantùm, ſed etiam ſpecie conueniant, vt quartus numerus colligatur. Quod certum eſſe patet; quod tunc, etſi tres dari videantur numeri, ex quibus quartus eruatur; nulla tamen datur inter eorum binos nota ratio; cui ſimilis ratio altera per hanc proportionum regulam ſtatui poſſit: quæ, vt abſoluatur, rationem aliquam notam dari ſupponit. Imo nec ipſi numeri tunc noti dici poſſunt; cum non ſint eiuſdem naturæ vnitatum numeratarum multitudo; ad quam ſi reuocentur, erunt hi reuocati à prioribus longè diuerſi. Ergo ante reductionem non dabantur tanquam noti. Rem exemplo illuſtro. Eſt rectangulum quoddam; cuius longitudo eſt palmorum 10, latitudo pedum 4. Cui ſimile aliud rectangulum ſit exhibendum; cuius longitudo ſit paſſuum 5. habentur ergo tres numeri tribus diuerſis denominationibus palmorum, pedum, & paſſuum affecti: inter quorum binos vtlibet aſſumptos nulla intercedit nota ratio; quæ enim ratio ſiue habitudo ſecundum quantitatem intercedere poteſt inter 10 palmos, & pedes 4. numerum primum & ſecundum, niſi alterum eorum ad alterius denominationem, vt palmos ad pedes, vel pedes ad palmos prius reduxeris? nec minus ignota eſt ratio numeri primi palmorum 10 ad tertium paſſuum 5; niſi accedat reductio ad eiuſdem ſpeciei menſuram. Ad hæc ſi, vt regula præcipit, duos poſteriores numeros pedum 4. & paſſuum 5 in ſe mutuo ducas: cuius menſuræ denominatione productum numerum 20 affecturus es, pedumne, an paſſuum? cuius item menſuræ futurus eſt numerus 2: qui oritur ex numero; illo 20 per multiplicationem ſecundi 4, & tertij 5 genito; ſi per primum palmorum 10 diuidatur? Neque enim huic numero 2, palmorum denominationem potiori iure tribuas, quàm pedum aut paſſuum. Quare, vt quartus numerus debitam à materia impoſitam denominatio-

oſtenſum eſt. Neceſſe ergo foret vt vel ſecundus numerus pedum 4. ad palmos 16 reduceretur multiplicato numero 4 pedum per numerum 4 (tot enim palmos pes quilibet continet) vt ſic ſtaret exemplum, & abſoluta operatione haberetur latitudo quæſita pedum 8. vel tertius numerus pedum 5 ad palmos 20 reuocaretur; eóque in caſu haberetur, , vt prius quæſita latitudo pedum 8, vt hoc ſchema duplex repræſentat. Verum-tamen prætermiſsâ hac pedum in palmos reductione; aut ſaltem in alium locum remiſsâ, ſi iuxta datos numeros 10 palmorum, pedum 4. & pedum 5 regula abſoluatur, habebitur quartus quidam numerus 2: qui ſi per numerum 4 multiplicetur, per numerum ſcilicet, quo multiplicari debet, vel ſecundus numerus pedum 4; vel tertius pedum 5; vt ad palmos vterque reuocetur; fiet quæſitus quartus numerus, ſiue latitudo rectanguli poſterioris primo ſimilis, pedum 8. quæ habebatur communi ſeruatâ methodo operandi.

Pal.	Pal.	Ped.	Ped.
10.	16.	5 ?	8

Pal.	Ped.	Pal.	Ped.
10.	4.	20 ?	8.

Ratio eſt. Quia ſi quatuor numeri 10, 4, & 5, 2 in abſtracto nulláque denominatione affecti ſumantur: proportionales reuerà ſunt, vt patet ex probatione methodi Regulæ huius proportionum. Iam ſi duobus prioribus 10 & 4 ſuæ denominationes reſtituantur: tertio autem 5 denominatio primi, quæ palmorum eſt, aſſignetur; tunc quartus 2 denominationem pedum ad ſecundum ſpectantem ſibi vendicabit: erunt enim ſicut palmi 10 ad pedes 4: ita palmi 5 ad pedes 2. Quod ſi ijdem duo numeri tertius 5 & quartus 2 per quemcumque numerum multiplicentur, vt per numerum 4. (qui pedes ad palmos reuocat) producti 20 palmi, & 8 pedes eandem rationem habebunt inter ſe; quam habent 5 & 2 per prop. 17 libri 7. Elem. aut per prop. 3. libri 2. huius. Ergo & eandem, quam habent primus 10 palmorum, & ſecundus 4 pedum. Licet ergo tertius 5 pedum ad palmos non reducatur per multiplicationem eius per numerum 4, pedum ad palmos reductiuum; ſed eâ diſſimulatâ reductione, ſolus numerus quartus 2 tribus datis proportionalis inuentus per numerum illum 4 multiplicetur; habebitur verus quartus numerus 8, qui quæſtioni ſatisfaciet. Nec verò minùs idem quartus numerus 8 haberetur in hoc exemplo, in quo ſecundus & tertius eiuſdem ſunt denominationis; ſi ſecundus 4. Pedes, depoſitâ denominatione, primi denominationem palmorum induat. Tunc enim permutando, ita erit primus numerus palmorum 10 ad tertium numerum pedum 5; ita ſecundus numerus palmorum 4 ad quartum numerum pedum 2. Si ergo tam ſecun-

Pal.	Ped.	Ped.	Ped.
10.	4.	5. ? 2.	8.

dus 4, quàm quartus 2 per eundem numerum 4 (qui pedes in palmos conuertere natus eſt) multiplicetur; vt fiant 16 & 8; eadem erit eorum ratio per citatas propoſitiones, quæ eſt numerorum 4 & 2 multiplicatorum. Quare ſola facta multiplicatione quarti numeri 4. per numerum illum 4. habetur verus quæſitus quartus numerus pedum 8, non ſecùs quàm haberetur ſi ſecundo numero pedum 4 in palmos 16 reducto, regula de more inſtitueretur, tribus datis numeris 10 pal. 16 Pal. & pedum 5 quarto proportionali inuento, eodem numero pedum 8.

Non ſecùs ſe res habet, etſi tres dati numeri diuersâ omnes denominatione afficiantur. Vt ecce, tribus ſuperioribus numeris reſumptis tres diuerſæ materiæ, à quibus variè denominentur, aſſignemus; vt primo palmi, ſecundo pedes, & tertio paſſus, vt hoc paradigma refert. Quartus ergo numerus his tribus 10, 4, 5 proportionalis non niſi 2 eſſe poteſt.

Pal.	Pedes	Paſſus
10	4	5 ? 2

At cuius materiæ, vel denominationis? nullius omninò niſi determinetur per reductionem aliquam ad denominationem vel pedum, vel paſſuum eâdem methodo paulò ante tradita. Reducetur ſcilicet numerus hic 2 ad paſſus 8: ſi per numerum 4. per quem ſecundus numerus pedum 4 ad palmos 16 reuocaretur, multiplicetur, conuerſo enim ſecundo numero pedum 4 in palmos 16; tribus numeris 10 pal. 16 pal. 5 paſſ. quartus proportionalis iuxta tritam regulæ methodum inuentus, foret paſſuum 8. At idem numerus paſſuum 8, vt oſtenſum eſt, habetur ſi poſthabitâ reductione ſecundi numeri pedum 4 ad palmos 16, multiplicetur numerus ille 2 per illum ipſum numerum 4, per quem ſecundus 4 multiplicatus in palmos 16 conuertitur. At ſi ille idem numerus 2, pedum denominatione ſit afficiendus; id præſtabitur, ſi per numerum 20, multiplicetur; vt fiat numerus 40 pedum. At quo fundamento numerus ille 20, numerum 2 multiplicare iubetur, vt habeantur pedes 40? hoc nimirum, quia ſecundum legem conſuetam tertius numerus paſſuum 5 in palmos reuocari deberet, hoc eſt, in denominationem primi numeri, vt haberetur quartus numerus pedum denominatione inſignitus, vt ex dictis conſtat. Hæc autem reductio perficitur ducto paſſuum numero 5 in numerum illum 20; tot enim palmos paſſus quilibet complectitur, ſic enim haberentur tres numeri pal. 10. pedes 4. palmi 100. quibus adderetur quartus proportionalis 40 pedes. At omiſſa illa paſſuum reductione, ſufficit vt inuentus numerus 2 per numerum 20 multiplicetur, vt oſtenſum eſt, huius praxeos eſto aliud exemplum huiuſmodi, præcedente fortaſſe diſtinctius.

Curſor eſt qui tribus horis, milliaria 6 decurrit. Quot milliaria duorum dierum ſpatio decurſurus eſt? hic ſunt tres numeri inter ſe ſpecie diſcrepantes. Si igitur ſecundum illos operatio ineatur, habebitur numerus

horæ	milliaria	Dies	mill.
3	6	2?	4. 96

rus 4 nulla dum denominatione insignitus : ei tamen, vt quarto proportionali, debetur denominatio milliariorũ. Quam assequetur; si per numerũ 24, per quem dies illi 2 ad horarũ denominationem in eum ducti reuocantur, multiplicetur : vt fiant milliaria 96 pro quarto numero proportionali inuestigando. Eadem est huius paradigmatis, eadem omnium similium demonstratio superiùs allata.

Hic porrò omittendum non est reductionem vnius generis mensuræ in speciem aliam non tantùm fieri per multiplicationem, vt habent paulò ante proposita exempla; sed etiam per diuisionem : cum scilicet minor species in maiorem conuertitur. Tunc autem etiam locum habet hæc obseruatio. Vt si dicatur. Cursor duobus diebus decurrit 100 milliaria quot milliaria decursurus est horis 30. sic stabunt numeri.

dies	milliaria	horæ	milliaria
2	100	30? 1500	$62\frac{1}{2}$

Nulla ergo facta reductione horarum 30 in dies, in primum scilicet numerum trium datorum numerorum; quæ necessaria foret ad quartum numerum ad milliaria pertinentem reperiendum, & quam exhiberet diuisio numeri 30 horarum per numerum 24 (quot scilicet horis constat dies vnus) omissa, inquam, illa reductione, quæ ad communem regulæ methodum adhiberi solet. Inquiratur tribus numeris, 2, 100, 30, quartus proportionalis 1500. Tum hic diuidatur per 24, per numerum scilicet, qui diuidens horas 30, eas ad dierum speciem reduxisset apposite ad communem methodum ineundã : dabit hæc diuisio numeri 1500 per 24 milliaria $62\frac{1}{2}$ quæ solita methodo inuenta fuissent. Nec huius obscura est ratio. Nam cum tribus numeris 2 dierum, 100 milliariorum, & 30 horarum, quartus proportionalis 1500 inuenitur, censetur hic milliariorum denominationem habere; tertius verò numerus 30, qui horarum denominatione insignitur, eam deponit; & in dierum denominationem commutat, etsi commutationis illius mentio nulla fiat; debet enim tertius numerus quæstionem annexam habens primo numero respondere, & conformis esse, sicut & quartus inuentus secundo. Adeò vt in proposita quæstione secundum hanc methodum solutã efferri debeant termini in hunc modum. Si cursor diebus 2 conficit milliaria 100 : quot milliaria conficiet diebus 30? respondetur conficere 1500. Quo posito, si dies illi 30, illáque milliaria 1500 diuidantur per numerum 24 : etiam producti duo numeri $1\frac{6}{24}$ & $62\frac{12}{24}$ duobus prioribus numeris proportionales erunt, quibus proportionales erant duo 30 & 1500 : hi enim per eundem numerum 24 diuisi numeros producunt in eadem ratione cum diuisis per

per Prop. 4. libri 2. huius. At numerus horarum 30 per numerum 24 diuisus in numerum dierum $1\frac{6}{24}$ conuertitur, & sic conuersus eiusdem est cum primo numero dierum 2, denominationis: ita vt tres numeri ad ineundam operationem ita habeanr. Dies 2. Milliaria 100. Dies $1\frac{6}{24}$ quot milliaria exhibebit? Non alia quàm $62\frac{12}{24}$ siue $62\frac{1}{2}$ qui milliariorum numerus habetur; si solùm numerus ille 1500, qui decurritur spatio dierum 30, diuidatur per 24, per quem diuisus numerus 30 horarum in dies $1\frac{6}{24}$ conuerteretur nullâ ergo facta mentione huius horarum 30 in dies conuersionis; habetur quæsitus milliariorum numerus $62\frac{1}{2}$, qui oris 30 percurritur, si tribus numeris 2, 100, 30? quartus proportionalis 1500 inueniatur; qui per 24 diuidatur. Qui modus per diuisionem semper adhibendus veniet, quoties mensura minor ad maiorem in eodem genere, quæ primum locum in regula trium occupet, reuocanda erit; vt semper tertius numerus cum primo sit similis. Quemadmodum adhibetur multiplicatio, quoties tertius numerus maioris est in eodem genere denominationis, quàm primus, vt paulò ante declaratum est.

Ex his, & illis, quæ de reductione fractorum ad eandem denominationem dicta sunt libro 2. constat, quid tum præstari debeat: cum tres dati numeri, vel omnes, vel aliqui variis fractionibus componuntur. Vt si quæratur. Diebus 2, horis 4. decurruntur milliaria 100, stadia quatuor, passus 8. Diebus 4, horis 15. Quot decurrentur milliaria. Tunc enim singuli numeri adhærentes reducentur ad denominationem eandem; & simul addentur: vt habeantur tres numeri simplices: per quos instituatur operatio.

Hactenùs ea omnia videntur explicata cumulatissimè: quæ quouis in materiæ genere ad hanc nobilissimam proportionum regulam ritè, & ex arte vsurpandam necessaria, aut etiam vtilia videri possint? vt eam pluribus exemplis, quæ in omni quantitatis genere vel puræ, vel mixtæ occurrunt innumera, quæque passim congesta ad nauseam obtruduntur; illustrare non sit opus. Restat vt peculiares quosdam eam adhibendi modos prosequamur.

PROP.

PROP. XXXVII. *Probl.*

Datis duobus plani alicuius numeri lateribus; datóque alio quopiam eiusdem plani numeri latere, aliud latus inuenire; quod cum dato illum comprehendat.

Expositio.

hoc est, vt statim patebit, illius proportionum regulæ fundamentum; quam euersam, vel inuersam vulgò dicunt. Sint ergo duo data latera A & B plani alicuius numeri C. Datum autem sit tertium quoddam latus D eiusdem plani numeri C: quæritur latus, quod cum latere D eundem planum numerum C contineat. Hic cernis aliud aliquid quęri, quàm quartum tribus datis numeris A, B, D, proportionalem. Si enim tribus A, B, D, quartus inueniretur proportionalis numerus: nequaquam hic cum numero D planum plano C æqualem, vt exigit propositio, contineret; sed similem per definit. 21. libri 7. Elem. Vt autem contineat æqualem, hæc erit ineunda constructio.

A	B	C
4	6	24
D	E	C
8	3	24

Constructio & Demonstratio

Tribus numeris D, A, B, quartus proportionalis E inueniatur. Dico factum esse, quod proponitur: duos numerum scilicet D cum numero E, planum numerum C continere; quem duo numeri A & B continent. Huius demonstratio ipsissima est probatio propositionis 19. libri 7 Elementorũ. Sunt enim ex constructione duo numeri D, A duobus B, E proportionales. Ergo qui sub extremis D, E comprehenditur planus numerus; æqualis est plano numero sub mediis A & B comprehenso. Ergo datis duobus plani numeri lateribus; datóque alio latere, aliud inuentum est, quod cum dato eundem planum numerum comprehendat. Quod faciendum erat.

D, A, B, E
8. 4. 6. 3.
C 24

PROP. XXXVIII. *Probl.*

Oporteat euersæ proportionum regulæ methodum explicare.

Constructio

Hoc regulæ proportionum genus ſemper adhibendum eſt : quoties ratio æqualitatis vel conſtituenda, vel iam conſtituta & ſuppoſita, eſt obſeruanda; vt ex inferiùs allatis exemplis manifeſtum fiet : quorum hoc eſto primum ; cui regulæ præcepta applicabo. Eſt area rectangula : cuius longitudo eſt paſſuum 40, latitudo eſt paſſuum 30. Altera huic æqualis area item rectangula deſignanda proponitur : cuius longitudo ſit paſſuum 20. Quæritur quanta futura ſit eius latitudo? ea definietur his obſeruatis præceptis, quæ ex antecedente propoſitione deducuntur.

Sedes prima capit dubium : ſimilémque ſecunda.
Tertia vult reliquum. Poſtremos ducito. Factum
Diuide per primum : quartum in quotiente creabis.

Præceptum 1. *Sedes prima capit dubium* &c. pertinet præceptum hoc ad aptam numerorum trium datorum inter ſe collocationem ; vt tam multiplicatio, quam diuiſio ad ſolutionem ineundæ ordinata methodo ſemper eádem inſtituantur. Debet ergo in *prima ſede*, hoc eſt, in primo loco ſtatui numerus *dubius*, hoc eſt, numerus, qui quæſtionem annexam gerit, vt hîc, numerus paſſuum 20, cui quæritur debita latitudo. In ſecundo autem loco ſtatuetur numerus primo ſimilis, eiuſdem ſcilicet denominationis, ſiue materiæ ; qui eſt longitudo itidem areæ datæ paſſuum 40. Tertio denique loco reliquus numerus ; qui eſt eiuſdem datæ areæ latitudo paſſuum 30 collocabitur. Hanc ordinationem numerorum cernere eſt in ſchemate appoſito.

Long. Paſſus.	Long. Paſſus.	Lat. Paſſus.	Lat. Paſſus
20	40	30?	60

Præceptum 2. *Poſtremos ducito.* Hoc, tertiúmque proximè ſequens præceptum, eadem ſunt iiſdémque verbis enunciata cum præceptis duobus Propoſitionis 36. Iubetur ergo hoc præcepto, vt duo numeri poſtremi 40 & 30 inter ſe multiplicentur, longitudo ſcilicet, & latitudo areæ datæ : vt fiat numerus planus, ſiue area ipſa data 1200.

Præceptum

Præceptum 3. *Factum diuide per primum.* Diuide hunc numerum 1200, genitum per multiplicationem mutuam duorum numerorum 40 & 30, per primum numerum 20. Nam *Quartum in quotiente creabis.* Quotiens scilicet diuisionis huius (qui est 60) quæstioni satisfaciet: eritque latitudo quæsita passuum 60: quæ cum longitudine data passuum 20 aream continet æqualem areæ datis numeris 40 & 30 comprehensæ.

Demonstratio.

Alia non est huius solutionis demonstratio, quàm quæ Propos. præcedente allata est. Sunt enim duo numeri priores 20 & 40 duobus posterioribus 30 & 60 proportionales: quo fit, vt qui gignitur ex primo & vltimo numerus, æqualis sit numero ex duobus mediis in se ductis genito. Rectè igitur hac methodo habetur quartus numerus ex tribus datis; cum ratio quædam æqualitatis inter binos & binos debet obseruari. Quæ est euersæ proportionum regulæ vsus, & praxis.

Scholium.

Alia est datorum numerorum huic regulæ inseruientium dispositio obseruari vulgò solita: ita scilicet, vt datus quæstionis numerus tertium locum occupet, non secùs quàm in communi aurea regula fieri debere traditum est superiùs propos. 36: sed tunc duo priores numeri in se ducuntur genitúsque per eam multiplicationem numerus diuiditur per tertium datum numerum, qui quæstionem gerit; vt habeatur numerus quartus, qui inuestigatur. Vnde regulam proportionum euersam, siue inuersam dici aiunt; eò quod, etsi eadem sit numerorum dispositio, quæ in communi aurea regula obseruatur; tamen inuertitur tam multiplicatio quàm diuisio: dum hîc, non duo, vt ibi, posteriores numeri multiplicantur; & genitus per primum diuiditur: sed contra multiplicatis prioribus duobus, tertius genitum numerum diuidit. Atque ex ea numerorum inter operandum euersione, euersæ regulæ nomen profectum est;, dum regulæ superiori, regulæ directæ denominatio tributa est. Quamquam autem idem numerus quartus habeatur, vtrouis modo dati numeri disponantur; aptior tamen ea videtur dispositio, quam hic assignaui; tum quia numero quæstionis primum locum occupante, constat ratio, quam seruare debent inter se numeri quatuor proportionales, dum primus ad secundum ita se habet; vt tertius habere, se debet ad quartum, qui quæritur, vt patet in superiori schemate: tum quia ex eo numerorum ordine, solutionis demonstratio euadit, vt cernere est, euidentissima absque alia constructione, quæ alioqui foret necessaria. Nec tamen minori iure dicetur hæc

regula ita constitutis eius terminis, euersa siue inuersa; eò quod, contra quàm in directa contingat, numerus quæstionis, cui videbatur inquiri rationis consequens, illum, dum primus statuitur, iam assecutus est, nempe sibi similem; qui ex primo termino per hanc mutationem factus est secundus: quæstio autem, quæ numero annexa erat, qui primus terminus ex vltimo euasit, asserta est ei termino; qui ex secundo euasit tertius, eique velut antecedenti quartus numerus, velut consequens, inuestigatur; vt fiat ratio secunda priori æqualis. Sed de huius regulæ nomine, déque eius terminorum transpositione; & quæstionis in alium terminum translatione dictum sit satis. Pauca restant circa æqualitatem illam (quæ in hac regula, vt supra monui, semper occurrit) obseruanda; vt ex eo velut charactere facilè agnoscatur; quænam quæstiones ex ea suam hauriant solutionem.

Potest interdum æqualitas quæstionis esse materia, etsi, per se primò minimè intenta. Vt in superiori exemplo. Datur rectanguli alicuius (cuius quantitas tacetur) longitudo passuum 40; & latitudo, siue altitudo passuum 30. Quæritur alterum quod ei sit æquale, cuius latitudo sit passuum 20. Atque ita habent numeri iuxta statutam collocationem, vt hoc schema refert.

Long.	Long.	Lat.	Lat.
20	40	30 ?	60

Quæritur ergo latitudo rectanguli, vel eiusdem, vel ei æqualis; quæ cum longitudine data passuum 20 illud contineat; nec quæritur per se, vt illud constituatur, sed tantum consequenter; non enim potest non esse notum, eius tum longitudine, tum latitudine notis, directè autem latitudo quæritur: quam eò maiorem esse oportet, quò minor fuerit data longitudo, vel contrà. Nemini enim dubium esse potest; quin si rectanguli alicuius longitudo minuatur, tantò debeat augeri latitudo, si rectanguli eadem quantitas permanere supponatur; vt scilicet latitudo aucta, longitudinis diminutionem compenset. Hinc est, vt termini dati euerti debeant: cum non sit eadem ratio termini quæstionem gerentis ad quartum terminum, qui quæritur: quæ est duorum priorum terminorum. Ex quo rectanguli Geometrici paradigmate reliquæ huiusmodi quæstiones æqualitatem quandam includentes perpendi debent, & agnosci possunt.

Sæpius autem nullius æqualitatis mentio fit; vnde sequitur; vt ad quam regulæ speciem quæstio pertineat, ægriùs dignoscatur: non tamen potest ea æqualitas quæstione rectè perpensâ omninò latere; vt ex his, quæ subiicio, exemplis colligere est, & alia eiusdem generis metiri.

Cursor est qui certum quoddam itineris spatium diebus 8 decursurus est: si diebus singulis milliaria 24 emetiatur. At vrgente necessitate idem

illud

illud ſpatium diebus 6 tenetur conficere. Quæritur quot milliaria diebus ſingulis decurrere debeat? In ea quæſtione æqualitas quædam reperitur; æqualitas ſcilicet, ſiue identitas itineris, quodcunque tandem illud fuerit, ſiue 500, ſiue 1000 milliariorum. Ex ea autem æqualitate ſequitur, iudicióque naturali per ſe notum eſt, curſorem milliaria ſingulis diebus conficere debere eò plura: quò pauciores dies in eo emetiendo ſpatio tenetur impendere. Sic ergo ex ſupra ſtatutis præceptis ſtabunt numeri tranſlato in primum locum numero 6 dierum, cui quæſtio adhærebat: quæ & ipſa transfertur in numerum 24 milliariorum: cui velut antecedenti reſpondet conſequens numerus 32 milliariorum, vt patet abſolutâ operatione; vt eadem ſit ratio numeri 24 milliariorum ad 32 milliaria; quæ eſt numeri 6 dierum ad dies 8. Atque ita, quò pauciores dies aſſignantur ad idem iter emetiendum; eò plura milliaria diebus ſingulis ſunt decurrenda.

Dies	Dies	Milliaria	Mill.
9	8	24 ?	32

Aliud accipe paradigma huiuſmodi. Arx obſidetur militum 500 præſidio munita: quibus ad victum ſubſidia neceſſaria ad dies tantum 20 ſuppetunt. Verùm nulla ſoluendæ obſidionis ſpes affulget, niſi poſt dies 30. emittendi igitur ſunt milites aliquot, vt reliqui ad dies 30 victitare queant. Quæritur quot ſint emittendi, quot retinendi? Hic etiam obſerua quandam æqualitatem reperiri: æqualitatem ſcilicet commeatûs, qui idem ad dies 20 ſufficit, & quem ad dies 30 ſufficere neceſſarium eſt. Planum autem cuique eſt eò pauciores eſſe debere ad eaſdem eſcas exhauriendas; quò plures dies ſtatuuntur, quibus debent eis veſci. Itaque iuxta traditam methodum numerus dierum 30. cui adhæret quæſtio, primo loco ſtatuetur, tum ei ſimilis numerus dierum 20; ac denique numerus 500 militum, qui quæſtio aſſeritur; cui ſatisfacit factâ operatione, militum numerus 333, qui in arce retinendi ſunt: emittendi autem reliqui, nempe 167; qui habentur ſubducto numero 333 à numero 500.

Dies	Dies	Milites	Milites
30	20	500?	333

Aliud. Das alteri mutuos aureos 1000 ad menſes 6, ea conditione, vt poſtmodum ad menſes 9 tot tibi aureos det mutuò vt emolumentum, quod pro commodatis aureis illis 1000 exigebas, totum tibi refundatur. Quot ergo aureos tibi mutuos dare debet? habes hic emolumenti, quodcunque illud ſtatutum fuerit, æqualitatem. Habes autem numerum menſium 9; cui annexa eſt quæſtio: ergo idem numerus menſium 9 primum locum occupare debet; ſecundum verò numerus ei ſimilis menſium

Menses	Menses	Aureos	Aureos
9	6	1000 ?	666 $\frac{2}{3}$

6. Tertium denique numerus aureorũ 1000. qui quæstionem suscipit. Ita dispositis numeris, absolutáque operatione, inuenies aureorum numerum 666 $\frac{2}{3}$ quæstioni satisfacere; eorum scilicet emolumentum, mensium 9 spatio collectum æquale esse emolumento (quod ex aureis 1000 spatio mensium 6 colligeretur. Quod si in hunc modum paulò diuersum quæstio proponeretur: vt si quæreretur, quo temporis spatio aurei 600 mutuò dandi forent; vt emolumentum compensarent, quod ex aureis 1000 per 6 menses mutuò datis profectum est. Quia eadem emolumenti æqualitas supponitur, quæstio eiusdem euersæ regulæ operâ solueretur,

Aurei	Aurei	Menses	Nenses
600	1000	6 ?	10

dispositis, vt hic cernitur, numeris: reperiretur autem spatio 10 mensium emolumentum idem [quodnam verò illud sit, nihil ad rem interest ex aureis 600 colligi; quod ex aureis 1000 per 6 menses deriuatur. Atque in hunc modum aliæ & aliæ quæstiones, in quibus æqualitas quædam debet obseruari, solutionem sortientur suam: quas omnes tum iudicio naturali, tum ex hisce allatis exemplis facilè erit agnoscere, vt ad hanc regulam euersam reuocentur.

Obserues præterea hac in euersa regula locum habere nouam illam methodum quartum numerum tribus datis proportionalem ope solius diuisionis inueniendi: quam propos. 36. exposui. Cum enim quæstiones omnes, quæ ex euersa hac regula solutionem repetere debent suam, ad regulam directam iuxta hic à me traditam numeros tres datos ordinandi methodum, reducantur: nihil obesse potest, quo minus ea omnia, quæ de illa, vel præcepta, vel obseruata sunt; huic etiam applicari possint. Quare in postremo allato paradigmate si primus numerus 600 aureorum diuidatur per secundum 1000: tum per quotientem diuidatur tertius 6, quæsitus quartus mensium 10 colligetur. Ea denique omnia, quæ in scholio citatæ propositionis annotata sunt circa varias numerorum denominationes à materia, petitas, huic etiam regulæ apprimè conuenire censendum est.

PROP.

PROP. XXXIX. *Probl.*

Datis compoſitis numeris quartum proportionalem aſſignare.

Expoſitio.

Proponuntur non rarò quæſtiones per proportionum regulam ſoluendæ : quæ pluribus numeris quàm tribus conſtant : quibus tamen plures non admittit hæc regula. Quare, vel illi plures numeri ad tres neceſſarios veniunr reuocandi ; vel pluribus eiuſdem regulæ operationibus inſtitutis quæſtiones huiuſmodi ſoluendæ erunt. Notandum verò eſt inter propoſitos plures illos numeros quoſdam eſſe præcipuos, de quibus præcipua quæſtio eſt ; quoſdam autem minùs principales ; qui primariis illis adiunguntur, eóſque comitantur : vnde ita affecti numeri dicuntur compoſiti ; & ex eo hæc quæ circa illos verſatur regula, compoſita dici vulgò conſueuit. Oritur demùm hæc numerorum ex pluribus compoſitio ex diuerſa tantùm materia ; qua numeri afficiuntur : adeò vt vix vllus regulæ huius compoſitæ vſus in numeris abſtractis obſeruetur ; ſed tantùm in concretis, & cuipiam materiæ immerſis. Vt ſi proponatur huiuſmodi quæſtio foſſa paſsûs 100 longa abſoluitur ab operariis 20 , intra 5 dies : quot paſsûs longam abſoluerent operarij 30 ſpatio dierum 6 ? hic habentur quinque diuerſi numeri ; nempe foſſores 20 , & illi numero annexus numerus dierum 5. tum, numerus paſſuum 100. Denique numerus foſſorum 30 cum annexo numero dierum 6 : qui duo numeri ſimul tertium locum, cum de illis quæſtio fiat, occupare debent : ſicut duo numeri, foſſorũ 20 , & dierum 5 , his ſimiles primum locum ſibi vendicant. Secundus autem locus debetur numero 100 longitudinis foſſæ abſolutæ. Vides ergo numeris 20 & 30 foſſorum tanquam principalibus adhærere minùs principales dierum numeros 5 & 6 : quorum tamen habenda eſt ratio , vt quartus numerus ritè aſſignetur, numeris illis compoſitis proportionalis. Duabus viis ad ſolutionem quæſtionis huius, & ad huius inſtar , reliquarum omnium ſimilium perueniri poteſt. Quas oſtendo.

Prior Conſtructio.

Sit ergo propoſita quæſtio ſoluenda : ſit nimirum inquirendum quot paſſuum foſſa diebus 6 ab operariis 30 abſoluenda ſit, ſeruatâ proportione, foſſæ paſſuum 100 , dierum 5 ſpatio ab operariis 20 abſolutæ. Id, hoc

hoc obseruato præcepto consequeris.

Quærito præcipuis quartum, cui quærito rursùs
Cum sociis quartum: quo fiet quæstio nota

Præceptum vnicum *quærito præcipuis quartum.* Id est tribus numeris; quorum duo sunt præcipui, siue principales, sibique adiunctos habent alios numeros minùs principales; quartum proportionalem inuestiga. Vt in proposita quæstione duo operariorum numeri 20 & 30 sunt præcipui numeri; quibus adiunguntur minùs præcipui, & quasi accidentales dierum numeri 5 & 6. Horum autem duorum numerorum 20 & 30 posterior 30 quæstionem annexam habet, eóque nomine tertium locum sibi vendicat; prior autem 20 ei similis locum primum; reliquum verò locum secundum, siue medium occupabit numerus 100 passuum longitudinis fossæ: atque ita, vt hoc schema refert, sese habebit hæc prima numerorum dispositio:

Operarij	Passus	Operarij	passus
20	100	30?	150

absolutáque operatione habebitur quartus numerus 150 passuum quos absoluent operarij 30, eo temporis spatio, quodcumque illud fuerit, quo operarij 20 perficiunt passus 100. hoc quarto numero 150 proportionali tribus numeris præcipuis inuento; tribus aliis numeris quartus proportionalis quæri debet iuxta hæc verba. *Cui quærito rursus cum sociis, &c.* huic scilicet numero 150 proximè inuento, *& sociis*, id est, duobus numeris dierum 5 & 6, qui principales comitantur; quartus proportionalis nouâ initâ proportionum regula inueniatur: huius porro regulæ termini ad operationem ita disponendi sunt; vt numerus dierum 6, qui numero fossorum 30 quæstionem gerenti adhærebat, tertium locum; cum & ipse quæstionem gerat, occupet; primum autem ei similis numerus dierum 5: ac denique secundum, numerus passuum 150 præcedenti operatione definitus, vt appositum schema refert.

Dies	Passùs	Dies	Passûs
5.	150.	6?	180

Peractâ autem regulâ quartus proportionalis inuenitur passuum 180. Ac tanta est fossæ longitudo, quam fossores 30 spatio dierum 6 efficient: dum fossores 20, spatio dierum 5, pari cum prioribus contentione laborantes fossam aperiunt (eadem cum priore supposita eius latitudine) passibus 100 longam. Quod quàm verum sit, ostendo.

Demonſtratio.

Reſumpto priori ſchemate, quod ſolis præcipuis numeris conſtat; nullâ temporis ad opus inſumpti factâ mentione; vnde ſequitur vt æquale, quodcumque illud ſit, vtriſque operariis 20 & 30 tribui ſupponatur euidens eſt foſſores 30 foſſam extendere ad paſſus 150; dum operarij 20 eandem ad paſſus 100 producunt, eodem, vt dictum eſt, tempore vtriſque attributo. Iam verò ſi non tantùm operariorum numeri 20 & 30 cum opere conferantur; ſed etiam temporis ad opus impenſi ab vtriſque, ratio habeatur: alij proportionales numeri ex diuerſi temporis ratione perpenſi reperiri debent. Quod præſtat operatio ſecunda, in qua adhibentur numeri adiuncti ad tempus ſpectantes vnà cum numero paſſuum 150 ad quos foſſam producunt operarij 30 ſpatio dierum 5, quo eodem operarij 20 foſſam eandem ad paſſus 100 extendere ſupponuntur.

Oper.	Paſſ.	Oper.	Paſſ.
20	100	30?	150

Ergo operatione ſecunda in qua numerus dierum 6 quæſtionem habet annexam definitur, quot paſſus foſſam producturi ſunt diebus 6, foſſores 30; qui foſſam diebus 5 ad paſſus 150 producere prima operatione ſunt demonſtrati. Quare propoſita quæſtio compoſita ex pluribus numeris traditâ methodo rectè ſolutâ eſt; & ad eundem modum omnes ſimiles rectè ſolui probatum eſt.

Dies	Paſſ.	Dies	Paſſ.
5	150	6?	180

Alia Conſtructio.

Eadem quæſtio alio modo ſolui poteſt: qui hoc præcepto continetur.

Per comites augeto duces; naſcatur vt vnus
E binis numeris: terníſque adjungito quartum.

Hæc eſt horum verborum ſententia. *Per comites augeto duces.* Per adhærentes, minúſque principales numeros multiplica numeros principales; vt ſcilicet per hanc multiplicationem duorum numerorum, naſcatur vnicus numerus: qui eorum loco aſſumatur, eáque ratione numerorum, qui concurrebant, multitudo ad tres numeros ad regulam neceſſarios reuocetur: quibus adjungatur quartus numerus proportionalis, qui quæſtioni ſatisfaciat.

In superiori igitur paradigmate; in quo operariorum numero 20 adiungitur dierum numerus 5 : & numero operariorum 30 numerus dierum 6; multiplicari debent, tum numeri duo 20 & 5, vt fiat 100; tum duo, 30 & 6, vt fiat 180. His ergo numeris priorum loco vtendum erit: vnáque tantùm operatio instituenda, quasi ita fuisset proposita quæstio.

Oper. 20.	Pass. 100.	Oper. 30	
Dies 5.		Dies 6	
Oper. 100.	Pass. 100.	Oper. 180. ?	Pass. 180

Si operarij 100 fossam passuum 100 (hic casu ratio æqualitatis occurrit) conficiunt: quot passuum fossam confecturi sunt operarij 180 ? solutio habebitur obseruatâ communi aureæ regulæ methodo, qua ex tribus simplicibus datis numeris quartum docet elicere: qui hic est passus 100.

Demonstratio.

Ostendendum id vnum hic est. Quomodò tam duo numeri, 30 operariorum & 6 dierum, quibus adhæret quæstio; quàm duo, 20 operariorum & dierum 5 (si bini in se ducantur, vt fert traditum præceptum) producti numeri numerorum in se mutuò ductorum loco sumi possint, vt ex iis quartus numerus proportionalis definiatur. Quod ita colligitur. Cum numerus 5 dierum ducatur in numerum 20 operariorum; ita se habet per propos. 28. libri 1. huius, vnitas ad numerum 5 multiplicantem; vt numerus 20 multiplicatus ad numerum 100 per multiplicationem productum. Ergo idem fit numerus ex primo termino 1 in quartum 100, qui fit ex secundo 5 in tertium 20. fit autem 100 ex primo in quartum ducto: Ergo etiam ex secundo & tertio gignetur numerus 100. Vnde fit vt operarij 100 vnius diei spatio idem opus, passus scilicet 100, absoluant: quod spatio dierum 5 absolueretur ab operariis 20. Ergo numerus 100 (omissâ vnitate, quæ numeros immutare non est nata) duorum numerorum 5 & 20 loco assumi potest in primum terminum; dùm proportionum regula instituitur. Et verò, vt rem exponam ad sensum planiùs, nunquid non impenduntur labori dies totidem eadémque non deberetur operis merces, siue vno die operatij 100 labori incumberent, aut etiam è conuerso, vnus operarius diebus 100 ? siue diebus 5 operarij 20, aut è conuerso, diebus 20 operarij 5 ? semper enim dies 100 laboris numerabuntur. Idem circa duos numeros 6 & 30, quibus adhæret quæstio, ratiocinium iniri debet. Constat ergo in eo casu in quo plures numeri ad diuersam speciem pertinentes concurrunt (si enim eorum eadem sit species, vt cum integris adhærent fracti, vnius tantùm loco haberi debent)

mutuari

mutuari posse in vnicum, vt ad simplicem proportionum regulam in eundam compatentur.

Scholium.

Habes ex dictis methodum, qua quartus numerus proportionalis colligatur; cum plures quàm tres numeri ad quæstionem concurrunt; & eam quidem habes duplicem: quæ ad quasuis soluendas quæstiones sufficiat compositi generis. Verùm quia quæstiones non rarò proponuntur; quæ numeris constant adeò permixtis, & intricatis, vt in ordinem debitum, & ad operationem ineundam aptè, non nisi ægerrimè præparentur: ideò varios quosdam casus huc adducere è re fore videtur; iuxta quos alij, cum occurrent similes, solui facile possint.

Primò. In superiori quæstione, cuius solutio ope duplicis regulæ initæ colligitur; non tantùm numeri principales ad priorem regulam instituendam assumi possunt. Sed etiam minus principales, vt ecce; operarij 20 spatio 5 dierum fossam conficiunt passuum 100. operarij 30 spatio 6 dierum, ad quot passus eandem fossam sunt promoturi? instituta est prior regula proportionum assumptis terminis principalibus, nempe ad operarios pertinentibus, vt hoc schema refert, repertúsque est numerus passuum 150; quos conficiunt operarij 30 certo quodam tempore: eo scilicet quo operarij 20 conficiunt passus 100, hoc est 5 diebus, etsi eius dierum numeri nulla adhuc mentio fiat.

Oper.	Pas.	Operarij	: Passus
20	100	30?	150
Dies	Pass.	Dies	Pass.
5	150	6?	180

Iam quia constat operarios 30, spatio dierum 5, passus conficere 150: instituta est operatio secunda: qua quæritur. Si diebus 5 absoluuntur (à fossoribus nimirum 30, qui iam reticentur) passus 150: quot passus diebus 6 conficientur ab illis ipsis fossoribus 30? repertúsque est quartus proportionalis numerus passuum 180. Dico ergo hunc eundem passuum numerum 180 repertum iri: si in priori regula adhibeantur dierum numeri, in posteriori autem numeri operariorum, vt patet ex apposito schemate. In quo operarij, qui diebus 5 absoluunt passus 100 (operarij scilicet 20) ostenduntur diebus 6 absoluere passus 120. Quod cum ita sit, rursùs initur posterior regula pertinens ad operarios. Si operarij 20 passus absoluunt (spatio scilicet dierum 6) 120. Quot passus absoluent operarij 30? (eodem spatio dierum 6) reperietur eos absoluere

Dies	Pass.	Dies.	Pass.
5.	100.	6?	120.
Oper,	Pass.	Oper.	Pass.
20	120.	30?	180

passus 180. Nec alia est huius praxis demonstratio, quàm quæ suprà ad priorem constructionem, à quâ hæc non differt, allata est.

Secundò. Quæstio potest interdum numero minùs principali adhærere. Vt, si quæratur. Ex aureis 10, spatio mensium 3 percipitur lucrum aureorum 4: ex aureis 100 quot mensibus percipietur lucrum aureorum 50? Tunc soluetur quæstio per solam priorem constructionem, duabus scilicet initis operationibus: neque enim tunc numerum principalem aureorum 10 per minùs principalem mensium 3 licebit multiplicare; vt loco duorum numerorum 10 & 3 vnicus 30 habeatur: cum alteri numero principali 100 aureorum nullus numerus minus principalis adhæreat. Ita ergo disponentur numeri ad solutionem consequendam, duplici regulâ institutá: in quarum priore reperitur aureos 100 lucrum exhibere aureorum 40 eo mensium spatio; quo aurei 10 lucrum exhibent aureorum 4: hoc est, tribus mensibus. Quo definito lucro aureorum 40 intra tres menses, regula secunda ad tempus pertinens instituetur, vt schema refert.

Aurei	Lucrum	Aurei	Lucrum
10	4	100?	40
Lucrum	Menses	Lucrum	Menses
40	3	50?	$3\frac{3}{4}$

Tertiò. Quæstio proximè allata, aliæque ei similes alio etiam huiusmodi hactenùs non vsurpato modo solui possunt. Dati quæstionis numeri iuxta eiusdem quæstionis ordinem collocentur; vt in hoc schemate collocatos cernis numeros præcedentis quæstionis: quæ ità efferebatur. Si aurei 10, aureos 4 lucrantur intra menses 3; vt aurei 100 aureos 50 lucrentur: quot menses requiruntur? Tum multiplica numerum vltimum 50, cui adhæret quæstio per primum 10, genitúsque numerus 500 statuatur tertius regulæ instituendæ: cuius primus numerus is est; qui fit ex multiplicatione mutua numeri secundi 4. & quarti 100, nempe 400; secundus denique erit mensium numerus 3 immutatus similis cui quæritur.

Aurei	Lucrum	Menses	Aurei	Lucrum
10	4	3	100	50?
400.	3.	500?	$3\frac{3}{4}$	

Peractâ igitur regula, cuius dantur numeri 400. 3. 500, quartus reperietur $3\frac{3}{4}$, qui in priori solutione collectus erat.

Ratio huius operationis vt nouæ nec iniucundæ, hic non debet omitti; quæ ex superiori solutione tota pendet. Repetito igitur eius schemate,

mate, & allato ratiocinio. Cum in priore regula quatuor numeri 10, 4 100, 40 sint proportionales, idem fit numerus ex primo 10 in quartum 40 ducto; qui fit ductis mutuò secundo 4 & tertio 100, per prop. 19. lib. 7. Elemen. At si numerus primus 10 multiplicet tum primum numerum 40 posterioris secundæ regulæ, vt fiat 40; tum tertium 50, vt fiat 500: ita erit 400 ad 500, vt 40 ad 50 per prop. 17. lib. 7. Elem. Sed vt 40 ad 50; ita est mensium numerus 3 secundus, ad mensium numerum $3\frac{1}{4}$ quartum. Ergo ita etiam est 3 ad $3\frac{1}{4}$; vt 400 ad 500.

Aurei	Lucrum	Aur.	Lucr.
10	4	100?	40
Lucr.	menses.	Lucr.	menses
40	3	50?	$3\frac{1}{4}$
400.	3.	500?	$3\frac{1}{4}$

Rectè igitur idem quæsitus quartus numerus $3\frac{1}{4}$ colligitur, siue ad operationem adhibeantur numeri 40 & 50, siue 400 & 500; cum sint ipsi proportionales. Hi autem numeri 400 & 500 habentur; si vt traditum est, numerus 10 primus in schemate superiori ducatur in vltimum, siue quintum numerum 50; cui adiuncta est quæstio; & numerus 4 secundus in quartum 100. Rectè igitur hoc modo vnius regulæ adhibitæ operâ colligitur quæsitus numerus; etsi plures quàm tres ad quæstionem concurrant numeri, nec numeris principalibus adhæreat quæstio.

Quartò. Tales interdum proponuntur numeri; qui quæstionem continent ope regulæ huius compositæ soluendam; vt altera è duabus operationibus, quæ ad solutionem adhiberi debent iuxta priorem constructionem superiùs traditam, ad regulam directam pertineat: altera pertineat ad inuersam. Vt ecce. aurei 4000, militibus 300 debentur in stipendium mensium 4. Quæritur quot mensium stipendium futuri sunt aurei 6000, militibus 200? Ita ergo, vt hoc schema refert, in primis ordinandi sunt numeri, vt ex iis seligantur numeri; qui ad priorem operationem, quíque ad posteriorem adhibendi sunt. Ad priorem quidem spectant tres numeri aureorum 4000. Militum 300, aureorum, 6000. quasi simpliciter quæreretur. Si aurei 4000 debentur militibus 300 certo quodam temporis spatio, cuius interim nec mentio nec ratio habetur (illud est mensium 4)

Aurei.	Milites.	Menses.	Aurei.	Milites.
4000.	300.	4.	6000.	200
Aur.	Milit.	Aur.	Milit.	
4000	300	6000?	450	
Milit.	Milit.	Mens.	Mens.	
200	450	4?	9.	

aurei 6000 eodem temporis ſpatio, quot militibus in ſtipendium debebitur? Tres ergo numeri 4000. 300. 6000, vt par eſt, ſuo loco reponentur; & operatio ſimplicis regulæ proportionum inibitur: qua abſoluta quartus proportionalis militum numerus erit 450. Quo inuento numero quærendum rurſus eſt iuxta ſecundam proportionum regulam ſi milites 450, certum quoddam ſtipendium (quod eſt aureorum 6000, cuius nulla hic amplius mentio habetur) merentur ſpatio menſium 4. milites 200 quot menſibus idem ſtipendium (aureorum ſcilicet 6000) merebuntur? hæc, vt vides, regula inuerſa eſt. Idem enim ſtipendium aureorum 6000; quod militibus 450 ad menſes 4 ſufficit; militibus paucioribus 200 ad plures quàm 4 menſes ſufficere debet. Atque adeo non eadem debet eſſe ratio militum numeri 450 ad numerum menſium 4, & militum numeri 200 ad numerum menſium, qui quæritur. Sed inuertendo eadem eſt ratio numeri 200 ad numerum 450 & numeri menſium 4 ad numerum quartum: ita vt transferatur quæſtio à numero 200 ad numerum 4, ipſo numero 200 in primum locum tranſlato, vt habet ſchema. Peractâ ergo regulæ huius ſecundæ operatione reperietur quæſitus proportionalis numerus menſium 9. Tot ergo menſibus militibus 200 in ſtipendium aurei 6000 ſufficient: Si aurei 4000, militibus 300 ad menſes 4 ſufficere ſupponantur.

Hanc eandem quæſtionem ita quoque ſoluere licet; vt priore loco inſtituatur regula euerſa ad tempus pertinens. Exponatur enim idem ſchema omnes quæſtionis numeros ordine ſuo repoſitos exhibens. Quæres igitur primò. Si milites 300 ſtipendium quoddam (illud eſt aureorum 4000 de quo non eſt interim quæſtio) percepturi ſunt elapſo menſium 4 ſpatio; milites 200 intra quot menſes illud idem ſtipendium (aureorum 4000) percipere debent. Hęc regula, vt patet, euerſa eſt: plures enim menſes, milites 200 militare debent, quàm milites 300, vt idem cum 300 ſtipendium conſequantur. Quare quæſtio à numero militum 200 transferenda eſt ad numerum militum 300 permutato horum numerorum loco. Exhibebit autem operatio idem ſtipendium deberi militibus 200 poſt menſes 6: quod militibus 300 debetur poſt menſes 4. Iam quæras. Si quidam militum numerus (is eſt 200) aureos 4000 percipit ſpatio menſium 6: quot menſium ſpatio percepturus eſt aureos 6000? Inuenies peractâ operatione requiri ſpatium menſium 9 quod idem operatione aliter inſtitutâ,

Aurei.	Milites.	Menſes.	Aurei.	Milites
4000.	300.	4	6000.	200?

Milit.	Menſ.	Milit.	Menſ.
200.	4.	300?	6

Aurei.	Menſ.	Aurei.	Menſ.
4000	6.	6000?	9

iam

iam ſuperiùs fuit repertum. Vt vel hinc diſcas eoſdem numeros alio & alio modo ad ratiocinationes aſſumptos, eandem ſolutionem exhibere diſcas etiam operationes probandi modum; dum variis modis initæ ad eoſdem numerorum terminos perducunt. Diſcas denique numeros in omnem partem verſandi facultatem. Quem in finem ſemel adhuc eandem quæſtionem iuuat alio numerorum ordine ſeruato proponere.

Reſumpto itaque datorum quinque numerorum ad hanc quæſtionem concurrentium ordine nonnihil, vt hoc ſchema refert, immutato; dum numeri, qui primum & ſecundum locum occupabant; quartum item & quintum, mutuò illum permutarunt. Iam ſic quæſtionem ſolues duplici

Milit.	Aur.	Menſ.	Milit.	Aurei.
300.	4000.	4.	200.	6000

Milit.	Aurei	Milit.	Aur.
300	4000	200 ?	$2666\frac{2}{3}$

Aurei	Menſes	Aurei	Menſ.
$2666\frac{2}{3}$	4	6000 ?	9

adhibitâ regulâ, & quidem vtrâque directa, tanti refert diuerſa numerorum ad operationem comparatio. Priore quidem regula reperies aureorum numerum $2666\frac{2}{3}$ deberi militibus 200 eodem tempore, quo aurei 4000 debentur militibus 300 (menſium ſcilicet 4 ſpatio) rursùs, operatione ſecundâ, quæ ad quæſitos menſes ſpectat, abſolutâ, reperietur ſpatio menſium 9 iiſdem militibus 200 aureos 6000. Quod quærebatur.

In hac methodo proximè adhibita, compendium illud locum habet: quod num. 3. præcedente obſeruatum eſt: par enim eſt caſus, par operatio, nec diſpar futura eſt demonſtratio. Duc igitur primum huius ordinis numerum 300 in quintum, ſiue vltimum 6000; vt fiat

Milit.	Aurei	Menſ.	Milit.	Aurei
300	4000	4	200	6000
800000	4	1800000 ?	9.	

1800000: qui tertiũ locum occupet, quique habeat annexam quæſtionẽ. In primo autem loco ſtatuatur numerus 800000; qui naſcitur ex ſecundo numero 4000 in quartum 200 ducto: medius autem inter illos ſtatuatur menſium numerus 4, medius itidem inter numeros illos quinque. His poſitis, ſi his tribus numeris 800000, 4, 1800000 quartus proportionalis numerus 9 reperiatur: is erit, qui quæritur. Vt ex præcedentis obſeruationis tertiæ probatione conſtat; quæ huic apprimè conuenit.

Quintò. Compendium non minus elegans competit ſolutioni huiuſmodi quæſtionum compoſitarum iuxta methodum duplicem quartâ obſeruatione præcedente traditam: in qua duarum regularum ad ſolutionem adhibendarum

adhibendarum altera directa, altera euersa est. Repetatur enim illorum quinque numerorum quæstionis primo loco constitutus ordo: imò & schema totum, vt demonstrationi postmodum inseruiat. Duo numeri 4000 & 200 primus & quintus in se mutuò ducantur, vt fiat numerus 800000: tres item reliqui numeri 300. 4. 6000. in eodem ordine primo intermedij simul ducantur in se, vt fiat 7200000. hic per priorem 800000 diuidatur. Dico numerum 9 ex ea diuisione genitum quæstioni satisfacere. Quid breuius? Quid expeditius? Quid incredibilius? nisi euidens id suadeat demonstratio? Quam ecce.

In schemate tam quatuor numeri 4000, 300; & 6000, 450: prioris regulæ, quæ directa est: quàm quatuor 200, 450, 4, 9 regulæ euersæ posterioris, proportionales sunt. Ergo per prop. 19 libri 7. Elem. primus priorum quatuor, numerus 4000 in 450 quartum ductus eundem producit numerum, qui ex secundo 300 in tertium 6000 ducto gignitur, nempe 1800000. Sed si numerus ille primus 4000 ducatur in duos numeros 200 & 450 priores regulæ secundæ, numeros generat 800000, & 1800000 eandem habentes rationem per prop. 17 libri 7. Elem. quam habent inter se multiplicati numeri 200. 450. Ergo in secunda hac regula duo illi 800000 & 1800000 horum duorum 200, & 450, loco substitui possunt; illisque adhibitis poterit absolui regula. Hoc est,

Aur.	Milit.	Menses	Aur.	Milit.
4000.	300.	4.	6000.	200
Aurei	Milit.	Aurei	Milit.	
4000.	300.	6000 ?	450	
Milit.	Milit.	Mens.	Mens.	
200	450	4 ?	9	
800000.	7200000.	9.		

quartus proportionalis 9, tam tribus 800000, 1800000, 4; quàm tribus 200, 450, 4, conueniet. Sed primus numerus 800000 generatur ex primo numerorum quinque datorum numero 4000 in eorum vltimum 200 ducto: secundus autem 1800000, ostensus est æque produci ex duobus 300, 6000 secundo & quarto eorumdem quinque datorum numerorum ac producitur ex 4000 in 450. quare; si numerus 1800000 multiplicetur per numerum 4, tertium quidem regulæ secundæ, medium autem numerorum quinque datorum; fiet numerus 7200000 ex tribus numeris 300, 4, 6000 mediis, quinque datorum in se ductis: isque numerus 7200000 iuxta proportionum regulam diuidi debet per primum regulæ terminum 800000; vt habeatur quæsitus quartus numerus 9 qui quæstioni satisfaciet. Quare, si tres numeri intermedij quinque datorum inter se multiplicentur, productus autem per numerum diuidatur ex primo in quintum ducto genitum; constat ex ea diuisione nasci quartum proportionalem quæsitum: vt à me assertum est.

Quod si methodus altera eandem quæstionem soluendi num. 4.

allata, cuius hîc repetitur formula, adhibeatur: in qua nimirum euerſa regula priore loco vſurpatur; cuius proportionales numeri ſunt 200, 4, 300 ? 6, tum loco, tum Quæſtione à numero 300 in numerum 200 tranſlatis: regula autem directa ſecundo loco ſtatuitur: in huiuſmodi, inquam, methodo, idem compendium locum habet. Si enim numerorum quinque datorum primus 4000 in quintum 200 ducatur; & per productum 800000 diuidatur numerus 7200000; qui ex trium numerorum 300, 4, 6000 intermediorum multiplicatione generatur: habebitur quæſitus numerus 9, qui quæſtioni ſatisfacit, Cuius probatio eodem modo colligi poteſt: quo præcedentis caſus demonſtratio.

Aur.	Milit.	Menſ.	Aur.	Milit.
4000.	300.	4	6000.	200.
Milit.	Menſ.	Milit.	Menſ:	
200.	4.	300 ?	9.	
Aur.	Menſ.	Aur.	Menſ.	
4000.	6.	6000 ?	9.	
800000.	1200.	6000 ?	6.	
800000.	7200000			

Nam ſi duo numeri 4000 & 6 ſecundæ regulæ, quæ directa eſt, multiplicentur per primum regulæ prioris euerſæ numerum 200: producentur duo numeri 800000, & 1200 eandem habentes inter ſe rationem per prop. 17. lib. 7. Element. quam habent inter ſe numeri 4000 & 6 multiplicati. Atque adeò idem numerus 9 quartus erit proportionalis tam tribus numeris 800000, 1200. 6000; quàm tribus 4000, 6, 6000. Sed numerus 1200; qui genitus eſt ex numero 200, prioris regulæ in numerum 6, regulæ poſterioris, ducto; æqualis eſt numero, quem duo numeri 300 & 4 in ſe ducti generant; patet per prop. 19. libri 7. Elem. Sunt enim quatuor numeri 200, 4, 300, 6 regulæ prioris, proportionales. Sunt autem hi duo numeri 4 & 300 inter datos quinque numeros medij. Ergo ſi numerus 1200 ex duobus 4 & 300 inter ſe ductis genitus, rurſus multiplicetur per numerum 6000; qui tertius eſt in regula poſteriore; idémque reliquus inter datos quinque numeros medius: generabitur 7200000 qui diuidi debet per 800000; vt habeatur quartus numerus 9 proportionalis datis tribus, vel 4000, 6, 6000; vel 800000, 1200, 6000, vt declaratum eſt. Quare vt numerus quæſtioni ſatisfaciens habeatur, nihil requiritur aliud, numeris quinque datis ritè inter ſe ordinatis; quàm vt medij tres inter ſe multiplicentur, & productus diuidatur per numerum ex primo in poſtremum ducto genitum.

Atque ex dictis hactenùs non ſolùm methodum habes regulam quamlibet compoſitam ſoluendi, ſiue ea duabus directis regulis conſtet; ſiue directâ vnâ, euerſâ alterâ: ſed etiam compendia, quorum ope ſcopum attingas facillimè, quicumque tandem numeri ad hanc compoſitam re-

gulam spectantes proponantur : vt exemplis promptum foret comprobare; quæ passim occurrunt. Sed allatis principiis, vnde deriuentur; eorúmque demonstrationibus ; iis fusius prosequendis diutiùs non est immorandum.

PROP. XXXX. *Probl.*

Datum numerum in partes secare : quæ datam seruent proportionem.

Expositio.

Hoc est fundamentum in abstracto propositum, cui innititur illa logistarum regula; quam societatis regulam nuncuparunt : eò quod plures initâ inter se societate varias pecuniæ summas in vnum conferant ad negotiationem instituendam : quâ absolutâ singuli vel lucri, vel damni ex negotiatione profecti debent participes fieri iuxta proportionem à singulis collatæ pecuniæ. Quod præstatur si damnum, vel lucrum diuidatur in varias partes eandem seruantes rationem, quam seruant ipsæ pecuniæ. Quæ est propositionis huius sententia. Vt, si proponatur huiusmodi soluenda quæstio. Tres pecuniam contulerunt. Primus quidem aureos 6. Secundus 10. Tertius 12. Peractâ negotiatione lucrum aureorum 60 comparatum est. Ex eo igitur quot aurei singulis obueniunt seruatâ pecuniæ à singulis collatæ proportione ? hîc nihil aliud quæritur, nisi vt numerus 60 diuidatur in tres partes rationem eandem seruantes inter se; quam tres numeri 6, 10, 12: Cui quæstioni fiet satis ope sequentis constructionis.

Constructio.

Addantur sortes. Genito sit prima; secunda
Esto dato sedes ; cuius sit tertia sorti.
Ducito postremos : per primum diuide factos.

Hæc sunt ad solutionem consequendam obseruanda præcepta quorum singula expono.

Præceptum 1. *Addantur sortes.* Numeri à singulis collatæ sortis, siue pecuniæ, in numerum vnicum colligantur; nempe 6, 10, 12. vt gignatur numerus 28. quo definito, regula proportionum instituenda est toties,

quot

6	28 — 60 — 6 ? 12 $\frac{24}{28}$
10	28 — 60 — 10 ? 21 $\frac{12}{28}$
12	28 — 60 — 12 ? 25 $\frac{20}{28}$
28	

quot ſunt numeri partiales, vt hic, ter; ordinatis iuxta ſequens Præceptum numeris Præceptum 2. *Genito ſit prima, ſecunda eſto dato ſedes &c.* Numero 28 ex additione trium numerorum 6, 10, 12 collecto aſſignetur primus locus in ſregula proportionum inſtituenda: ſecundus verò numero 60; qui diuidendus proponitur: tertius denique ſingulis numeris 6, 10, 12. vt in ſchemate cernere eſt. Si enim regula ter inſtituatur; vt tres numeri tertio loco poſiti exigunt: colligentur tres numeri, in quos diuiditur numerus datus 60 iuxta proportionem datam numerorum 6, 10, 12. Quod quidem probari poteſt à poſteriori, & operatio ipſa examinari; ſi tres inuenti numeri ſimul addantur. Debet enim per hanc additionem, diuiſus numerus 60 conflari, ſi erratum non ſit. Sed à priori demonſtratio potior promenda eſt.

Demonſtratio.

Vt ratiocinatio tota planiùs exponatur terminis omnibus ſuperioris conſtructionis characteres, vt hoc ſchema refert, adſcribantur; repetitâ alioqui tota conſtructione. Duo itaque hic demonſtranda ſunt. Primum, inuentos numeros tres F, G, H, eſſe tribus numeris A, B, C proportionales. Secundũ eoſdem tres numeros F, G, H ſimul additos conflare numerum E 60: ſic enim manifeſtum fiet dictum numerum E diuidi in tres partes F, G, H, terminis A, B C proportionales.

A 6	D 28 — E 60 — A 6 ? F 12 $\frac{24}{28}$
B 10	D 28 — E 60 — B 10 ? G 21 $\frac{12}{28}$
C 12	D 28 — E 60 — C 12 ? H 25 $\frac{20}{28}$
D 28	

Ad primum quod attinet, clara res eſt. Nam cum ſit vt D ad E, ita tam A ad F, quàm B ad G, & C ad H; erunt per Prop. 11. libri 5. Elem. A, F; B, G; C, H, in eadem ratione. Ergo permutando, in eadem ratione erunt A B, B C, & F G, G H. Quod verò tres numeri F, G, H ſimul additi ſint æquales numero E 60, ita probatur. Cum ſint A, F; B, G; C, H proportionales per conſtructionem (ſunt enim omnes vt D ad E) ita erunt per Prop. 12. libri 5. Elem. omnes antecedentes A, B, C, ſimul, ad omnes conſequentes F, G, H ſimul; vt A ad F; hoc eſt, vt D ad E: Sed omnes A, B, C, ſimul, æquales ſunt numero D ex conſtructione. Ergo per Prop. 14. lib. 5. Elem. etiam tres F, G, H, ſimul, æquales ſunt numero E 60. Ergo numerus E 60 datus in

tres partes F, G, H datam rationem numerorum A, B, C seruantes diuisus est. Quod præstandum erat.

Scholium.

Quando contingit vt numeris principalibus adhæreant alij numeri: tunc ambo inter se multiplicandi sunt, eorúmque loco productus substituendus. Vt si tres societatem ineant & primus A conferat aureos 6 per menses 3. Secundus B aureos 10 per menses 4. Tertius C aureos 12 per menses 6. lucrati sunt autem Aureos H 100. Quot ex illis cuilibet obueniet iuxta rationem tum impensæ pecuniæ, tum temporis; quo in societate remansit. Ita numeros ad solutionem parato. Factâ aureorum

Aur. mens.				
A 6 — 3	D 18			D 18 ? 13 $\frac{110}{130}$
B 10 — 4	E 40	G 130.	H 100.	E 40 ? 30 $\frac{100}{130}$
C 12 — 6	F 72			F 72 ? 55 $\frac{50}{130}$
	G 130			H 100

per menses multiplicatione, habentur numeri D, E, F iuxta quorum rationem diuidendum est lucrum H aureorum 100. Adde igitur simul tres numeros D, E, F; vt fiat numerus G 130: qui iuxta tradita præcepta primum locum occupet regulæ proportionum ter repetendæ: secundum verò, numerus diuidendus H 100: tertium denique singuli numeri D, E, F: quibus, peractâ operatione triplici, respondent debiti numeri quæstionem soluentes: si enim addantur; habetur vt par est, numerus H 100 diuidendus.

Nec in dubium reuocandú est (quod vnum hoc in paradigmate est declarandum) quin apti reperiuntur numeri D, E, F; ope multiplicationis aureorum per menses; iuxta quorum rationem diuidi debeat numerus H 100. Dum enim aureorum numerum 6, mensium numerus 3 multiplicans generat numerum D 18: ita se habet per Propositionem 28. lib. 1. huius vnitas, siue, in concreto, vnus mensis, ad mensium numerum 3 multiplicantem; vt se habet numerus 6 aureorum multiplicatus ad numerum 18 aureorum, per multiplicationem productum: adeò vt per Prop. 19. libri 7. Elem. idem fiat aureorum numerus D 18 ducto vno mense in aureos 18: qui factus est ductis mensibus 3 in aureos 6. quo fit, vt aurei 18 spatio vnius mensis idem emolumentum proferant, quod ex aureis 6 spatio mensium 3 percipi potest, vel etiam è conuerso. Idem emolumentum

lumentum colligatur ex aureo vno, mensium 18 spatio (cum enim duo numeri concreti diuersæ denominationis in se mutuò ducuntur; productus numerus, vtramlibet denominationem gerere potest) quod proficiscitur ex aureis 6, mensium 3 spatio. Quod idem de numeris reliquis E & F asserendum est. Quare tres aureorum numeri D, E, F per spatium vnius mensis idem lucrum proferunt; quod aurei 6 per menses 3. & aurei 10, per menses 4: ac denique aurei 12 per menses 6. rectéque, illi, horum loco substitui possunt, vt ad operandum aptiores alias aliquot ope huius problematis soluendas quæstiones exercitationis gratiâ proponam; vt ad earum imitationem aliæ similes expediantur: quæ tironi negotium facessere alioqui possent. Qualis est hæc.

Ex hoste prædam aureorum 1000 reuexerunt centurio, Sub-centurio, & signifer: quæ ea conditione inter eos diuidenda est, vt centurio totius illius prædæ partem $\frac{1}{2}$ Sub-centurio $\frac{1}{3}$, Signifer $\frac{1}{4}$ accipiat. Quot ergo aureos sunt accepturi singuli. Sensus quæstionis is esse non potest; vt centurio dimidiam illius summæ 1000 partem, nempe 500 accipiat. Sub-centurio verò tertiam 333. Signifer quartam, 250. Hi enim tres numeri simul additi haud quaquam producunt numerum 1000 diuidendum; producunt enim 1083: ita vt tot aureorum prædam esse necesse foret; vt singulis partes illæ obuenirent. Sensus ergo tam huius, quàm aliarum similium quæstionum talis est; vt proponatur numerus 1000 in tres partes diuidendus; quæ eam habent inter se rationem, quæ his tribus fractis numeris exprimitur. Quæ ratio vt notior euadat: reducantur fracti illi A, B, C ad alios eiusdem denominationis

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$		D 12 ? $461\frac{14}{26}$
D 12 E 8 F 6	H 26, K 1000.	E 8 ? $307\frac{18}{26}$
		F 6 ? $230\frac{20}{26}$
G 24 G 24 G 24		H 26

per prop. 21. libri 2. huius. Quales sunt fracti D G, E G, F G. Qui per prop. 10. citati libri 2. eandem habent inter se rationem; quam ipsorum numeratores D, E, F. Ergo & eandem habent fracti A, B, C. Iam, si numerus 1000 in tres partes diuidatur, quæ rationem obseruent numerorum D, E, F; factum erit, quod proponitur. Fiet autem hæc diuisio si iuxta regulæ huius præcepta simul addantur tres numeri D, E, F; vt fiat H: qui statuatur primus regulæ ineundæ: secundus autem, diuidendus numerus K: tertius, singuli numeri D, E, F. absolutâ enim secundum hos numeros operatione habebuntur, vt schema refert, partes quæsitæ dati numeri 1000: quæ singulis illis prædatoribus obueniunt.

Eadem quæstio hoc etiam modo proponi posset. Ita diuidatur aureorum numerus 1000, vt quoties centurio accipit 12, accipiat Sub-centurio 8; & Signifer 6. Quod præstaretur, methodo traditâ.

Quod si ita haberet quæstio. Diuidenda sit præda aureorum 1000 duobus centurionibus. Sub-centurionibus quinque, Signiferis decem; ea conditione, vt quoties centurio quilibet accipiet 6; toties Sub-centurio quilibet sumat 4: Signifer autem 3. ordinentur hi tres numeri 6, 4, 3: quibus è regione adscribantur, vt schema refert, prædatorum numeri.

6 — 2.	12					12 ?	$193\frac{14}{62}$
4 — 5.	20.	H	62.	K	1000.	20 ?	$322\frac{56}{62}$
3 — 10.	30.					30 ?	$483\frac{54}{62}$

Diuersi 2, 5, 10, hi singuli singulos sibi respondentes multiplicent, vt habeantur tres numeri 12, 20, 30. Quibus si distribuatur præda 1000 iuxta hanc regulam, habebuntur partes singulorum quæsitæ: vt in hac formula habentur: in qua numerus H 62. est numerus collectus ex additione trium numerum 12, 20, 30, primúmque locum in regula proportionum occupat; secundum verò numerus K diuidendus. Tertium denique singuli numeri 12, 20, 30. quibus respondent quæsiti numeri. Qui ita definiti diuidentur singuli per singulos numeros 2, 5, 10 diuersi meriti prædatorum, vt tandem singuli partem sibi debitam consequantur.

Illud in hac solutione, aliqua fortasse egeat declaratione: cur scilicet centurionum, verbi gratia, numerus 2, duci iubeatur in numerum 6, qui diuisionis futuræ rationem determinat cum reliquis 4, 3; vt habeatur numerus 12. Verùm scito non aliam hic rationem subesse huius multiplicationis, quàm quæ suprà allata est. Vbi per numerum mensium, per quos pecunia singulorum impensa est, multiplicari iubentur numeri singuli impensæ pecuniæ; vt habeantur numeri ad regulam ineundam necessarij. Sicut enim ibidem ostensum est, idem emolumentum colligi ex aureis 6, spatio mensium 3 impensis: quod ex aureis 18, vnius tantùm mensis spatio colligitur: vel è conuerso, quod ex aureo vno mensibus 18 collato proficiscitur: Ita in hac quæstione, ex aureorum 1000 numero, tot aureos percepturi sunt centuriones 24; si singuli aureum vnum accipiant: quot centuriones 2, si aureos 12 accipiant singuli: aut etiam è conuerso, si vnus centurio aureos 24 accipere deberet. Idem de Sub-centurionibus; idem de Signiferis censeto quoad numeros eorum. Quod cum ita sit, patet numerum 1000 in partes, quæ datam rationem numerorum 12, 20, 30 obseruent rectè distribui duobus centurionibus, quinque Sub centurionibus, decémque Signiferis iuxta statutam conditionem; vt quoties quilibet centurio aureos 6, percipiet; toties aureos 4

percipiat

percipiat sub-centurio, signifer autem quilibet aureos 3.

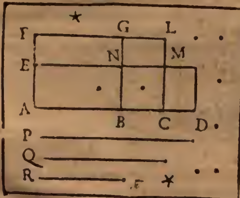
Atque ex his satis constare videtur, tum quænam propositæ quæstiones solutionem ex hac Societatum regula haurire debeant, tum quænam methodus adhibenda sit, vt ea colligatur.

PROP. XXXXI. *Theor.*

Si fuerint tres lineæ inæquales; quod maximâ & excessu mediæ supra minimam continetur rectangulum, vnà cum rectangulo; quod minimâ & excessu maximæ supra mediam continetur: æquale est ei, quod mediâ & excessu maximæ supra minimam continetur rectangulum.

Expositio.

Proponantur tres lineæ inæquales P, Q, R: quibus singulis ponantur æquales in rectam vnicam compositæ A D, A C, A B: super quarum media A C erigatur rectangulum A L: cuius altitudo A F æqualis sit rectæ B D, quæ est excessus maximæ A D supra minimam A B. Sumptâ etiam A E æquali excessui B C mediæ A C supra minimam A B, fiat rectangulum E D: ducatur etiam B G hoc posito rectangulum E G continetur minimâ A B (est enim E N eidem A B æqualis in parallelogrammo E B) & excessu C D maximæ A D supra mediam A C. Nam cum sit ex constructione, recta A F æqualis rectæ B D: sit autem posita A E æqualis rectæ B C, reliquam E F reliquæ C D æqualem esse necesse est. Dico igitur, vt fert Propositio, rectangulum E D vnà cum rectangulo E G æquale esse rectangulo A L, lineâ mediâ A C, & excessu B D maximæ supra minimam contento.



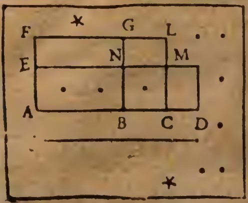
Demonstratio.

Rectangulum M G, æquale est rectangulo M D. Nam M L in parallelogrammo M F æqualis est oppositæ E F: quæ æqualis ostensa est rectæ

C D. Ergo æquales sunt etiam M L, C D. Æquales sunt autem C M, C B. Nam C M æqualis est oppositæ A E: quæ æqualis posita est rectæ B C hinc fit, vt duo rectangula M G, M D æqualibus rectis comprehensa, sint æqualia. Itaque si vtrique addatur gnomon communis F A M: fiet rectangulum E D maximâ A D, & excessu B C mediæ A C supra minimam A B contentum vnà cum rectangulo E G, quod minimâ A B, & excessu C D maximæ supra mediam comprehenditur, æquale rectangulo A L, mediâ A C & excessu B D maximæ supra minimam A B comprehenso. Quare si fuerint tres lineæ inæquales: quod maximâ &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Theorema hoc, vt cætera huiusmodi ad rectangula pertinentia, numeris apprimè conuenit. Si enim tres numeri A D, A C, A B inæquales eisdem lineis designentur, vt hoc schema refert. Patet numerum maximum A D 8 ductum in B C 2 excessum medij numeri A C 5 supra minimum A B 3, generare planum E D 16: qui cum plano E G 9 qui ex minimo A B 3 in excessum C D 3 maximi numeri A D 8 supra medium A C 5 ducto generatur, conflat numerum 25: cui est æqualis planus numerus A L 25, ex medio A C 5 ducto in B D 5 excessum maximi 8 supra minimum 3, genitus.



A D 8. B C 2.	E D 16	} 25	
A C 5. B D 5.	A L 25		25
A B 3 C D 3.	E G 9		

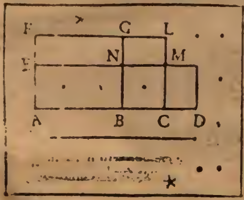
PROP.

PROP. XXXXII. *Theor.*

Si fuerint duo numeri inæquales quorum differentia ſecetur vtcumque in duas partes in quas ducantur numeri inæquales, ſinguli in ſingulas : genitíque ambo numeri ſimul addantur : ac productus diuidatur per numerorum inæqualium differentiam : generabitur medius inter inæquales numerus : qui à maiori inæqualium deficiet eo numero ; quem minor inæqualium multiplicauit : eo verò numero minorem excedet, qui à maiore multiplicatus eſt.

Expoſitio.

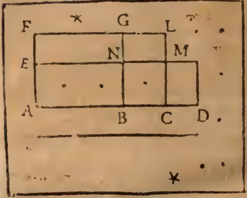
Clariſſima futura eſt hæc Propoſitio ex proximè antecedenti ; eiúſque diagrammate geometrico : cui proinde ſingula capita huius theorematis applico, eiſdémque characteribus deſigno. Sint itaque inæquales numeri A D, A B, quorum differentia eſt B D 6. Quæ in duos numeros B



A D 16.	B C 4.	E D 64
A C 14.		
A B 10.	C D 2.	E G 20
	B D 6.	A L 84

C 4, C D 2, ſecetur vtcumque. Ducatur autem A D in alterutram partem, vt B C, & fiat E D. dum alter numerus minor A B ducitur in alteram partem C D, vt fiat E G. Addantur porrò hi duo numeri E D, E G, vt fiat ex ea additione numerus A L. Dico igitur diuiſo numero A L per differentiam B D, generari numerum A C medium inter numeros inæquales A D, A B : qui deficiat à maiore A D numero C D ; quem minor A B multiplicauit : excedat autem minorem A B viciſſim numero B C, in quem ductus eſt maior A D.

Demonstratio.



A D 16.	B C 4.	E D 64
A C 14.		
A B 10.	C D 2.	E G 20
	B D 6.	A L 84

Numerus maior A D 16 ductus in B C 4 generat planum numerum E D 64. Minor autem numerus A B 10 ductus in C D 2 generat planum numerum E G 20. Qui duo geniti numeri simul additi conflant planum numerum A L 84 per Propos. 41. proximè antecedentem, æqualem duobus numeris E D, E G. Si ergo hic numerus A L 84 diuidatur per B D 6 (cui in diagrammate æqualis est per constructionem A F) ex ea diuisione nascetur A C 14 medius inter maximum 16 & minimum 10: sed qui deficiat à maximo 16 differentiâ C D 2, à minimo 10 multiplicatâ: excedat autem minimum 10 numero 4; quem A D maximus multiplicauit. Vt ex Propos. præcedente constat. Quare si fuerint duo numeri inæquales. Quod erat probandum.

PROP. XXXIII. *Theor.*

Iisdem positis: quæ in præcedente Propos. supponuntur: positis scilicet inæqualibus numeris A 16, B 10: quorum maior A 16 ducatur in D 4 partem vnam numerorum differentiæ F 6; minor verò B 10 in alteram eiusdem differentiæ partem E 2: ac duobus ex ea duplici multiplicatione genitis numeris G 64, & H 20 in vnum K 84 per additionem conflatis: ac denique definito medio numero C 14 inter maximum A 16, & minimum B 10; qui à maximo deficit numero E 2; excedit autem minimum B 10 numero 4. his, inquam positis. Si loco numerorum D 4, & E 2, alij substituantur eandem rationem cum ipsis seruantes, vt sunt L 6, & M 3: qui eosdem numeros inæquales A 16 & B 10 multiplicent, & producant N 96 & P 30. Ac denique ex his duobus numeris additis collectus numerus Q 126 diuidatur per numerum R 9 ex additis L 6 & M 3 collectum. Dico eundem numerum C 14 medium ex ea diuisione generari:

rari: qui prius ex diuisione numeri K 84 per F 6 genitus fuerat.

Demonstratio.

Expositionem, vt & præparationem, ipsius propositionis contextu complexus sum. Quod ergo propositum est, nimirum numero Q 126 diuiso per R 9 generari medium numerum C 14. ita colligitur. Ex hypothesi vt se habet D ad E, ita se habet L ad M: Ergo permutando vt D ad L; ita est E ad M. Ergo per Prop. 15. libri 5. Elem. vt duo antecedentes D,E simul,ad duos simul consequentes L, M; hoc est, F ad R, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, nempe, vt D ad L; vel vt F ad R. Sed vt D ad L; ita est G ad N, per Prop. 17. lib. 7. Elem. Nam A ductus in D & L ipsos G, N generauit: similiter, ita est H ad P, vt E ad M: eò quod H & P nati fuerint ex multiplicatione E, M per numerum B. Ergo ita est G ad N, vt H ad P, & quidem in ratione vel D ad L vel E ad M, vel etiam, vt ostensum est, F ad R. Quod cum ita sit, erunt duo simul antecedentes G, H, ad duos simul consequentes N, P, hoc est, K ad Q, vt G ad N, vel H ad P: siue vt D ad L, aut, E ad M, aut etiam, vt ostensum est, vt F ad R. Ergo permutando. Ita erit F ad k, vt R ad Q. Et inuertendo ita erit K ad F, vt Q ad R. Quare. Si diuidatur antecedens Q per consequentem R, idem numerus producetur, qui producitur diuiso antecedente k per consequentem F: producitur enim hac vtraque diuisione rationis vtriúsque denominator per 9. libri huius: quem eundem esse necesse est, cum eadem sit vtraque ratio. Producitur autem diuiso K per F numerus C medius inter A & B per Propos. 42. Ergo etiam idem numerus C producetur diuiso Q per R. Ergo, siue ipsa differentia F numerorum A & B in duas partes D, E secetur: quæ singulæ à singulis numeris A, B multiplicentur, & numerus k ex productorum G, H additione conflatus diuidatur per ipsam differentiam F: siue alius quispiam numerus, vt R, in duas partes L, M, partibus D, E proportionales secetur: quas pariter numeri A & B multiplicent, & producant N & P, ex quibus additis numerus Q natus diuidatur per numerum R: nascetur vtrobique numerus C medius inter A & B, qui à maiore A deficit numero E per minorem B multiplicatum: excedit autem B minorem numerum numero D per maiorem A multiplicatum. Quod hic erat demonstrandum.

	A 16.	D 4.	G 64.	L 6.	N 96
C 14					
	B 10.	E 2.	H 20.	M 3	P 30
		F 6.	k 84.	R 9.	Q 126

PROP. XXXXIV. *Theor.*

Si quiſpiam numerus C medius ſtatuatur inter A & B maiorem & minorem : qui multiplicet differentiam F numerorum A & B ; & producat K. Dico eundem numerum K productum iri ; ſi maior numerus A ducatur in exceſſum D medij numeri C ſupra minorem B; vt fiat G, & minor numerus B ducatur reciprocè in defectum E ; quo C deficit à maiore A, vt fiat H, & ſimul hi duo numeri G & H addantur.

Demonſtratio.

Hæc propoſitio conuerſa eſt Propoſitionis 42. In qua probatum eſt ſectâ duorum nnmerorum A, B, differentiâ F in duas quaſcunque partes D, E : quarum vnam, vt D, numerus A multiplicet ; alteram antem E multiplicet alter numerus B ; numeros gigni G, H, quibus ſimul iunctis fiat numerus K : eóque diuiſo per differentiam F gigni C. His, inquam, ſuppoſitis probatum eſt citatâ Prop. per hanc diuiſionem numeri K per F gigni numerum C, minorem quidem numero A, eiúſque ab eo defectum eſſe numerum E multiplicatum per numerum B : maiorem autem numero B, eiúſque exceſſum eſſe numerum D multiplicatum per numerum A. Ergo ex oppoſito & conuerſa operatione ; ſi quiſpiam numerus C medius inter A & B, ducatur in ipſorum differentiam F ; genitus numerus K, æqualis neceſſariò futurus eſt duobus ſimul numeris G & H : quorum ille naſcitur ex numero A in exceſſum D numeri C ſupra B ducto : hic verò producitur ex numero B ducto in numerum E ; quo numerus A ſuperat C. Si enim K æqualis minimè foret numero ex additione G & H collecto : neque etiam numerus C dicendus foret produci ex numero additis G & H collecto, ſi per differentiam F numerorum A B, diuideretur; contra citatã ſuperiorem Propoſitionẽ 42. Quã produci aſſerirur numerus ; qui à numero A deficiat defectu E, & numerum B excedat numero D; alioqui alius medius numerus quàm C daretur medius inter A & B ; cuius tamen ab illis differentiæ, æquales eſſent differentiis D & E. Quod abſurdum foret. Quare ſi quiſpiam numerus &c. Quod erat probandum.

	A 16	D 4	G 64
C 14			
	B 10	E 2	H 20
		F 6	K 84

PROP.

PROP. XXXXV. *Theor.*

Si quiſpiam numerus C medius ſtatuatur inter A maiorem, & B minorem : qui numerum R multiplicet collectum ex duobus L, M proportionalibus ad duas differentias D, E; quibus C diſcrepat à numeris A & B : generabitur idem numerus Q per eam multiplicationem; qui habetur ducto numero A in L, & B in M : genitiſque numeris N & P ſimul additis.

Demonſtratio.

A 16.	D 4.	L 6.	N 96.
C 14.			
B 10.	E 2.	M 3.	P 30
	F 6	R 9	Q 126
		V...	

Conuerſa item eſt hæc Propoſitio Propoſitionis 43. ſuperioris. Veritas autem eius in hunc modum manifeſta fiet. Si numerus ex additione numerorum N & P collectus, diuerſus ſit à numero Q : ſit ille numerus V. Ergo numerus V diuiſus per numerum R generabit per Propoſ. 43. ſuperiorem, numerum quendam medium inter A & B: cuius duæ differentiæ à numeris A & B ſunt numeris L & M proportionales. Sunt autem L, M, duabus differentiis D, E; quibus diſcrepat numerus C à duobus numeris A, B; proportionales. Ergo duæ differentiæ, quibus numerus ex diuiſione numeri V per R genitus diſcrepat à numeris A & B, proportionales erunt duabus differentiis D, E : quibus numerus C ab eiſdem A & B diſcrepat. Eſt autem numerus C diuerſus à numero illo, qui ex diuiſione V per R generatur. (Duo enim numeri diuerſi Q & V diuidi non poſſunt, per eundem numerum R : quin diuerſos quotientes producant.) Ergo differentia inter A & B; ſiue vnus idémque numerus F diuiditur in numeros diuerſos inter ſe proportionales. Quod eſt abſurdum, neque enim numerus quiſpiam, vt F, poteſt diuidi in duas partes, vt D & E, & iterum in alias duas : quæ ſint duabus D & E proportionales. Si enim earum altera maior ſtatuatur quàm D, altera erit neceſſariò minor quàm E; vt ſcilicet ambæ ſimul eundem efficiant numerum F à duabus partibus D & E ſimul additis conflatum. Sed numerus maior quàm D ad numerum minorem quàm E eandem rationem habere non poteſt, quam habet D ad E. Quatuor ſiquidem quantitatum proportionalium ſi prima maior eſt quàm tertia (quæ hîc eſt D) etiam ſecunda maior erit quàm quarta E per Prop. 14. lib. 5. Elem. Verùm E probata eſt maior quàm illa ſecunda. Ea-

dem ergo quantitas alterâ quantitate, & maior, & minor foret. Quod est absurdum. Itaque. Si quispiam numerus C medius &c. Quod probandum erat.

PROP. XXXXVI. *Probl.*

Duabus miscibilibus materiis datæ quantitatis datíque pretij permixtis, permixtæ materiæ pretium definire.

Vel vt vulgò efferri solet.

Duarum materiarum pretij diuersi,
Alligatarum pretium commune inuestigare.

Expositio.

Duplex est, etsi minùs animaduetti solita, alligationum regula. Prioris enim (quæ est hîc exponenda) methodus docet, qua ratione permixtis iam materiis diuersis, earum commune pretium definiatur. Posterior autem modum tradit, quo, rerum miscendarum pretio communi supposito, ita res ipsæ misceantur secundum debitam quantitatem, vt iuxta statutum pretium æstimentur: de qua dicetur deinceps. Proposui autem duas tantùm res miscendas, licet plures quotlibet misceri queant: quia qua ratione duæ miscentur, eadem plures misceri debent, vt constabit.

Constructio

Tota ad problematis huius solutionem necessaria constructio tribus hisce præceptis continetur.

In res duc pretium. Productos addito factum
diuide per numerum, rerum additione creatum.
Inde datus quotiens pretium commune notabit.

Vt clariùs hæc præcepta exponantur: paradigma, cui applicentur, huiusmodi propono. Aurifex ille Syracusanus de quo apud Vitruuium lib. 9. cap. 3. coronam auream ex hieronis regis voto conflaturus, pondus quoddam auri purissimi, graduum videlicet, siue, vt vocant, karactorum 24 ab eo accepit: cuius splendore captus fraudem cœpit meditari: quam verò, traditum non est: eam fuisse supponamus huiusmodi. Aurum acceperit graduum 24, libras pendens 15. cui aliud librarum 5 au-
rûm

cum vilius, Graduum 8 tantùm admiſcuerit. Quæritur quot Graduum deinde fuerit aurum illud ex his duobus coagulatum? Quæſtioni ſatisfiet hac operatione iuxta tradenda præcepta in eundâ aurorum duorum pondera A 15 & B 5 alterum alteri ſubſcribe cum ſingulorum ſuis Gradibus C 24, & D 8 è regione poſitis. Tum hæc præcepta obſeruato.

A 15	C 24	E 360
B 5	D 8	F 40
G 20		H 400
	L 20	

Præceptum 1. *In res duc pretium.* Multiplica duo auri genera A & B per pretia duo C, & D, ſingula per ſingula, vt fianr numeri E & F.

Præceptum 2. *Productos addito.* Adde duos numeros E, F in vnam ſummam H 400.

Præceptum 3. *Factum diuide per numerum rerum, additione creatum.* Diuide ſcilicet numerum H per numerum G, qui ex duobus numeris A & B auri duplicis ſimul additis conflatur. Nam.

Inde datus quotiens pretium commune notabit. Ex ea diuiſione genitus numerus L 20 indicat pretium auri ex duobus illis conflati; ita vt illa auri maſſa libras G 20 pendens ſit graduum 20. Ex ea itaque auri mixti quantitate librarum 20 deſumens Aurifex libras 15, & in coronam impendens, aurum illud ſuum librarum 5; quod graduum tantùm 8 erat, ad aurum perfectius graduum ſcilicet 20 non ſine fraude reuocauit. Hic iam meritò quæras quo artificio vti potuit diuinus Archimedes ad fraudem comperiendam ſaluâ tamen & integrâ coronâ. Cui quæſtioni olim ſatisfiet ſchol. 2 prop. 48.

Præparatio.

Repetatur ſchema operationis totius ſuperioris. Sumpta autem differentia P 16 duorum pretiorum C 24, & D 8 ſecetur in duas partes M, N duobus numeris A, B auri duplicis ponderū proportionales (quod abſoluetur expeditè, ſi fiat vt G 20 tum ad A 15, tum ad B 5: ita P 16, tum ad M, tum ad N erit enim vt totus numerus G ad ſingulas ſui partes A, B: ita totus P ad partes M, N, & permutando. Vt totus G ad totū P; ita pars A ad partē M & pars B ad partē N: & permutando, vt A ad B; ita M ad N) tum ducatur M in C, vt fiat Q: & N in D, vt fiat R: duoque hi numeri Q & R ſimul addantur, vt fiat S: qui diuidatur per numerorum C & D differentiam P; vt tandem fiat V. Quæ tota operatio ipſiſſima eſt priùs in conſtructione adhibita mutatis tantum

A 15	C 24	E 360
B 5	D 8	F 40
G 20	L 20	H 400
M 12	C 24	Q 288
N 4	D 8	R 32
P 16	V 20	S 320

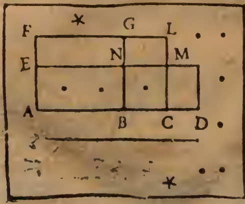
numeris ponderum A & B in alios M & N, numeris A & B proportionales. Hoc posito. Numerus V per Propos. 42. superiorem ita medius est inter pretia C & D, vt deficiat à maiore C 24, numero N 4; qui numerum D multiplicauit, vt fieret R 32: Viciſſim ſuperet minorem D 8, numero M 12; qui multiplicans C 24 produxit Q. Quibus poſitis facilè colligitur datæ ſolutionis probatio.

Demonſtratio.

In eo tota verſatur demonſtratio hæc; vt concludatur numerum V ita genitum; vt fert præparatio facta, eſſe æqualem numero L per Præcepta tradita inueſtigatum. Id autem manifeſtiſſimum eſt per Propoſ. 43. ſuperiorem Cum enim duo numeri A & B; duobus M & N ſint ex præparatione proportionales eorúmque ope ſtatutus ſit medius numerus V inter C & D: hic idem numerus V inter eoſdem C & D medius ſtatuetur ope numerorum A & B per citatam Prop. Inuentus eſt autem per numeros A & B medius L iuxta tradita Præcepta. Ergo V, & L ſunt æquales. Quare cum numerus V exhibeat pretium medium inter pretia C & D rerum mixtarum M & N diuerſi pretij: etiam L pretium medium exhibebit inter pretia C & D rerum mixtarum A & B. Quare duabus miſcibilibus materiis &c. Quod præſtandum erat.

Scholium 1.

Vt clariùs percipiatur tum operatio tradita, tum allata eius demonſtratio, hæreátque firmiùs: eam iuuat in diagrammate Propoſitionis 41. hic



M 12.	C 24.	Q 288
N 4.	D 8.	R 32
P 16.	V 20.	S 320

repetito contemplari. In eo itaque duas lineas A D, A B exprimere, ſuppono duos pretiorum numeros C & D: adeóque linearum A B, A D, diſcrimen B D, numerorum C & D differentiam P 16 exhibere. Hæc autem differẽtia P 16, diuiſa eſt in duas partes M 12 & N 4; illa eſt linea B C; hæc

C D. Ducitur autem linea maxima A D in lineam B C, vt fiat rectangulum E D. Quod exhibet numerum planum Q 288 genitum ex maximo numero C 24 ducto in M 12, qui est excessus medij numeri V 20 supra numerũ D 8 rectangulum autem E G contentum lineâ minimâ A B, & linea C D, exhibet planum numerum R 32 genitum ex minore pretio D 8 in numerum N 4: qui est differentia maximi numeri C 24 supra medium V 20. Sicut autem duo rectangula E D, E G simul æqualia sunt ex Prop. 41. rectangulo A L mediâ A C & differentia B D linearum A D, A B, contento: ita numerus S 320 æqualis duobus planis numeris Q R æqualis est numero, qui fit ex medio numero V 20 in numerorum C, D differentiam P 16: diuiso enim numero S 320, per P 16; producitur V 20. Ergo multiplicato V 20 per P 16, gigni debet S 320. Atque ita vides quidem in omnibus paritatem quando duorum numerorum C, & D discrimen P 16 in duas partes M & N secatur. At si alius statuatur numerus, vt G 20; qui in duos A & B multiplicaturos C & D ducatur quomodo duo producti E & F simul siue numerus H 400 exhiberi potest rectangulo A L, idémque diuisus per G 20, producere numerum L 20 medium, eundem planè cum numero V 20; qui producitur diuiso S per P 16 veram differentiam numerorum eorundem C & D? Respondeo tamen

A 15.	C 24.	E 360
B 5.	D 8.	F 40
G 20.	L 20	H 400
M 12	C 24	Q 288
N 4	D 8	R 32
P 16	V 20	S 320

in hoc diagrammate lineam mediam A C inter maximam A D & minimam A B, eundem numerum L 20 exhibere medium inter C 24 & D 8. Cum enim longitudo A D rectanguli E D ducatur in altitudinem B C numero quocunque expressam; & longitudo A B rectanguli E G in altitudinem C D expressam numero ad quem ita se habet B C, vt numerus M ad N: eáque duo rectangula æqualia sint rectangulo A L: cuius altitudo A F æqualis est rectæ B D quouis numero expressæ, vt numero G 20; qui æqualis est duobus simul A 15 & B 5: si numerus planus H 400 diuidatur per altitudinem A F, siue G 20 producetur longitudo numerus medius A C, siue numerus L 20 in eisdem partibus; quibus constant A D & A B: atque semper idem erit numerus A C; quicumque tandem fuerit numerus B D siue A F. Si modo (vt supponitur) diuidatur B D in C semper in eadem ratione: quod in simplicibus numeris Propositione 43. superiori ostensum est.

Scholium 2.

Vt clariùs etiam totum hoc alligationum negotium innotescat: proba-

tionem alteram datæ methodi adduco magis familiarem. In eodem ſchemate autum habes A 15 librarum; graduum verò C 24. Si ergo libras illas A 15, ducas in gradus 24: habes in eiſdem libris 15, contineri gradus E 360. eodem modo, ductis libris B 5 in gradus earum D 8; habes in libris illis B 5 contineri gradus F 40. Ergo in libris G 20 conflatis ex A & B continentur puritatis gradus H 400 ex E & F conflati. Itaque ſi iuxta regulam proportionum dicas. Si libræ G 20 continent gradus H 400: quot gradus libra vna continebit? Inſtitue proportionum regulam: repeties vni libræ auri ex auro duplici coagulati competere gradus L 20. At-

Libræ auri G 20.	gradus H 400.	libra 1?	gradus L 20

que adeo tota illa auri ita mixti maſſa; eiúſque pars quælibet, cum ſit eiuſdem qualitatis cum tota quantitate, gradus perinde 20 ſibi vendicabit. Conſtat autem in hac operatione regulæ proportionum idem omninò præſtari:quod iuxta tradita ſuperiùs præcepta traditum eſt vt multiplicantur ſcilicet auri duplicis libræ A 15 & B 5 pretia ſua C & D: & producti E, F adduntur, vt fiat H: qui diuiditur per G 20. Nam libra 1. ducta in gradus H 400, nihil mutationis inuehit: ſoláque diuiſione numeri H 400 per G 20, habetur ſolutio. Quod ſolùm præſcribitur ſuperiùs.

Scholium 3.

Problematis huius ſolutionem aliquot aliis exemplis non abs re fuerit illuſtrare. Duo ſunto vini genera diuerſa diuerſique pretij: quotum menſuræ aliquot permiſcentur, eorúmque ita mixtorum pretium quæritur? Sint prioris, menſuræ A 3; poſterioris, B 2: illius pretium ſit C 15 aureorum; huius, ſit B 2 aureorum. Itaque *in res A & B duc pretium C & D.* Vt fiant E & F. Productus E & F addito, vt fiat H. factum H diuide per numerum G, rerum A & B additione creatum. *Inde datus quotiens L pretium commune notabit.* Erit ergo numerus L 13 aureorum, pretium vnius menſuræ vini ex duobus A & B mixtis conflati. Ita enim hæc & aliæ ſimiles quæſtiones ſunt intelligendæ, vt cum dicitur. Tres ſunt menſuræ vini A, quod aureis C 15 æſtimatur: non ſit ſenſus tres illas vini menſuras ſimul, aureis 15 æſtimari, ſed menſuram vnicam, ita vt cum A 3 multiplicat C 15 aureos, gignítque E 45, pretium gignat trium menſurarum A? ſimiliter, cum B 2 ducitur in pretium D 10; generatur pretium F 20 aureorum; quod pertinet ad duas illas menſuras vini B. Vnde deinde ſequitur(quod ſolutionis datæ methodum declarat apertiſſimè)

A 3	C 15	E 45
B 2	D 10	F 20
G 5	L 13	H 65

tissime) vt numerus H 65 ex duobus E & F conflatus, pretium sit numeri G 5 ex mensuris A 3 & B 2 additis geniti. Cum ergo diuiditur numerus H 65 aureorum per numerum G 5 mensurarum, habetur numerus L 13 aureorum: qui erunt pretium vnius mensuræ vini permixti: & quidem meritò: Illa enim vina duo, etsi permisceantur, de pretio ob permixtionem nihil amittunt; & sicut ipsa, in vnum G coalescunt; ita & ipsa pretia E, F in vnum H reuocantur. Quod in partes quinque diuisum per diuisorem G, exhibet vnius mensuræ pretium L; quæ mensura est vini ex duobus pretij diuersi, conflati: vt vel ex hac familiari ratiocinatione discas tradita methodo rectè solui problema.

Verùm, esto iam quæstionis sensus huiusmodi: vt vini A prioris, mensuræ ipsæ tres aureis C quindecim æstimentur: posterioris verò B mensuræ duæ aureis 10. Si ergo misceantur; quodnam pretium erit mensuræ vnius? Adde tum vinorum mensuras A, B, vt fiat G: tum pretiorum numeros C, D; vt fiat L hunc diuide per G: fiet E pretium mensuræ vnius, vini permixti. Tunc enim nulla adhiberi debet multiplicatio rerum A & B per pretia C & D; quia ipsa pretia C, D, sunt iam definita pretia. Ergo si ipsa addantur: erit L pretium vinorum A, B permixtorum. Quare si G numerus mensurarum A, B additarum diuidat L: pretium E vnius mensuræ definietur.

A 3	C 15
B 2	D 10
—	—
G 5	L 25
E 5	

Proponi interdùm possunt miscendæ duæ materiæ: quarum altera pretij nullius sit. Vt, si aurum, cuius puritas ad vltimum gradum, ad gradum scilicet vigesimum quartum adducta est, cum argento, vel alio metallo misceri debeat: etsi argentum secundum se spectatum alicuius sit pretij; tamen habità ratione auri, eiúsque puritatis, nullius censetur gradùs: quo fit, vt si auro misceatur, quia ex vtroque coagulata massa maior euadit; de puritate auri prioris decedunt gradus aliquot pro proportione admixti argenti. Non secùs, si ad vini, cuius statutum est pretium, mensuras aliquot, aliquot aquæ mensuras nullius pretij admisceantur: de pretio prioris vini puri aliquid decedat necesse est, minúsque æstimetur quælibet vini ex vino & aqua conflati mensura. Quomodo ergo post permixtionem pretium definietur? non alio sanè, quam tradito. Exemplum esto.

Miscentur tribus mensuris vini, cuius mensura vna aureis 5 æstimatur, duę aquæ mensuræ. Quęritur pretiũ vnius mensuræ vini ita cum aqua per-

A 3.	C 5.	E 15.
B 2.	D 0.	F 0.
G 5.	L 3.	H 15.

mixti dispone numeros vini, & aquæ miscendorum vnà cum pretiis, vt præceptum est; & hoc schema refert. Tum, vt ante, multiplica vini mensuras A 3 per pretium C 5 vnius mensuræ datum: fiet E 15. Duc etiam aquæ mensuras B 2 in eius pretium D 0: vt fiat F 0. adde E & F; fiet H 15. Diuide 15 per G 5 ex mensuris A 3 vini, & aquæ B 2 additis conflatum: habebis vnius mensuræ pretium L 3, vini illius ex vino puro, & aqua permixti, tótque aureis æstimabitur vna ex illo mensura.

A 4	C 15	E 60
B 2	D 0	F 0
G 6	L 10	H 60

Eodem modo dantur auri libræ A 4. Graduum C 15: quibus miscentur argenti libræ B 2, graduum D 0. Regulam, vt priùs, institue habebis ex ea permixtione aurum libram vnam pendens graduum L 10.

PROP. XXXXVII. *Probl.*

Trium aut plurium pretij diuersi mixtarum materiarum commune pretium definire.

Constructio.

Problema hoc vnà cum præcedenti proponi, soluíque potuisset: cum vnus vtriúsque soluendi modus tradi possit. Verùm cum demonstratio paulò diuersa futura esset: propositionem ipsam diuidere visum est aptiús. Itaque proponatur omnium instar exemplum huiusmodi. Tria sint auri genera A, B, C, vnà cum argento D permiscenda: quorum puritatis gradus sunt E, F, G, H. Primi A tres libræ sumuntur; secundi B, libræ 5. tertij verò C, libræ 8. Argenti denique D, libræ 4. Quæritur quot graduum puritas auri ex illis coagulati futura sit seruatâ proportione singulorum tum quantitatis, tum perfectionis: Quot scilicet graduum futura sit libra quælibet mixti huiusmodi auri.

Id non aliter innotescet; quàm innotuit superiùs pretium vnius libræ auri

A 3.	E 12.	K 36
B 5.	F 10.	L 50
C 8.	G 16.	M 128
D 4.	H 0.	N 0
—	7 —	
P 20.	Q 10—	R 214
	10	

auri ex duorum tantùm permixtione conflati. Itaque iuxta tradita Præcepta. *In res* A,B,C,D, *duc pretium* E , F , G , H , vt fiant numeri K , L, M , N , *productos* K , L , M, N , *addito* vt fiat R. *Factum R diuide per numerum P rerum* A,B,C,D, *additione creatum. Inde datus quotiens Q pretium* commune notabit. Indicabit ſcilicet numerus ille Q, diuiſo numero R per numerum P, inuentus, libram vnam auri poſt permixtionem , eſſe graduum ſiue Karattorum 10 , cum vnius gradus tribus decimis partibus.

Demonſtratio.

Alia non eſt hic futura demonſtratio (ſi quidem ea , quæ Propoſitionis antecedentis Scholio 2 allata eſt attendatur) quàm quæ ibidem expoſita eſt. Patet enim per multiplicationem numerorum A, B, C, D libras ſingulorum metallorum , exprimentium , per graduum numeros E , F , G , H ; haberi gradus omnes , quos libræ metallorum A, B, C, D, continent ; nempe k , L , M , N. Quare ſi omnes hi gradus addantur in vnum numerum R 214 :: pertinebit hic numerus R ad numerum P 20 ex omnibus libris metallorum additis conflatum :: (totum ſiquidem partibus omnibus ſimul ſumptis eſt æquale) tótque puritatis aureæ gradibus conſtabunt libræ illæ P 20 auri mixti. Si igitur numerus R 214 graduum puritatis maſſæ aureæ librarum P 20 , diuidatur per ipſum numerum P 20 : Quotiens Q 10 $\frac{2}{10}$ indicabit quot gradus puritatis ſibi vendicet libra quælibet mixti illius auri.

Quod ſi demonſtrationem aliam ſin minùs planiorem , elegantiorem certè, ac nobiliorem deſideres, ei perſimilem ; quæ ex Propoſ. 41. & 42. deriuatur ; quæque diagrammati geometrico congruit : haud ægrè tibi ſatisfiet hoc modo. Miſce ſigillatim duo prima auri genera A 3 & B 5

librarum; quorum pretium est E & F, illud graduum 12; istud graduum 10. habebitur, seruatis præceptis superioribus, pretium Z vnius libræ auri ex duobus A & B permixtis coagulati, Nam K & L ex multiplicatione A per E; & B per F, geniti, simul additi generant X. Quo diuiso per V ex additione A & B conflato producitur Z pretium vnius libræ ex duobus auris mixtis. Iam si aurum istud V alligetur eodem modo cum auro C 8 librarum, & graduum 16. ducto vtroque auro V, C in pretium suum Z, & G. genitisque X, M simul additis, vt fiat S: qui demum diuidatur per T ex librarum numeris V & C simul additis genitum: nascetur enim pretium commune Y. Denique cum auro T librarum 16: cuius pretium est Y alligabitur argentum D librarum 4. nulliúsque gradus puritatis aureæ. Vnde tandem habebitur per hanc sigillatim institutam alligationem pretium commune Q vnius aureæ libræ ex omnibus illis auri generibus conflatæ: quod habebatur priùs per alligationem omnium simul metallorum. Hæc autem alligatio binorum, & binorum numerorum ita absoluta, demonstratione probatur eadem; quâ præcedens propositio: idem enim est vtrobique casus duorum numerorum alligandorum: cui soli conuenit diagramma Geometricum propositionis 41. Trium ergo aut plurium diuersi pretij materiarum commune pretium determinauimus. Quod faciendum erat.

A 3.	E 12.	K 36.
B 5.	F 10.	L 50
V 8.	Z $10\frac{1}{4}$.	X 86
C 8.	G 16.	M 128
T 16.	Y $13\frac{3}{8}$.	S 214
D 4.	H o.	N o
P 20	Q $10\frac{7}{10}$	R 214

Scholium.

Hic primò obserues, quando duarum materiarum diuersi licet pretij, idem fuerit numerus; perfici alligationem, hoc est, pretium commune haberi: si pretiorum numerus bifariam diuidatur. Exemplum habes paulò ante positum, Contigit enim duos numeros V & C librarum duplicis auri alligandi æquales esse, librarum scilicet 8. Dico itaque, si numerus $26\frac{1}{4}$ ex duobus pretiis Z, G conflatus bifariam diuidatur, vt fiat Y $13\frac{1}{8}$ hunc numerum Y designare gradus cuilibet libræ ex auro duplici V & C mixto debitos. Ratio est. Quia cum idem numerus V (aut D) ducatur in duos numeros Z, G, & producat duos numeros X & M: erunt hi duo numeri simul æquales numero: qui fieret ex numero V ducto in numerum vnicum ex duobus Z & G simùl additis conflatum pro prop. 1 lib. 2. Elem. fieret ergo numerus S. Iam verò si diuideretur numerus S per V restitueretur numerus

V 8	Z $10\frac{1}{4}$	X 86
C 8	G 16	M 128
T 16	Y $13\frac{1}{8}$	S 214

merus ex Z & G collectus. At si idem numerus S diuidatur per numerum T duplum numeri V (est enim T æqualis duobus numeris V & C) producetur pars dimidia numeri ex duobus Z, G, collecti. Patet. Cum enim idem numerus S producatur ex V in duos simul Z, G ducto: qui producitur ex T in numerum Y, quotientem diuisionis numeri S per T diuisi; ita erit per propositionem 19. lib. 7. Elem. numerus T ad V, vt duo simul Z, G, ad Y. Sed T est duplus numeri V. Ergo duo simul Z, G dupli sunt numeri Y. Hoc est, Y semissis est, vt asserui, duorum simul numerorum Z, G. Quæ demonstratio, cum eadem planè sit; si tres materiæ diuersi pretij, sed quantitatis æqualis alligentur; si tertia pars pretiorum sumatur, ea erit in eo casu quæsitum commune pretium. Nec secùs continget: si quatuor fuerint alligandæ materiæ quantitatis æqualis, singulæ singulis: tunc enim quarta pars numeri ex pretiis additis collecti, erit is qui quæritur: & sic de cæteris deinceps: eadem enim est omnium ratio.

Obserua secundò idem pretium medium commune Q in allato paradigmate constructionis reperiri posse; etsi variis modis tum res tum pretia mutētur. Ecce enim.

A 3.	E 12.	K 36	A 4.	E 9.	K 36
B 5.	F 10.	L 50	B 4.	F $12\frac{1}{2}$.	L 50
C 8.	G 16.	M 128			
D 4	H 0	N 0			
P 20	Q $10\frac{7}{10}$	R 214			

Si in paradigmate illo in locum numeri A 3 substituas numerum A 4; & in locum numeri E 12 numerum E 9: vt scilicet idem fiat numerus K 36 ex multiplicatione 4 per 9 qui fiebat ex multiplicatione 3 per 12: non mutabitur numerus R 214 ex additione numerorum K, L M, N collectus qui diuidi debet per P 20. At mutabitur ipse P 20 in numerum 21; eò quod in locum numeri A 3 substitutus fuerit numerus 4. minuatur ergo vnitate vnus aliquis reliquorum numerorum B, C, D, verbi gratiâ B 5, vt fiat B 4: per quem numerum si diuidatur L 50; fiet $12\frac{1}{2}$: qui substitui debet loco numeri F 10. Atque ita factâ hac mutatione immutati permanebunt numerus P 20 diuidens, & numerus R 214 diuidendus; atque adeò numerus Q $10\frac{7}{10}$ ex diuisione genitus. Quod si propter illam vnitatem, qua numerus A 3 fuit auctus; vnitatem detrahas ex numero D 4 librarum argenti, nullius pretij H 0: etiam hoc modo immutati permanerent tres numeri P, Q R. Denique nec vnquam mutabitur quæsitus medius numerus Q $10\frac{7}{10}$: quoties ita inter se temperabuntur meteriarum A, B, C, D, & pretiorum E F G, H numeri: vt ex illorum additione collectus ad numerum ex numeris per multiplicationem rerum in pretia productis collectum eandem seruet rationem

tionem quam habet P 20 ad R 214: ſemper enim per diuiſionem naſcetur idem numerus Q $10\frac{7}{10}$: cum ſemper ita ſe habitura ſit vnitas ad quotientem Q; vt diuidens quilibet ad diuidendum. Ex quibus patet quàm variis modis mutari poſſint materiarum, & pretiorum numeri ad mixtionem concurrentes abſque mutatione pretij medij, qui quæritur. Quod in eorum gratiam obſeruatum ſit: qui cenſent alligationem aliquam factam, ita numeris ex quibus orta eſt, eſſe propriam, vt aliis nullis conuenire poſſit.

PROP. XXXXVIII. *Probl.*

Duas vel plures miſcibiles materias pretij diuerſi in vnam datæ quantitatis, datíque pretij conflare. Oportet autem pretium datum, nec maximum materiarum miſcendarum pretium excedere; nec ab earum minimo pretio excedi.

Conſtructio prior.

Conuerſa eſt hæc propoſitio præcedentium duarum: quarum prior 46, res duas; poſterior 47, duabus plures miſcendas ſupponebat; ſupponebat vtraque mixtarum quantitatem, neutra pretium medium; ſed inueſtigabat. Hæc verò contrà, pretium medium ſupponit; quantitatem inueſtigat. ſiue duæ, ſiue plures miſcendæ materiæ proponantur. Exemplum adduco; tum præcepta ad ſolutionem neceſſaria expono.

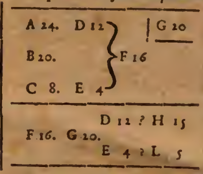
Duo ſunt auri valoris inæqualis genera miſcenda. Prius puriſſimum eſt, gradûs 24 puritatis continens: alterum continens gradus tantum 8. Aurum verò medij pretij ex illis duobus conflandum, eſſe debet graduum 20: cuius quantitas ſit librarum 20. Quot ergo libræ auri purioris graduum 24, quot auri minùs puri graduum 8 aſſumi debent ad libras 20 conflandas auri gradibus 20 conſtantis? Ad ſolutionem præcepta hæc obſeruato.

Sumpta decuſſatim à medio diſcrimina præbent
Aut numeros; aut qui ſimiles naſcentur ab illis

Præceptum 1. *Sumpta decuſſatim, &c.* Ita ad praxim numeros primò compone. Numeri A, B, C, pretia ſunt, quæ paulò ante ſunt aſſignata. A maximum, C minimum, at B eſt datum medium de quo inirur tota quæſtio. Itaque ſume diſcrimen maximi A 24 à medio dato B 20, quod eſt

eſt E 4 : illudque *decuſſatim* id eſt è regione minoris numeri C 8 ſcribe. Sumptum item diſcrimen D 12 medijeiuſdem numeri B 20 à minimo C 8 reciprocè *decuſſatim* appone maximo numero A 24.

Præceptum 2. *Diſcrimina præbent aut numeros : aut qui, &c.* Sumendæ ſcilicet ſunt ex auro puriſſimo A libræ D 12 : ex viliſſimo C, libræ E 4. Si ergo hi duo librarum numeri D & E ſimul ſumpti (hoc eſt numerus F 16) occurrant æquales dato librarum numero G 20 : quot ſcilicet libris pendere debet maſſa ex duobus auris conflanda : ſolutum tunc eſt problema : at verò ſi, vt hic contingit, inæqualis fuerit numerus F ex duobus D, E diſcriminibus additis conflatus numero G : tunc *numeri qui ſimiles naſcentur ab illis* ſumendi erunt. Qui habebuntur ope regulæ ſocietatis propoſitione 40. traditæ. Fiet ſcilicet vt numerus F 16 ex duabus differentiis D, E additis conflatus ad numerum G 20 datum; ita ſingulæ differentiæ D 12, E 4, ad ſingulos numeros H 15, L 5. Hi enim erunt quæſiti numeri. Sumendæ ſcilicet erunt libræ H 15 ex auro A graduum 24 ; libræ autem L 5 ex auro C graduum 8. Hi enim duo numeri H 15 & L 5 æquales ſunt numero librarum G 20 dato : eáque ex auro duplici coagulata maſſa graduum puritatis erit B 20 : vt quærebatur. Atque hæc eſt duas diuerſas materias alligandi methodus ; quam priùs demonſtro, quàm plures duabus materias coagulandi praxim trado : quæ ex illius probatione manifeſta futura eſt.



Demonſtratio.

Solutionis huius clariſſima euadet demonſtratio ; ſi hæc primùm obſeruaueris. Nimirum : Cum auri vtriuſque A & C ; nec non auri B ex vtroque conflati quantitas penes pondus à libra denominatum expendatur : ſtatuatur auri puri A 24 libram vnam graduum eſſe 24 : alterius autem minùs puri C 8, graduum 8. Quo poſito : ſi vnius libræ auri puri A, gradus 24 multiplicentur per D 12 : fiet numerus M 288 graduum ; quos libræ D 12 auri puri continent (tot enim gradibus puritatis conſtare neceſſe eſt libras 12 ; ſi gradibus 24 libra vna conſtiterit) ſimiliter. Si auri minùs puri C 8, libræ vnius gradus 8 multiplicentur per numerum E 4 librarum ; fiet numerus N 32 ; quot ſcilicet gradus puritatis continent libræ 4 auri vilioris C 8. Additis porrò hiſce duobus graduum numeris M &

NNNn

| G 20

A 24. D 12 } F 16 — M 288 } P 320
B 20
C 8. E 4 N 32

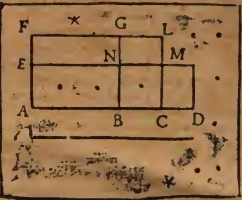
D 12 ? H 15
F 16.G 20.
E 4 ? L 5

N, vt fiat P 320: erit hic numerus P, graduũ numerus, quos numerus F librarum 16 ex numeris D 12 & E 4 additis collectus continet. Per hũc autẽ librarũ numerum F 16, si diuidatur numerus ille P graduum 320: fiet per Propos. 44. superiorum, numerus B graduum 20. medius suppositus inter A & C; cuius differentiæ D, E à numeris A & C decussatim positæ, eosdem A & C multiplicarunt. Atque ita si problema, solidum exigeret ex duplici illo auri genere conflatum; quod puritatis gradibus B 20 constaret: penderet autem libras F 16. solutum rectè foret problema iuxta citatam Propositionem. Verùm etsi aurum ex duobus conflatum non libras F 16; sed libras G 20 pendere debet. Illud tamen rectè definitum assero per traditam praxim: cum reperti sunt duo numeri H 15 & L 5 duobus D & E proportionales.

Cum enim per constructionem ita sit numerus F ad datum numerum G 20; vt singulæ partes D, E totius numeri F, ad numeros H & L: erunt H & L partes numeri G 20, ipsique simul sumptæ æquales. Nam per constructionem est, vt F ad G; ita tam D ad H, quàm E ad L, & permutando, D ad E; vt H ad L. En ergo, vt H, L, sint proportionales duobus D, E. En autem vt iidem sint numero G æquales. Vt totus F ad G; ita est totius F pars D ad H, & ita etiam pars E ad L. Ergo per Prop. 18. lib. 5. Elemen. duo simul antecedentes D, E ad duos simul consequentes H, L, ita se habent vt F ad G. Sed duo simul D, E sunt æquales numero F. Ergo etiam duo simul H, L æquales erunt numero G per Prop. 14. lib. 5. Elem. Quæ cum ita sint; patet per Propositionem 45. superiorem rectè solutum esse problema: rectè scilicet definitos esse numeros H & L: quorum prior H 15 ostendit ex auro A graduum 24 assumi debere libras 15; posterior autem L 5 indicat ex auro viliori C graduum 8, debere assumi libras 5, vt fiat aurum mixtum pendens libras G 20 datas: cuius pretium sit datorum graduum B 20.

Determinationis autem illius ad Propositionem allatæ, vt datum pretium, nec datorum maximum excedat, nec excedatur à minimo, aperta per se ratio est. Si enim datum pretium, datorum maximum excederet: quomodo ex datis ipso minoribus conflaretur? quomodo item, si à minimo excederetur, posset erui pretium ex maioribus inter se mixtis? de ea tamen determinatione iterum inferiùs pauca. Vt autem non tantùm praxis,

xis; sed ipsius etiam allata probatio oculis ipsis subiiciatur. Ecce vt tota in diagrammate geometrico superiùs allato contineatur.



A 24. D 12 }
B 20. } F 16
C 8. E 4 }

M 288 }
F 16 } P 320
N 32 }

D 12 ? H 15

F 16. G 20.

E 4 ? L 5

Tres lineæ A D, A C, A B tres sunt numeri pretiorum A 24, B 20, C 8. linea B D est numerus F 16 discrimen inter maximum A, & minimum numerum C. Cuius discriminis pars D 12 exhibetur rectâ B C; rectâ autem C D exhibetur discriminis pars altera E 4. Porro planus numerus M 288 ex A in D ducto genitus, exprimitur rectangulo E D, duobus lateribus A D, B C contento. At planus numerus N 32 ex C 8 in E ducto genitus, designatur rectangulo E G, lineis, A B minimâ, & C D excessu maximæ A D supra mediam A C comprehenso. Vt autem his duobus rectangulis E D, E G æquale est rectangulum A L; ita duobus planis numeris M 288 & N 32 simul additis æqualis est planus numerus P 320: qui diuisus per numerorum A & C differentiam F 16, necessariò producit, vt per Propos. 44. probatum est, medium numerum B 20. Cum ergo contingit differentiam numeri maximi A 24, & minimi C 8; quæ est numerus F 16 ex duabus differentiis D & E additis conflatus, æqualem esse dato numero, qui exprimit quantitatem mixti corporis conflandi, vt si hic fieri deberet aurum ponderis 16 librarum: patet differentias D, & E numeri medij B 20 dati à duobus extremis A & C permutatim sumptas, rectè exhibere pondus accipiendum tum ex auro A pretij maioris, tum ex auro C pretij minoris. Tunc enim planus numerus P 320, qui ex puritatis graduum numeris A 24, & C 8, in librarum numeros D & E ductis gignitur, & exprimitur rectangulo A L; in duos numeros M 288, & N 32 duobus rectangulis E C, E L expressos secatur in eadem ratione; qua secatur ipse numerus F 16 in duas differentias D, E, ex quarum additione conflatur, vt suprà Prop. 46. in Schol. 1. ostensum est: non secùs ac totum rectangulum A L in eadem ratione secatur in duo rectangula E C, E L; in qua secatur basis A F in E; aut B D in C. At verò, vt in nostro casu contingit, cum alia supponitur quantitas statuenda, à differentia illa F 16 numero-

rum A, C, vt hic ſupponitur G 20: tunc numeri inquiruntur H 15 & L 5 proportionales numeris D, E; & exprimuntur lineis A E, E F: ex quibus ita proportionalibus non mutatur numerus medius B 20, vt propoſitione 46. in Schol. 1. demonſtratum eſt.

Alia eiuſdem ſolutionis demonſtratio.

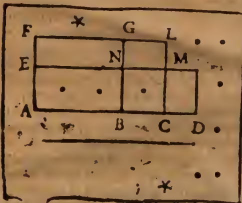
Hoc alio modo demonſtrari poteſt independenter à citatâ Propoſitione 44. allata ſolutio. Suppoſito ergo quod ad initium prioris demonſtrationis declaratum eſt, nempe dũ numerus D 12 multiplicat A 24 gradus puritatis, gigni numerum planum M 288 exprimentem gradus puritatis, quos auri puri libræ D 12 continent: ſicut & numerus N 32, gradus exprimit, quos continent libræ E 4 auri minùs puri C 8: qui & ipſe numerus N planus eſt ex lateribus C 8, & E 4 in ſe mutuò ductis genitus. Hoc, inquam, ſuppoſito ita ratiocinabimur.

A 24.	D 12.		M 288.
B 20.		F 16.	P 320.
C 8.	E 4.		N 32.

Numerus M ex D in A genitus æqualis eſt duobus numerus: qui fiunt ex D in C, & ex eodem D in F per Prop. 1. lib. 2. Eucl. (duo ſiquidem numeri C, F ſunt æquales numero A 24) ſed numerus ex D in C; ſiue ex C in D genitus, vnà cum numero, qui fit ex C in E 4, per eandem citatam Prop. 1. lib. 2. Elem. æqualis eſt numero, qui fit ex C in F duobus D, E, æqualem. Ergo numerus genitus ex D in F cum numero ex C in F; ſiue numerus ex F in D genitus cum numero ex F in C æqualis eſt numeris duobus: quorum vnus fit ex D in A; alter verò ex E in C. Sed qui fiunt numeri duo ex F in D, & ex F in C æquales ſunt per Prop. 1. lib. 2. Elem. numero vnico; qui fit ex numero F in numerum ex duobus D & C compoſitum ducto; qui eſt numerus B 20. Nam D ex conſtructione eſt differentia numerorum B & C. Ergo numerus P 320 genitus ex numero F ex duabus differentiis D & E additis collecto, in medium datum numerum B 20 ducto; æqualis eſt duobus numeris M & N: quorum ille fit per multiplicationem D in A; hic verò ducto E in C. Ergo numerus P 320 continet gradus tàm auri puri A, libras D 12 pendentis expreſſos numero M; quàm gradus auri vilioris C, librarum E 4; quos exhibet numerus N 32. Quare ſi numerus P 320 diuidatur per F 16 ex differentiis D & E, quæ librarum numerum deſignant, additis collectum, non poteſt non gigni numerus B 20 medius puritatis numerus aſſignatus. Quare ſi librarum numerus aſſignatur æqualis differentiæ F numerorum A & C: rectè præceptum eſt ex auro A deſumi libras D 12; qui numerus eſt exceſſus dati medij numeri B 20 ſupra minimum C 8: ex auro verò C libras E 4; qui numerus eſt defectus medij eiuſdem numeri B 20 à maximo

mo A 24. Numeris verò tam D, E; quàm F, ex D & E additis genito, constitutis, eorum ope alij reperientur quæstione satisfacturi, vt suprà in hoc paradigmate ostensum est: in quo cum massa ex duobus metallis A & C conflata quæreretur: quæ libras G 20 ponderaret; inuenti sunt per regulam societatis numeri 15 & 5: quorum ille exprimit libras ex auro A desumendas; hic verò desumendas ex auro C. Quare rursùs constat ex hac ratiocinatione rectè solutum esse problema. Quia verò paulò intricatior fortasse videatur varia illa numerorum compositio mutua ad probationem adhibita: planissima euadet ex geometrico diagrammate iam aliquoties repetito. Huic ergo numeros ita applica.

Numerus B C est 12; qui ductus in B D 16, & in A B 8, generat planum numerum E D 288; qui fit ex B C 12, in A D 24. Sed numerus ex A B 8 in B C 12, & in C D 4 ducto genitus, æqualis est per Prop. 1. lib. 2. Elem. numero ex A B 8 in B D, siue A F 16 genito hoc est, plano numero A G. Ergo numerus, qui fit ex B D 16 in B C 12, & in A B 8 (qui erit numerus planus A L ex duobus planis numeris A G, & B L) æqualis est duobus numeris; quorum vnus est



planus numerus E D, ex B C 12 in A D 24 genitus; alter verò est planus E G, ex A B 8 in C D 4 ducto procreatus, Sed duo illi numeri A G & B L; quos generat B D, siue A F 16 ductus in A B 8, & in B C 12, simul sumpti, sunt æquales numero, qui fit ex B D, siue A F 16 in vnicum numerum A C 20 ex duobus A B 8 & B C 12 conflatum ducto per Prop. 1. lib. 2. Elem. Ergo numerus (qui est superior numerus P 320) ex duabus differentiis B C 12, & C D 4 simul additis, hoc est, ex numero B D 16 ducto in numerum medium A C 20 datum, eundem numerum producit: qui producitur ex B C 12, (qui est excessus medij numeri A C 20 supra minimum A B 8) in maximum A D 24 ducto; & simul, qui producitur ex C D 4 (qui est excessus maximi numeri A D 24 supra medium A C 20) in minimum A B 8. Cum ergo numerus planus A L, siue P 320 exprimat gradus puritatis duplicis auri; quos libræ 12 auri puri, & libræ 4 auri vilioris simul continent: si numerus ille planus 320 diuidatur per datum medium pretij numerum B 20 generari necesse est numerum F 16 librarum ex duabus differentiis D 12 & E 4 additis conflatum. Si ergo datus

fuerit numerus librarum 16, quas ponderet corpus ex duobus auri generibus mixtum; ſolutum tunc erit problema. At verò ſi maior detur vel minor, quàm numerus ille 16 librarum (qui eſt exceſſus numeri maximi 24 ſupra minimum 8) vt in noſtro Paradigmate, in quo aſſignatur numerus G 20 librarum: tunc vt ſuprà declaratum eſt, ope regulæ ſocietatis reperientur debiti numeri H 15 & L 5.

Conſtructio poſterior: cum plures quàm duæ res ſunt permiſcendæ.

Proponatur in exemplum aureum vas ex tribus auri generibus conflandum, ponderis librarum duarum: aurum autem primum A ſit graduum, ſiue karatorum 20, ſecundum B 16 graduum; & tertium C 12. Debeat

N 2 | A 20. E 2. G 6. L 8

D 18 B 16. F 2. M 12

C 12. H 2

L 8 ? P $1\frac{1}{3}$

M 12. N 2.

F 2 ? Q $\frac{1}{3}$

H 2 ? R $\frac{1}{3}$

autem aurum mixtum gradibus D 18 conſtare: qui nec ſummo A 20 maior eſt, nec minimo C 12 minor. His ergo ſuppoſitis ita operationem inibis quaſi duo tantum numeri A & B, pretio inter ipſos medio D forent alligandi iuxta præceptum illud *Sumpta decuſſatim à medio diſcrimina præbent aut numeros.* Itaque exceſſus D ſupra minorem B, qui eſt E 2, adſcribatur decuſſatim numero A: & viciſſim, exceſſus A ſupra D, qui eſt item F 2, adſcribatur numero B. Rurſùs, quia D medius eſt inter A & C, maximum, & minimum: eiuſdem exceſſus ſupra C, qui eſt G 6, apponatur ad A; & eiuſdem D à numero A defectus H 2, ad C ſcribatur. Tum, addantur ſimul duo numeri E 2 & G 6 ad numerum A pertinentes; vt fiat numerus vnicus L 8. Itaque ſi tria hæc diſcrimina L 8, F 2, H 2 ſimul addantur; vt fiat M 12: dico maſſam illam M, librarum 12 eſſe; eiúſque puritatem eſſe graduum 18: ad quam conficiendam libræ L 8 ex auro A; ex auro B libræ F 2; ex auro denique C, libræ item H 2, deſumi debent. Sed quia vas illud aureum non libris M 12 ponderare debet; ſed libris tantùm N 2. Regula inſtituetur ſocietatis: cuius primus terminus erit M 12, ſecundus N 2; reliqui L, F, H: abſolutâ demùm regulâ

gulâ, habebuntur numeri P, Q, R numeris L, F, H, proportionales iuxta illud *aut similes qui nascentur ab illis* : qui indicabunt quale pondus ex vnoquoque auro desumendum sit, vt vas conflетur libris duabus pendens, & puritatis gradibus D 18 datis constans.

Præparatio.

Vt solutionis huius ad res quotcumque permiscendas pertinentis demonstratio euadat apertissima : alio modo ineatur alligatio : ita scilicet, vt primùm duæ tantùm materiæ coagulentur; vt in allato paradigmate. Aurum. A 20 graduum cum auro B 16 graduum misceatur; vt conflatum aurum sit graduum D 18, nulla interim habitâ ratione auri tertij C. factâ operatione iuxta superiorem praxim, differentiæ decussatim positæ E 2, & F 2 (hæ enim sunt differentiæ numeri D à numeris A & B) iubent ex auro A sumi libras duas; duas item ex auro B. Atque ita fiet librarum numerus T 4 graduum D 18 : quarum librarum duæ E sumi debent ex auro A 20, duæ item F ex auro B 16.

	A 20	E 2	
D 18			T 4
	B 16	F 2	
	A 20.	G 6	
D 18			L 8
	C 12.	H 2	
		M 12	

Rursùs, fiat alligatio ex eodem auro A, & ex auro C. Sumendæ itaque erunt ex illo, libræ G 6; ex hoc verò libræ H 2 : quas determinant, iuxta traditam duas materias alligandi anteriorem constructionem differentiæ G, H, decussatim positæ. Quibus additis differentiis fiet librarum numerus L 8, massæ aureæ ex duplici auro A & C conflatæ : cuius puritas erit graduum D 18. Hoc posito.

Demonstratio.

Cum auri ex auro A 20, & ex auro B 16 conflati libræ T 4, graduum sint D 18 : totidémque graduum D 18. sint libræ L 8 mixti auri ex auro A & auro C: si libræ T 4 & L 8 addantur, vt fiant libræ M 12 : fiet aurum mixtum ex auro A 20, auro B 16; auro rursùs, A 20, & auro C 12. Cuius puritas erit datorum graduum D 18. Cum verò libræ M 12 fiant ex additione numerorum T 4 & L 8 : qui & ipsi nati sunt ex differentiis E, F, & G, H additis : constat rectè collectum esse librarum numerum M 12 auri mixti graduum D 18 datorum, ipsis additis differentiis E, F G, H, quouis ordine positis; vt si G 6 cum E 2 ad aurum A, quod bis alligatur, pertinentes primùm addantur; tum deinceps reliquæ F & H. Habitâ porrò

porrò massâ librarum M 12, cuius puritas est graduum datorum D 18; constat rectè definitum esse pondus ex quolibet auro desumendum per regulam societatis; quâ numeri proportionales numeris L, F, H prioris schematis, inuenti sunt P, Q, R; qui simul additi efficiunt libras duas datas. Rectè igitur traditâ methodo alligantur materiæ duabus plures diuersi pretij; quæ datum habeant pretium, datámque quantitatem. Quod posteriore hac constructione præstandum erat.

Corollarium 1.

Colligitur ex tradita constructione vtriusque partis Propositionis huius, operationem absolutam expedirè examinari posse: si nimirum inuentæ differentiæ illæ reciprocæ L F H (quarum prima L 8 ex duabus E 2, & G 6 superioris schematis per additionem conflata est) ducantur singulæ in numeros singulos A, B, C, quibus adhærent; vt fiant numeri R, S, T: hique simul addantur, vt fiat Z. Qui demùm diuidatur per numerum M ex differentiarum L, F, H additione collectum: debet enim per diuisionem (si erratum non est) produci numerus medius D datus, vt constat ex allata solutionis demonstratione.

	A 20	L 8	R 160
D 18	B 16	F 2	S 32
	C 12	H 2	T 24
		M 12	Z 216

Corollarium 2.

Constat prætereà ex ipsa operandi methodo in superiori schemate vsurpata, vt plures alligari possint numeri; sufficere vt vnus aliquis alligandorum numerorum maior sit, aut minor numero medio dato. Sic in præcedenti exemplo, datus medius numerus D 18 solo numero A 20 minor est: cui alligati sunt duo reliqui B & C, totidem differentiis E & G reciprocis, eidem numero A adscriptis: quæ demum in vnicam L addi debent; ita vt vnicus numerus in eo casu reliquorum omnium differentias reciprocas admittat, & compenset solus ad medium D datum constituendum.

Scholium.

Obseruandum dari interdum posse numerum pretij communis, qui maior vel minor sit, quam alligandorum numerorum quilibet; nec tamen alligationem euadere impossibilem. Quod, vt fieri contingat, accipe

A 16 E 10
C 10
B 12 F 10
D 0 G 6. H 2
L8

pe. Aurum est A graduum 16 ad aurum B graduum 12 alligandum; ita vt aurum mixtum sit C graduum 10 tantùm. Id quidem fuerit impossibile: si illud duplicis generis aurum A & B tantùm adhibeatur. Nam si solum aurum B pretij vilioris assumatur, pretium datum C superaturum est. At verò si aurum vilioris pretij quàm C, aut certè metallum pretij nullius auro misceri aptum adhibeatur, vt argentum, aut æs, tunc alligatio fieri poterit; ita vt massa ex illis conflata graduum sit 10. Ponatur itaque argentum D graduum 0 ad aurum comparatum: ad quod tam aurum A, quàm aurum B alligetur: habebuntur differentiæ decussatim positæ E, F, & G H ad argentum D, siue (additis G, H) ad L; quæ proportionem partium ex auro A, & auro B, & ex argento D sumendarum exhibent; vt fiat aurum mixtum, cuius puritas sit datorum graduum C 10. Vt si libræ 10 tam ex A, quàm ex B sumantur, vt indicant differentiæ E, F; & libræ 8 ex argento D; fient auri mixti libræ 28; cuius puritas sit graduum 10. Ex qua proportione colligetur quantum ex vnoquoque sumi debebit, vt fiat quotlibet aliud datum pondus, vt supra factitatum est.

Non secùs. Si datum pretium C 20 maius sit pretio maximo A 16: fieri poterit alligatio per assumptionem auri purioris D graduum 24: ad quod

D 24. G 4. H 8. | L 12
A 16. E 4
C 20
B 12. F 4

fiet reliquorum alligatio repertis decussatim differentiis G H, siue L; & E, F: quibus definitur quid ex vnoquoque desumi debeat ad aurum mixtum conflandum; cuius puritas sit datorum graduum C 20. Qua in vtraque operatione, siue datus graduum puritatis numerus C, sit maior maximo A, siue minimo B minor, obseruari debet, non tantum aurum graduum 24 vsurpari posse, sed aliud quotlibet plurium graduum; quàm sit data puritas C 20, auri mixti: sicut etiam loco argenti D graduum 0, aurum aliud modò graduum pauciorum, quàm C 10 licebit assumere: vt habeatur aurum mixtum graduum C 10. Verum vtrumvis præstetur, non ampliùs duplicis auri A & B alligatio fieri dici debet; sed triplicis metalli: ita vt operatio tota, in eam recidat; quæ tradita est: verúmque semper sit medium datum numerum esse debere huiusmodi; vt nec alligandorum maximo maior sit, nec minor eorum minimo iuxta determinationem Propositioni adiectam: vt vel hinc pateat adiectam necessariò.

OOO0

Scholium 2.

Ad extremum hic obmittenda non est, celeberrimam illam quæstionem soluendi methodus: qua vel vsus est Archimedes, vel vti potuit; vt Hieronis coronæ aureæ, non tantùm argentum ab aurifice mixtum; sed & argenti quantitatem saluâ coronâ comperiret. Obseruandum itaque ex eo quod aurum sit argento longè grauius, corpus aureum summæ puritatis graduum videlicet 24. Si eiusdem sit ponderis cum corpore argenteo, mole constare longè minori, quàm corpus argenteum. Vnde præterea sequitur, vt corpus ex auro, & argento coagulatum mole constet maiore quàm aurum purum eiusdem ponderis; minore verò quam eiusdem ponderis argentum. Quo animaduerso ita argenti, aurique quantitatem, quibus corona constabat venatus est.

Auri massam vnam, alteram argenti, vtramque æqualis cum corona ponderis in vas aquæ ad summum plenum immersit sigillatim: effusámque à singulis corporibus aquam diligenter excepit: & ad trutinam examinauit. Inuenerit ergo massam auream è vase effudisse aquæ pondus A vnciarum 8: argenteam verò, vtpote maiorem vnciarum B 12, siue libræ vnius ac denique coronam, vnciarum C 9. Differentiæ numerorum A & B à medio C decussatim positæ D & E declarant coronæ totius partes tres aureas extitisse; quartam verò partem fuisse argenteam: Eadem siquidem est ratio partium ponderis & molis homogenei cuiusvis corporis, quale est aqua: cuilibet enim parti pars ponderis respondet proportionalis.

A 8 D 3
C 9
B 12 E 1
F 4

D 3 ? H 15
F 4. G 20
E 1 ? L 5

Quare quemadmodum aquæ effusæ ab auro, & argento mensura quapiam exceptæ alligari possent ad aquam à metallo C mixto effusam: atque ita aurum A, & argentum B ad mixtum C alligari; eáque alligatione posset innotescere ratio partium auri & argenti ad mixtum metallum conflandum assumendarum: ita etiam earumdem partium eadem ratio innotescit ope ponderum, inita ipsorum alligatione, vt hic factum est.

Habita autem proportione D E partium assumendarum ex auro & argento ex pôdere æstimata: ea facilè ad pondus ipsum coronæ applicabitur, vt supra factitatum est; vt, si corona libras 20 pendere debuerat (quod est exemplû nuper propositû) fiet per regulâ societatis, velut schema reffert, vt numerus F 4, ex D & E additis collectus, ad G libras 20; ita D 3 ad H libras 15; ita etiam E 1 ad L libras 5. Quarum illas ex auro, has ex argen-

to aurifex ille fidei parum integræ ad coronam conflandam libras 20 pendentem insumpsisset non sine fraude, in locum scilicet librarum 5 auri substitutis totidem argenti libris. Habes ergo artem, qua mens illa diuina occultissimum hoc furtum deprehendit. Verumtamen etsi ars illa auri argento permixti quantitatem cognoscendi certa sit, & manifesta; si omnia ad eam necessaria accuratè obseruentur: quia non nisi ægrè aut ne ægrè quidem ab vllo etsi peritissimo artifice ea omnia possunt obseruari; quis enim effusam aquam præcisé possit ponderare, cum eius pars aliqua vasi adhæreat, tam illi à quo effunditur; quàm illi, in quod infunditur:. Præterea quia plus minúsve ante fluxum intumescere potest aqua, ita vt eius quantitas, pondúsve certum omninò non sit. Ideo aliam tutiorem viam ex Archimede tamen petitam iniêre recentiores quidam: inter quos primas facilè obtinet Marinus Ghetaldus in aureo illo opusculo; quod, *Promotus Archimedes*, nuncupauit. Cuius artificij totum fundamentum est huiusmodi.

Demonstrat Archimedes lib. 1. prop. 7. de iis quæ vehuntur in aqua. Solida corpora liquido grauiora demissa in liquidum ferri deorsum: & in liquido tanto esse leuiora, quanta est grauitas liquidi magnitudinem habentis solido corpori æqualem. Quo posito. Si præcisè cognoscatur, vt cognosci nihil obstat, quantum de pondere tam auri quàm argenti in aëre appensi decedat, dum aquæ immersum ponderatur; etsi inæqualia sint non tantum coronæ, sed etiam inter se duorum illorum metallorum pondera: coniici poterit, qua auri parte, qua parte argenti constet mixtum ex vtroque solidum. Hæc autem ponderis tam auri quam argenti proportio, dum in aëre, tum in aqua ponderantur; obseruata est accuratissimè à laudato Authore, quam tradidit huiusmodi Propos. 19.

Auri puri grauitas, qua in aëre est 19, *erit in aqua* 18.

Argenti grauitas qua in aëre est 31, *erit in aqua* 28.

Corona ergo A ex auro puro libras 20 in aëre ponderans: in aqua ponderabit libras B. Corona verò argentea C librarum item 20, in aëre; in aqua erit librarum D: qui numeri B & D habentur ex proportione grauitatis suppositã per regulã proportionum.

A 20   B 18 $\frac{12}{19}$ *vel* B 18 $\frac{558}{589}$ G $\frac{190}{589}$

E 20 ———— F 18 $\frac{438}{589}$ } L 520

C 20   D 18 $\frac{2}{31}$ *vel* C 18 $\frac{38}{589}$ H $\frac{110}{589}$

G 390 ? P 15

L 520.   E 20

H 130 ? Q 5

Reducantur autem vtrique numero B & D adhærentes fractiones ad eandem denominationem per Prop 21 libri 2. huius, vt schema refert. Iam in aqua ponderetur corona E, librarum 20 in aëre; & libras ponderet F

OOOo 2

18 cum fractione adhærente eiusdem cum reliquis denominationis, vt possit Epilogismus colligi in hunc modum, Cum numerus F minor sit numero B, maior autem numero C: hinc iam coniicitur coronam illam ex auro, argentóque mixtis conflatam. Cuius vtriusque quantitatem exhibebunt differentiæ G, H decussatim siue reciprocè numeris B & D assignatæ. Quæ si addantur, vt fiat L (denominatores expungo vt inutiles, cum sint æquales, nec rationem immutent fractorum numerorum per Prop. 10. lib. 2. huius) tum instituatur regula societatis: cuius primus terminus sit L, secundus sit E corona librarum 20: tertij sint duæ differentiæ G, H abiectis etiam denominatoribus. Reperientur absoluta operatione numeri P & Q: qui indicant coronam illam E librarum 20 constare libris 15 auri, argenti autem libris 5. Atque hoc modo longe certiùs innotescet tota mixtio; quam superiori per aquæ effluxum instituto.

PROP. XXXXIX. *Probl.*

Ex falso ad arbitrium assumpto numero verum & quæsitum definire.

Expositio.

Hæc est regula, quam vocant falsæ simplicis positionis: qua ope proportionum, ignoti numeri veri innotescunt ex aliis ad arbitrium assumptis, cuius constructionem expono exemplo huiusmodi proposito. Diuidendus proponitur numerus A 100 in tres partes inequales: ita vt maxima sit dupla secundæ; hæc verò tripla tertiæ, siue minimæ.

Constructio.

Quæsitum fingas numerum quem videris aptum.
Hunc perpende: dabit numeros proportio veros.

Præceptum 1. *Quæsitum fingas*, &c. Etsi numerum quemlibet ad solutionem quæstionis liceat assumere: alij tamen aliis sunt aptiores ad operationem expeditiùs, & planiùs absoluendam: quos fuerit operæ pretium eligere ad euitandos præsertim, quoad fieri poterit, numeros fractos; quorum tractatio solet esse perplexior, longiórque. Vt in exemplo proposito. Quia diuidendus est numerus A 100 in tres partes quarum prima est dupla secundæ; hæc, tripla tertiæ; sume numerum quem perspicis diuidi bifariam posse sine fractione: & rursùs eius semissis, trifariam.

Qualis

		A 100	
B 12.	C 6.	D 2	
		E 20	
E 20.	B 12.	A 100. ?	F 60.
E 20.	C 6.	A 100 ?	G 30
E 20.	D 2.	A 100 ?	H 10
			L 100

Qualis est numerus B 12 qui duplus est numeri C 6: hic verò triplus numeri D 2; aptè assumitur quasi futurus esset prima partium trium. Hoc ergo primo ad arbitrium statuto numero B 12. Sequitur.

Præceptum 2. *Hunc perpende.* Hunc numerum B 12 examina, tracta, versa iuxta tenorem, & exigentiam quæstionis propositæ; huiusmodi initâ ratiocinatione. Cum pars maxima debeat esse dupla secundæ; cum in illam assumptus sit numerus B 12; erit secunda C 6. Ergo etiam cùm secunda C 6 tripla debeat esse tertiæ: tertia futura est D 2. Tum: cum tres illæ partes datam seruantes rationem; si illæ ipsæ sunt, quæ exiguntur; numerum 100 simul additæ debeant efficere. An ita reuerà se res habeat perpendendum est. Adde igitur tres numeros B, C, D, vt fiat numerus E 20: qui longè diuersus est à dato numero A 100. Ergo falsus est numerus B 12 primò positus, quasi prima partium trium futura esset numeri A 100.

Præceptum 3. *Dabit numeros proportio veros.* Id est. Si per regulam proportionum, toti numero E 20, eiusque parti B 12 maximæ, & diuidendo dato numero A 100, quartus numerus proportionalis F 60 inueniatur: is erit prima quæsitarum partium numeri A diuidendi. Non secùs reperietur secunda: si nimirum fiat, vt totus E 20 ad partem sui secundam C 6; ita totus A ad sui partem G 30. Eodem modo pars tertia H 10 habebitur inuento tribus numeris E, D, A quarto proportionali H. Qui iidem numeri F, G, H viâ breuiori reperiri possent vno eorum aliquo per regulam proportionis traditâ methodo inuestigato, ex quo reliqui definirentur, vt inuenta parte F trium maximâ, reperietur secunda G, quæ primæ est semissis: & ex secunda G colligetur tertia H; quæ illius tertia pars est. Verùm prior ratio, etsi prolixior; vniuersalior tamen est; & ad demonstrationem accommodatior: quam mox adducam: si prius monuero operationem absolutam facilè examinari posse: si tres partes inuentæ simul addantur: debent enim (alias erratum foret) simul additæ conflare datum diuidendum numerum A, vt hic contingit: ex partibus enim F, G, H additis nascitur L æqualis diuidendo numero A 100.

Demonstratio.

Demonstratio in exemplo proximè tradito clara quidem est: vt enim totus numerus E 20 ad sui partes B, C, D: ita totus A ad sui partes singulas singulis illarum proportionales; & ita etiam singulæ ipsæ partes ad singulas, vt totum ad totum. Quod in aliis licet diuersissimis exemplis etiam locum habet. Semper enim numeri proportionales ignoti, notis positis inuestigantur: dum iuxta Præc. 2. Quæstionis tenor obseruatur in omnibus circa falsum numerum positum: qui in veri partibus homologis obseruari debet. Quare ex falso ad arbitrium assumpto &c. Quod erat faciendum.

Scholium.

Vnum aut alterum ad hanc regulam magis illustrandam adduco paradigma. Est qui pecuniæ suæ partem dimidiam ludo consumpsit, quartam egenis erogauit. Quæ ipsi reliqua est, sunt nummi 10. Quæritur quot nummos ante erogationem habuisset? Elige numerum, qui & dimidiam, & quartam partem sine fractione contineat: qualis est numerus A 12: cuius semissis est B 6, pars quarta est C 3: his partibus, id est numero D 9 subducto à numero A 12, reliquus, fit numerus E 3: debuit autem reliquus fieri F 10. falsus ergo positus est numerus A 12; cum minimè quæstioni satisfaciat. Ex eo tamen verus eruetur ope regulæ proportionum. Si nimirum fiat, vt reliquus ille E 3, ad numerum A 12 suppositum, à quo profectus est: ita F 10, qui reliquus esse debet, ad alium, nempe ad G 40. Erit ergo numerus hic G 40, nummorum numerus, quos initio habebat ille: qui partem dimidiam, hoc est, nummos 20 ludo amisit: partem quartam, hoc est, nummos 10 egenis erogauit: eique reliqui fiunt nummi 10.

A 12
B 6 } D 9
C 3 }
E 3
E 3. A 12. F 10? G 40.

At si ita quæstio proponeretur. Pecuniæ quidam suæ semissem ludo amisit. Tum eius pecuniæ, quæ post factam ludo iacturam illi superfuit (non autem totius prioris pecuniæ, vt fert quæstio proxima) partem quartam largitus est egenis; reliquos autem habet nummos 10. Quot ergo nummos habuerat initio? suppone habuisse nummos A 8 (qui numerus eo nomine aptè

aptè eligitur, quod dimidia & quarta parte constet) eius dimidia pars est B 4 ex qua demenda est quarta pars nempe C 1. Hac autem subductione factâ remanet numerus D 3. Atque ita si non numerus 10 nummorum, sed numerus 3 reliquus supponeretur post pecuniæ semissem ludo amissam, & reliquæ summæ partem quartam egenis distributam: soluta foret quæstio. Habuisset enim nummos A 8. At quia non nummi 3, sed 10 supersunt. Dices iuxta regulam. D 3 à numero A 8 colligitur; vnde numerus F 10 colligetur? colligi inuenies à numero G, vt refert schema.

A 8. B 4. C 1 D 3

D 3. A 8. F 10 ? G $26\frac{2}{3}$

H $13\frac{1}{3}$ L $3\frac{1}{3}$ F 10

Quod patet. Nam eius pars dimidia est H: huius autem pars quarta est L (vt constabit ritè initis operationibus circa fractos, qui hic occurrunt, necessariis) quâ subducta à numero H, superest reliquus nummorum numerus F 10, vt exigit suppositio. Huic autem solutioni, sicut & reliquis omnibus ope huius problematis assequendis allata superiùs demonstratio, vt constat, ritè conuenit, vt frustrà circa singula paradigmata repetatur. Sed nunc satis de simplici falsa hypothesi, vt ad duplicem accedamus; vt non paulò amplioris, quam hæc sit, vsus; ita non paulò maioris difficultatis, & obscuritatis.

PROP. L. *Probl.*

Ex duobus suppositis falsis numeris quæsitum verum numerum definire.

Expositio.

Problema hoc, etsi cum antecedente idem esse videatur; longè tamen ab eo diuersum est. Nam præter quàm quod quæstiones omnes, quarum solutionem potest illud exhibere, exhibere & istud potest; infinitas, præcipuæque difficultatis. Quibus soluendis par illud non est; soluendas sibi istud assumit: vix vt vllum ænigma proponatur; quod huius ope regulæ

gulæ expediri non poſſit, eóque nomine cum inſigni illo algebræ artificio de amplitudine ſin minùs de operationum breuitate, facilitate, ac præſtantia, contendere videatur. Hanc ergo eiúſque præcepta vt exponam planiſſimè, exemplum adduco illud ipſum: quod antecedente propoſitione allatum, & ſolutum fuit. Quod erat huiuſmodi. Diuidendus erat numerus 100 in tres partes: quarum prima foret dupla ſecundæ; ſecunda verò tripla tertiæ. Hæc diuiſio regulæ huius ope abſoluetur obſeruatis ſequentibus præceptis, quæ hiſce paucis carminibus complector omnia; ac demùm expono.

Conſtructio.

Quæſitum, fingas numeros quos videris aptos
Diſcute. Et errores ſubſcribito: plúſque minúſque
In fictos error numeros alternus agatur.
Hinc genitus minor à maiore recedat: Vtrimque
Si fuerit plus, ſiue minus. Secet inde relictum
Errorum diſcrimen: erit problema ſolutum.
At plus atque minus ſimul; ex erroribus ortos,
Erroréſque iubent addi; genitóque ſecari
Illum. Námque quoto ſoluetur quæſtio facto

Præceptum 1. *Quæſitum, fingas numeros, quos videris aptos.* Elige ſcilicet numeros duos pro duplici poſitione, qui ad operationem planiores, & expeditiores tibi videbuntur, velut in antecedenti propoſitione præceptum eſt. Vt hìc, aſſume numerum B 12 in prima hypotheſi; in ſecunda verò numerum C 24: qui fingantur fore prima diuidendi numeri A pars.

Præceptum 2. *Diſcute.* Examina iuxta quæſtionis tenorem, an numeri poſiti B, & C quæſtioni ſint ſatisfacturi: vt, quia prima illa pars B 12 debet eſſe dupla ſecundæ: ſecunda erit D 6; & quia hæc tripla debet eſſe tertiæ; tertia erit E 2. Hæ partes ſimul addantur: fiet H 20; ita vt ſi numerus H 20 diuidendus foret iuxta quæſtionem; partes quæſitæ forent B, D,

D, E. Eodem modo *discute* secundam hypothesim C 24; erit F 12 secun-

	A 100				
B 12	C 24	B 12	C 24	B 12	C 66
D 6	F 12	M X M		M X P	
E 2	G 4	M 80	N 60	M 80	N 10
H 20	K 40	L 20		L 90	
M 80	N 60	P 1920	Q 720	P 5280	Q 120
		R 1200		R 5400	
			V 60		V 60
		L 20		L 90	

da pars, tertia verò G 4: quæ partes omnes additæ efficiunt K 40. Erratum ergo est in vtraque positione: tam enim partes B, D, E prioris positionis quàm partes C, F, G posterioris, additæ datum numerum A minimè producunt. Vt verò, quantùm in vtraque erratum sit, dignoscatur, ex numero A 100 demendus est; tam numerus H 20; quàm numerus K 40: reliqui enim numeri M 80, & N 60, errores sunt à vero numero A ex falsis suppositionibus B & C geniti. Quibus erroribus ita vtere.

Præceptum 3. *Errores subscribito, plúsque minúsque.* Errores M & N proximè inuentos suæ quemque positioni B & C subscribe, vt refert altera pars schematis. *Plúsque minúsque.* Appone scilicet characteres P, vel M, ad errores ipsos: quibus significetur erratum esse per excessum (quem litera P indicabit) vel per defectum literâ M designatum. Aptè porrò characteres illi stabunt; si medij inter positiones, & errores inter decussis crura statuantur, vt hic cernere est.

Præceptum 4. *In fictos error numeros alternus agatur.* Multiplica scilicet numeros fictos, siue primò positos B & C, in errores alternos, siue decussatim statutos M & N; ita vt B ducatur in N; & C in M: illic fiet Q 720, hic fiet P 1920, vterque suo loco in schemate designatus, ipsum attende

Præceptum 5. *Hinc genitus minor à maiore recedat, vtrimque si fuerit plus, siue minus.* E duobus numeris per decussatam proximè initam multiplicationem genitis, qui minor fuerit; demi debet à maiore; si tamen *vtrimque* id est, in vtraque positione *fuerit plus*, aut in vtraque *minus* (quando

enim in vna *plus*, & in altera *minus* reperitur, diuersa est ratio; de qua paulò post dicetur) demi igitur debet hîc, vbi per defectum in vtraque positione erratum est, numerus minor Q 720 à maiore P 1920: & reliquus fiet R 1200.

Præceptum 6. *Secet inde relictum, errorum discrimen* relictus scilicet numerus R 1200 per subtractionem numeri Q à numero P, diuidatur per differentiam errorum M & N; quæ differentia est L 20 (hic enim numerus dempto errore N ab errore M relinquitur) Quotiens enim illius diuisionis; qui est V 60, est numerus, qui quæritur: est scilicet numerus verus: cuius loco assumpti fuerunt falsi siue ficti numeri tam B, quàm C. Atque ita in hoc casu problema solutum est: cum scilicet in vtraque positione per excessum, vel per defectum erratum est.

Præceptum 7. *At plus atque minus simul, ex erroribus ortos; errorésque iubent addi &c.* Si in vna positione per excessum, in altera per defectum erratum est, vt in schemate cernitur; addi debent duo numeri P & Q, qui ex multiplicatione decussata positionum B, N, & C, M, orti sunt, vt fiat R: oportet etiam errores ipsos M, & N addi, *genitóque L* per hanc additionem, *secari illum*, illum scilicet numerum R, qui ex additione numerorum P & Q factus est; oportet secari, siue diuidi: vt tandem colligatur quæsitus numerus V 60. Qui quæstioni satisfaciat. Erit enim hic numerus V prima pars numeri diuidendi A 100: quæ secundæ debet esse dupla. Ergo secunda erit 30. Tertia autem erit 10: cum illius tripla debeat esse secunda. Hi autem numeri tres 60, 30, 10, simul additi producunt, vt par est, diuidendum numerum A 100 datum.

Atque hæc est methodus, quæ ad obscuriores quasque quæstiones enodandas iuxta earum tenorem vsurpari debet. Quamuis enim aliæ quædam rationes ab hac diuersæ videantur: huic tamen nituntur, & ex ea deducuntur, vt ex demonstratione manifestum fiet: quam propterea prius affero, quàm eas adduco. Ad demonstrationem autem necessaria est hæc præparatio.

Præparatio remota.

Vt inter simplicis, communísque Arithmeticæ (algebram enim exceptam volo; cui de præstantiâ omnes logistices regulæ concedunt) regulas, hæc falsæ positionis duplicis primas sibi vendicat: ita non mirum, si quibus nitatur fundamentis, paulò sit difficilius primâ fronte assequi: Assequeris tamen non ægrè, si hæc; quæ suppono, probóque quasi lemmata, attentè perpendas.

Primum est. Si tres numeri (trium tantùm facio mentionem, etsi plurium eadem sit ratio: quia tribus tantùm hîc mihi opus est) tribus aliis proportionales

proportionales fuerint, quacunque seruata ratione: erunt trium priorum differentiæ, trium posteriorum differentiis proportionales. Id licet non obscurum, probo. Sint tres numeri A, B, C, tribus aliis D, E, F in quacumque ratione proportionales. Sint autem G & H differentiæ numerorum A, B, & B, C; & k, L, differentiæ numerorum D, E; & E F. Dico numeros G; H; numeris K, L esse proportionales, cum enim sit vt A ad B; ita D ad E. Permutando. Ita est A totus numerus ad totum numerum D; ita ablatus B ex numero A, ad ablatum E ex numero D per Prop. 19. lib. 5. Elem. Ergo & reliquus G, siue differentia numerorum A, B, ad reliquum K, siue differentiam numerorum D, E; sicut totus A ad totum D; siue etiam, vt ablatus B ad ablatum E per Propos. citatam. Rursùs cum sit B ad C, vt E ad F ex hypothesi; erit eodem modo H differentia numerorum B, C, ad L differentiam numerorum E, F; vt totus B ad totum E hoc est, vt proximè est ostensum, vt G ad K. Ergo permutando. Ita erit G ad H, vt K ad L. Quod declarandum erat.

A 6.	B 4.	C 3.	G 2.	H 1
D 12.	E 8.	F 6.	K 4.	L 2.

Secundum, quod supponi, atque adeò probari priùs debet, est, in hac regula duplicis falsæ positionis ita se habere differentias duas duarum positionum fictarum; quibus à vero numero differunt hæ positiones; vt se habent errores ex fictis illis positionibus procreati: qui errores sunt differentiæ duorum numerorum ex fictis positionibus ortorum, quibus à dato numero discrepant. Vt in superiori paradigmate hic repetito, duo numeri M 80, & N 60 (qui sunt differentiæ, quibus à dato numero A 100 dissident numeri X 20, & Y 40; siue errores à duabus positionibus falsis B & C profecti) ita se habent inter se, vt se habent numeri T, Z; siue errores positionum B & C; quibus à vero quæsito numero V 60 discrepant. Quod quidem in hoc dato exemplo singulari promptum foret demonstrare. Verùm præstat vniuersali probatione, quod supponendum monui, confirmare: vt, quam præcipit hæc regula, operandi ratio, quouis in casu vera, & indubitata agnoscatur. Quod ita planissimè conficio.

	V 60	
B 12		C 24
T 48		Z 36
	A 100	
X 20		Y 40
M 80		N 60

Quæstio quælibet huius ope regulæ soluenda, vel solam numerorum additionem aut subtractionem exigit: vel solam multiplicationem, aut diuisionem: vel denique additio aut subtractio cum multiplicatione aut diuisione adhiberi debet. Neque potest alia per numeros iniri operatio: quæ hisce quatuor simplicibus numerorum operationibus non absoluatur. Sed in omnibus euidens est positionum errores, proportionales esse.

erroribus operationum. Quod expono variis casuum singulorum appositis exemplis.

Ac primò quidem, quæratur numerus ad quem additus numerus 4, & ad factum, numerus 10, producatur 20. Dices problema hoc tantæ non esse difficultatis; vt ad eius solutionem ad regulam falsi recurrendum sit. Quis enim, si numericos characteres nouit, non statim videat numerum quæsitum 6 productum iri: si à dato numero 20 dematur tùm 4, tum 10? fateor. Verumtamen mirabere eundem numerum 6 ope huius regulæ ex datis præceptis initæ obtineri; nec immeritò à me proponi censebis exemplum huiusmodi; qui regulæ huius omnium obscurissimæ demonstrationem præparo apertissimam. Age itaque prior hypothesis sit 2. Adde iuxta quæstionis tenorem, tum 4, tum 10. his additis numeris 2,4,10 gignitur 16. Errasti in positione: debuit enim gigni datus numerus 20: hic autem operationis error, est 4: quem subscribe. Tum secundam positionem statue 5, eámque iuxta quæstionem promoue: gignetur 19 ex additione numerorum 5, 4, 10. Errasti ergo secundò, & quidem vnitate: quam subscribes. Tum regulæ operationes reliquas, prosequeris. Duces scilicet decussatim positionem 2 in errorem oppositum 1, vt fiat 2. Similiter positionem 5, in errorem 4. vt fiat 20. Demes ex producto maiore 20 minorem 2: relinquetur 18, qui numerus diuidi debet per 3: qui relinquitur subducto minore errore 1 à maiore 4 hac demùm peractâ diuisione gignitur numerus quæsitus 6.

positiones		
6	2	5
4	4	4
10	10	10
20	16	19
error.	4	1
	20	2
	18	
	3	(6

Quod ergo hic, vbi simplices additiones adhiberi iubet quæstionis sententia, ostendendum proposui, est, differentiam 4 positionis 2 à vero numero quæsito 6; ita se habere ad differentiam 1 secundæ positionis 5. Quemadmodum se habet error 4 à positione 2 oriundus, ad errorem 1 à positione secundâ 5 profectum. Quod sanè euidentissimum est. Si enim tribus numeris inæqualibus 6, 2, 5 eosdem numeros 4 & 10 (siue 14) addideris; inæquales fient numeri 20,16,19: quorum differentiæ futuræ sunt illæ ipsæ; quæ inter priores numeros 6,2,5 intercedunt. Non poterunt ergo non ita se habere duæ positionum 2 & 5 differentiæ 4 & 1 à vero numero quæsito 6; vt se habent errorum 16 & 19, differentiæ 4 & 1 à numero dato 20; in ratione scilicet æqualitatis. Quæ ratiocinatio vim suam obtinet, siue per excessum erretur, siue per defectum, vt in hoc exemplo contingit, in vtraque positione.

Nec aliter se res habet, cum in vna positione erratur per excessum, in altera per defectum. Quod paucis, vt ad exponenda viam sternam, attingo. Seruatâ eiusdem exempli suppositione; loco positionis 2 substitue, 8 de industriâ iusto maiorem. Tum quæstionem prosequere iuxta præceptum 7. productos scilicet 10 & 8 per decussatam positionum 8 & 5, & errorum 2 & 1 multiplicationem, simul adde, vt fiat 18. qui diuidatur per 3 ex erroribus 2 & 1 additis genitum; vt fiat vera positio 6. Constat autem duas differentias 2 & 1 inter 8 & 6 & 6 ad 5, æquales esse erroribus 2 & 1. Ergo errores etiam in hoc casu, differentiis positionum sunt proportionales.

	positiones	
6	8	5
10	10	10
4	4	4
20	22	19
	errores 2	1
	10	8
		18
		3 (6

Quod si quæstio per varias subtractiones simplices, aut subtractiones additionibus permixtis soluenda veniat; non alia futura est ratio, quæcunque positiones iusto siue maiores, siue minores, aut maior vna, & minor altera, assumantur: semper enim ostendentur positionum à vero numero differentiæ æquales differentiis errorum à numero dato, vt proximè ostensum est; cum solas additiones quæstio exigit. Quod si differentiæ probentur æquales, æquales etiam constat esse earum rationes.

Secundò. Quæri potest ignotus numerus per solam multiplicationem, aut diuisionem. Quibus etiam in casibus differentiæ fictarum positionum proportionales sunt differentiis errorum ex illis positionibus ortorum. Quod ostendo exemplo huiusmodi proposito; etsi aliunde facilè soluatur, vt quod intendo, clarius euadat. Quæratur numerus qui multiplicatus per 4 producat 20 (diuiso 20 per 4 gigneretur 5, qui id præstaret) sed ope huius regulæ inuestigetur. Prima positio ficta esto 6. hic numerus 6 ductus in 4, generat 24; debet autem generare 20: erratum ergo est; subscribatur error 4. Sit deinde altera positio 8; quæ multiplicata per 4 generat 32 maiorem item quàm datus numerus 20, excessu 12; qui subscribatur. Ostendi debet error 4 ad errorem 12 ita se habere; vt se habet differentia positionis 6 à vero numero 5 (quæ est 1) ad differentiam 3 positionis alterius 8 ab eodem numero vero 5. Quod ita colligitur. Dum numerus A 4 multiplicat 6 censendus est multiplicare differentiam 1, & numerum 5 duósque numeros 4 & 20 producere; qui per Prop. 1. lib. 2. Elem. simul sumpti æquales sunt genito numero 24; quem generat numerus A 4 in totum numerum 6. Similiter idem numerus A 4 ductus in numerum in-

	1 - 5	3 - 5
5	6	8
4	A 4.	A 4.
20	24	32
err.	4	12

ſectum 8, generat numerum 32: cui æquales ſunt duo numeri 12 & 20 quos gignit numerus A 4 ductus in 3, & in 5; in quos diuidi cenſeri debet numerus 8. Cum ergo numerus 4 ductus in duas poſitionum 6 & 8 differentias 1 & 3 à vero numero 5, producat numeros 4 & 12, erunt 4 & 12 multiplicatis numeris 1 & 3 per Prop. 17. lib. 7. Elem. proportionales. Numeri autem 4 & 12 ſunt errores à dato numero 20, (nam dum 4 multiplicat partes alteras 5, & 5 numerorum 6, & 8: quæ ſunt ipſi vero numero 5 æquales; æquales erunt tres producti numeri 20, 20, 20 inter ſe: ac proinde numeri 4 & 12 erunt à numero dato 20 differentiæ, ſiue errores) conſtat ergo errores 4 & 12 differentiis poſitionum 6 & 8 à vero numero 5, qui quæritur, proportionales eſſe quæ demonſtratio propoſitum colligit, quotquot multiplicationes per quoſvis numeros iniri poſſunt.

Nec aliter ratiocinandum erit; cum non multiplicatio ſed diuiſio, ſiue vna, ſiue multiplex ineunda eſt; cum diuiſio, non ſecùs ac multiplicatio, duorum numerorum per quempiam numerum, numeros producat diuiſis numeris proportionales, vt lib. 2. Prop. 4. oſtendi. Imò nec etiam quando multiplicatio & diuiſio ſimul ineundæ erunt; diuerſa futura eſt argumentatio.

Tertiò. Quæſtio proponi poteſt huiuſmodi; vt, & additio, aut ſubtractio; & ſimul multiplicatio; aut diuiſio, ſint adhibendæ ad ſolutionem conſequendam. Qui caſus vltimus eſt omnium hoc in problemate occurrentium. Dico ergo etiam in hoc caſu errores poſitionum, erroribus operationum, ſiue ratiocinationum ad ſolutionem adhibitarum eſſe proportionales. Quod propoſito huiuſmodi exemplo declaro.

Quæritur numerus, qui per 3 multiplicatus, & ad productum addito

	2	1
A 3 - 4	A 3 - 2	A 3 - 5
12	6	15
B 6	B 6	B 6
2 - 18	2 - 12	2 - 21
36	24	42
	12	6

numero 6: genitóque rurſùs multiplicato per 2, producat 36. Quæſitus ille numerus eſt quidem 4. Nam 4 multiplicatus per 3, gignitur 12: cui ſi addatur 6, fit 18: qui demùm ductus in 2 producit 36, vt hoc refert ſchema. Ita verò numerus ille 4. quæreretur iuxta regulæ huius præcepta. Statueretur prima poſitio 2: ex qua iuxta quæſtionis tenorem examinatâ oriretur 24 loco numeri dati 36: ita vt error ſit 12. Tum poſitio altera foret, verbi gratiâ, 5: ex qua erueretur numerus 42; cum tamen erui deberet 36: error ergo erit 6. Dico errorem priorem 12 ad ſecundum hunc errorem 6 ita ſe habere; vt ſe habet error prioris poſitionis 2 (qui error eſt 2: poſitio enim hæc 2 à vero

numero

numero 4 deficit numero 2) ad errorem 1 poſitionis ſecundæ 5 (hæc enim excedit verum numerum 4 vnitate) probatur. Dum numerus A 3 multiplicat tres numeros 4, verum numerum; & 2 poſitionem priorem, & 5 poſteriorem, & generat 12, 6, 15: in eadem erunt ratione hi tres numeri, in qua ſunt numeri multiplicati 4, 2, 5 per Prop. 17. lib. 7. Elem. Ergo differentiæ, qua 6 & 15 diſcrepant à numero 12 proportionales ſunt duabus differentiis 2 & 1; quibus differunt poſitiones 2 & 5 à numero 4 iuxta primo loco demonſtrata in hac præparatione: vel etiam per ea, quæ, num. 2. antecedenre oſtenſa ſunt. Deinde cum tribus numeris, 12, 6, 15 idem numerus B 6 additur; vt fiant numeri tres 18, 12, 21: eadem remanet differentia; quæ inter numeros 12, 6, 15: ad quos acceſſit idem numerus 6, intercedebat: patet per ſe, & ex num. 1. atque adeò differentiæ 6, 3, quibus numeri 12 & 21 diſſident à numero 18 proportionales ſunt differẽtiis 2 & 1, poſitionum 2 & 5, à numero 4. Denique quia tres numeri 18, 12, 21 multiplicantur per eundẽ numerum 2, & producuntur tres numeri 36, 24, 42 per Prop. 17. lib. 7. Elem. tribus multiplicatis 18, 12, 21, proportionales; proportionales erunt differentiæ, quibus duo numeri 24 & 42 diſcrepant à numero 36 differentiis 6 & 3 duorum numerorum 12 & 21 à numero 18 per ea, quæ initio probata ſunt. Sed differentiæ 6 & 3 ſunt poſitionum differentiis 2 & 1 à vero numero 4, proportionales, vt oſtenſum eſt; ergo etiam eiſdem differentiis 2 & 1 poſitionum 2 & 5 à vero numero 4, proportionales erunt differentiæ 12 & 6; numerorum 24 & 42 à numero dato 36 (quæ differentiæ ſunt errores operationis) ergo etiam in hoc caſu; in quo multiplicationes & additiones quorumdam numerorum ex tenore quæſtionis adhiberi iubentur, verum eſt errores operationis, poſitionis erroribus eſſe proportionales. Nec alia foret probatio ſi, vel ſubtractiones, vel diuiſiones variæ ad ſolutionem eſſent adhibendæ.

	2	1
A 3 - 4	A 3 -- 2	A 3 -- 5
12	6	15
B 6	B 6	B 6
2 - 18	2 .- 12	2 -- 21
36	24	42
	12	6

Vt ergo hanc totam ratiocinationem, quam fuſiùs maioris lucis gratiâ, proſecutus ſum, nunc paucis colligam. Patet ex dictis nullam numerorum quorumcunque additionem vel ſubtractionem; quam fieri exigat propoſita quæſtio, rationem immutare differentiarum, quæ inter verum numerum, & fictas duas poſitiones, ſiue per exceſſum, ſiue per defectum, intercedunt: vt oſtenditur num. 1. patet etiam ex num. 2. eandem rationem differentiarum, quibus poſitiones à vero numero diſcrepant,

nec

nec multiplicatione mutationem pati, nec diuisione;ergo nullam aliquando. Omnes enim numerorum operationes non nisi addendo, vel subtrahendo perfici necesse est, quo nomine multiplicatio & diuisio (quæ compendiariæ quædam sunt additiones & subtractiones) censeri debenr. His positis, Plana futura est traditæ methodi operandi demonstratio. Sed vnum addo vsui postmodum futurum. Nempe si duo numeri æquales A, B in duas partes inæquales vtramque vtrique diuidantur, ille in partes C, D, hic in E, F: reciproco excessu sese superabunt binæ & binæ ad diuersos numeros pertinentes, vt E superat C binario: quo reciprocè D superat F: vel C superat F, quaternario; quo vicissim E excedit D. Dematur enim à numero E binarius: vt restet numerus 6, numero C 6 æquali: tunc numerus ille 6, vnà cum numero F 2 deficiet binario à numero 10, siue à duobus numeris C & D simul sumptis. Cum ergo duo 6, & C 6 sint æquales, restat vt D superet F illo binario: qui est excessus partis E supra partem C. Eodem argumento idem probabitur, si alia partium combinatio assumatur.

A 10.	C 6.	D 4
B 10.	E 8.	F 2

Conuersum etiam verum erit. Nimirum si pars E 8 eodem excessus superet C 6; quo vicissim D 4 superat F 2: additæ partes E, F eundem numerum conflabunt, quem duæ C & D. Si enim à numero E dematur excessus, quo superat C, vt reliquus ex E sit æqualis numero C 6: erunt tunc duo numeri C, D maiores duobus numeris 6 & F 2, binario: quo D superat F. Ergo si binarius addatur ad F, vt fiat numerus 4, æqualis numero D; cum sint etiam æquales duo numeri 6 & C 6; ex duobus C, D fiet æqualis numerus ei, qui fit ex duobus 6 & 4 siue E 8 & F 2. Breuiùs. Transferatur binarius ex numero E in alteram partem F, binario minorem quàm D 4: tunc fient duæ partes 6 & 4, duabus C, D æquales. Ergo totum ex partibus conflatum, toti æquale erit. Quod erat probandum.

Præparatio proxima.

Præparatio hæc ad demonstratioñe proxima, in aptâ schematis numeros, necessarios & ad concipiendam facilè ratiocinationem alioqui satis intricatam aptè collocatos exhibentis constructione, tota versatur. Apta autem erit huiusmodi. Repetatur in primis constructio ad solutionem problematis superiùs allata. Sint nimirum fictæ positiones duæ B & C; erroresque à numero A, qui diuidendus proponitur, sint M & N. Qui decussatim multiplicati per positiones producunt numeros Q & P, qui ad positiones B & C hîc apponuntur. Dempto autem numero minore Q à maiore P, reliquus fit R: qui iubetur diuidi à numero L, differentiâ scilicet

	A 100.	V 60		
D 2880.	X 48	Z 36	E 2880	
Q 720.	B 12	C 24.	P 1920	
	M	X	M	
	M 80	N 60.	R 1200	
		L 20	L 20	V 60

licet errorum M & N: qua diuisione genitus est V: qui asseritur esse numerus, qui quæritur, prima scilicet pars quæsita diuidendi numeri A, pro qua suppositæ sunt duæ positiones B & C. Vt autem hæc assertio euidenter constet, hæc insuper ad schema addenda sunt. Ad positiones B & C adscribe excessus X, Z, quibus ipsas positiones superat numerus V, in hoc casu; in quo per defectum erratum esse supponitur. Multiplica denique decussatim hosce numeros X, Z, per errores M & N; genitósque D & E ipsis adscribe numeris X, Z. Ita se habet schema.

Demonstratio primi casûs in quo per defectum erratur in vtraque positione.

Demonstrandum itaque hîc est numerum V iuxta initam ex traditis præceptis constructionem, esse quæsitum numerum; primam scilicet partem numeri diuidendi A: quæ datam seruet determinationem tùm quoad se, tùm quoad reliquas duas partes insequentes, vt scilicet ipsa sit dupla secundæ, hæc autem tertiæ tripla. Quod porrò demonstratum fuerit; si duo numeri X & Z, quibus discrepant duæ positiones B & C à numero V ex constructione præparationis, ostendantur proportionales duobus erroribus M & N à numero dato A. Sic enim tum constabit numerum V veram esse positionem, quæ loco fictarum B & C, ex quibus sequuntur defectus M, N à vero numero A dato, quæstioni satisfaciat. Id autem sic stabilio.

Tam duo numeri X, B; quàm duo Z, C, ambo simul sunt æquales numero V ex præparatione proximâ: quâ numerus X est excessus numeri V supra B, & Z excessus eiusdem numeri V supra C. Ergo dum per decussatam multiplicationem, N ducitur in X, & B, & M, in Z & C; duci censeri debent N & M in numerum V; vel contrà, numerus V duci in N & M: quo fit, vt qui per hanc duplicem multiplicationem numeri V in

numeros M & N producuntur numeri, sint per Propos. 17. lib. 7. Elem. proportionales duobus numeris M & N. Sed per Prop. 1. lib. 2. Elem. duo numeri D, Q, qui ex N in duas numeri V partes X & B ducto generantur, æquales simul sunt producto numero, ex N in insectum V ducto: & similiter, duo E & P æquales simul sumpti numero, qui ex M in eumdem V insectum ducto producitur. Ergo duo simul D & Q, ad duos simul E & F, ita se habent vt N & M. Ergo quia M maior est quàm N (natus enim est M ex positione B minore quàm C, ex qua nascitur N: ac proinde, cum ambæ sint verâ positione minores: maior est error M ex B, secutus, quàm N profectus ex C) maiores etiam erunt duo simul E, P quàm duo simul D, Q per Propos. 14. lib. 5. Elem. Demantur ergo D, Q simul, à duobus simul E, P, & reliquus sit R quicunque (incertus enim adhuc est, & certus pro incerto supponi censendus est) dematur etiam N ex M, vt habeatur reliquus L. Ergo cum sit, vt totum (numeri E, P) ad totum numerum M (est enim, vt E, P, duo ad duos D, Q, ita M ad N: & permutando E, P ad M, vt D, Q ad N) ita ablatum D, Q, ad ablatum N: ita erit reliquum R, ad reliquum L, vt totum E P ad totum M. Hic tantisper respiremus, tum prosequor.

	A 100.	V 60.		
D 2880.	X 48	Z 36	E 2880	
Q 720.	B 12	C 24.	P 1920	
	M	X	M	
	M 80	N 60.	R 1200	
		L 20	L 20	V 60

Sed M metitur duos simul E, P per numerum V: duos enim E, P generauit, dum duos Z, C multiplicauit æquales simul numero V ex præparatione proxima: Ergo etiam L metietur numerum R per numerum V. Sed numerus L ex data solutione problematis metitur per numerum V, numerum illum R: qui reliquus erat dempto numero Q (quem positio B in errorem N decussatim ducta genuerat) ex numero P genito ex positione altera C decussatim in alterum errorem M ductâ. Ergo numerus hic R reliquus factus demptis duobus numeris simul D, Q ex duobus E, P simul; æqualis est illi numero R: qui reliquus erat dempto numero Q ex numero P. Hinc apertè sequitur (qui totius ratiocinij huius cardo est) numerum D esse æqualem numero E. Si enim duobus numeris D & Q demptis à numeris duobus E & P simul, idem numerus R reliquus fiat; qui

qui relinquitur solo numero Q à numero solo P: necessariò numerus D æqualis est numero E, vt ille ex hoc subductus eundem exhauriat. Sed numerus D productus est ex multiplicatione numeri X per numerum N iuxta præparationem, & per eandem, numerus E genitus est ex M ducto in Z. Ergo per Prop. 19. lib. 7. Elem. proportionales sunt X, Z, & M, N: cum æqualis numerus fiat ex primo X in quartum N ducto, qui fit ex secundo Z ducto in tertium M.

Ex his certum iam fit illud; quod in superiori remotâ præparatione conclusum est. Nempe, errores positionum proportionales semper esse erroribus ex operatione, siue quæstionis iuxta eius tenorem prosecutione consecutis. Cum autem hi duo numeri X, Z additi, ille ad positionem B, hic ad positionem C, numerum V conflent: erunt hi duo numeri X, Z duabus positionibus B, C Arithmeticè proportionales id est, numerus X numerum Z eodem excessu superabit: quo numerus C superat numerum B. Iuxta probata ad calcem præparationis prioris. Quo posito euidenter colligo; quod hic probandum est. Nimirum, numerum V; qui iuxta constructionem genitus est diuiso numero R (reliquo per subtractionem numeri Q à numero P) per numerum reliquum per subtractionem numeri N à numero M: illum ipsum esse qui quæritur; esse scilicet primam partem dati numeri A diuidendi: nec alium præter V quæstioni posse satisfacere. Quod ex eo concluditur, quod nullus numerus, præter hunc vnicum V, potest ex singulis positionibus B, & C, ad duos alios numeros proportionales erroribus operationis M & N additis conflari: quod necessarium foret ad hoc vt errores censerentur positionum B & C. Siue enim dicatur numerus quispiam maior, aut minor quàm V quæstioni satisfacere: debet is coalescere, tam ex positione B, quàm ex positione C additis sigillatim ad numeros duos singulos; qui sint proportionales erroribus operationis M, N per prænotata in præparatione: atque adeò proportionales duobus, X, Z; eisdem M, N ostensis proportionalibus. Si ergo numerus ille quæstioni satisfacturus, dicatur maior quàm V: vt ipse confletur tam ex positione B, quàm ex positione C additis ad duos numeros, numeris X & Z proportionales: eos singulos maiores esse necessarium est, quàm sint singuli X & Z. At si maiores sint singuli quam X & Z; cum his sint proportionales; maior etiam erit eorum differentia; quàm sit differentia numerorum X & Z: Ergo etiam maior quam sit differentia positionum B & C. Ergo cum iisdem singulis positionibus B & C numeri illi singuli additi, maior cum minore; minor cum maiore, vt addi pat est (& vt adduntur X cum B, & Z cum C) numeros æquales non efficient. Non ergo dari potest numerus maior, quàm sit V repertus per constructionem; qui quæstioni satisfaciat: sed neque eodem minor datur propter eandem rationem. Ergo numerus V, qui habetur, dum numerus

Q ex positione B in errorem N ducussatim ductâ genitus subtrahitur ex numero P; quem genuit decussata item multiplicatio positionis C, & erroris M ex altera positione orti vt constructio problematis ex traditis præceptis inita & absoluta exigit; est verus numerus, qui inquirebatur. Quæ probatio, cum quovis casu proposito, eadem eodémque modo possit institui: patet rectè solutum esse problema in eo casu; in quo vtraque positio deficit à vero quæsito numero: cuius defectûs signum est, cum post expensam iuxta quæstionis tenorem positionem numerus dato numero minor reperitur.

Demonstratio casus secundi in quo per excessum erratur in vtraque positione.

Eadem quæstio soluenda proponatur: diuidendus scilicet sit numerus A 100 in tres partes: quarum prima sit dupla secundæ: secunda sit tripla

	A 100	V 60	
D 120.	X 6	Z 12	E 120
Q 1320	B 66	C 72	P 720
G 1200			H 600
K	P X P		
R 600	M 10	N 20	
L 10 | V 60	L 10		

tertiæ. Sit prima positio B: quâ iuxta quæstionem examinatâ deprehenditur positionem B esse iusto maiorem; ex quâ quippe oritur 110 (nam posita prima parte B 66; secunda illius semissis, est 33: tertia verò est 11, secundæ tertia pars: tres autem hæ partes simul additæ efficiunt 110) qui superat datum numerum A 100, excessu M 10. Suo igitur loco error hic suæ positioni B subscribatur cum charactere P apposito. Deinde sit secunda positio C: qua discussâ reperitur error N operationis: qui perinde suæ positioni C subscribitur charactere P insutus. Præcipit tum regula, vt decussatim positiones B & C in errores N & M, ducantur; vt fiant numeri Q & P. Tum iubetur, vt minor P dematur ex maiore Q, vt reliquus fiat R. Qui tandem diuidatur per L; qui dempto minore errore M ex maiore N reliquus fit. Nascetur enim numerus V: qui asseritur esse is, qui quæritur, prima scilicet partium trium; in quas diuidi proponitur numerus A. Quod eodem ferè modo ostendetur, quo præcedens casus demonstratus est.

Sumantur

Sumantur differentiæ X & Z : quibus positiones B & C differunt à numero V; suísque positionibus adscriptæ singulæ, in oppositos errores M & N, decussatim multiplicentur, vt fiant D & E: quibus demptis à numeris Q & P, reliqui fiant G & H. Cum ergo numerus M ducatur in duos numeros Z & C; duósque numeros E & P producat: sit autem Z excessus numeri C supra numerum V: erit numerus E excessus numeri P supra numerum, qui fit ex numero M in numerum V. Patet. Nam totus numerus C æqualis est duobus numeris V & Z. Ergo per Prop. 1. lib. 2. Elemen. numerus M multiplicans C, numerum producit P: qui æqualis est duobus numeris simul, qui fiunt ducto M in duos numeros V & Z. Quare si numerus E genitus ex M in Z ducto, dematur ex numero P: relinqui debet numerus H: qui producitur ex M in V. Similiter numerus G ostendetur produci ex numero N in numerum V. Vnde sequitur per prop. 17. lib. 7. elem. vt ita se habeat G, ad H, vt se habet N ad M: quandoquidem idem numerus V duos numeros N, M, multiplicans, ipsos G, H produxit. Dematur ergo H à numero G, vt jam demptus est numerus M ex numero N, & factus est reliquus L, ita erit totus G ad illum reliquum sui (vt k) post subtractionem numeri H; sicut est N ad L, & permutando, ita erit G ad N: vt reliquus ille K ad reliquum L: & inuertendo. Ita N ad G, vt L ad reliquum illum K. Cum ergo numerus N metiatur numerum G per numerum V (ostensum est enim numerum G ducto N in V generari) etiam numerus L, reliquum illum k metietur per numerum V: sed numerus L metitur numerum R per numerum eundem V. Ergo numerus K, qui relinquitur ex G, sublato H; æqualis est numero R; qui relictus est priùs dempto P ex numero Q. Hoc est, demptis duobus simul E, H (qui ostensi sunt æquales numero P) ex duobus D, G: numero Q pariter æqualibus. Quod cum ita sit: cum inquam, idem numerus R reliquus fiat; siue solus numerus H ex solo G dematur: siue duo H & E demantur ex duobus G, D: necessarium est duos numeros D & H æquales esse; vt hic ab illo demptus totum exhauriat, soláque inæqualitas sit penes numeros G & H.

Iam verò cum D genitus sit ex N in X ducto; numerus autem E ex M in Z: erunt per propos. 19. lib. 7. elem. numeri X, Z, & M, N proportionales. Quia verò iidem numeri X, Z; si demantur singuli à singulis suis positionibus B & C. Reliquum faciunt eundem numerum V: erunt ipsis positionibus B & C Arithmeticè proportionales. Id est eodem numero deficiet numeris X à numero Z: quo numerus B deficit à numero C.

Quæ cum ita sint: ostendetur numerus V solus quæstioni satisfacturus errorésque positionum B, C, alios non esse, quàm ipsos X & Z: qui sunt ipsarum positionum excessus supra numerum V. Quod concludetur

non ſecùs, quàm idem in ſuperiori caſu, vbi erratum fuerat per defe-ctum, concluſum eſt. Itaque duo numeri X, Z ſunt proportionales duo-

	A 100		V 60	
D 120.	X 6		Z 12	E 120
Q 1320	B 66		C 72	P 720
G 1200				H 600
K		P X P		
R 600	M 10		N 20	
L 10	V 60	L 10		

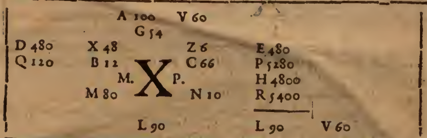
bus numeris M N: tales præterea ſunt, vt dempti à poſitionibus B & C eundem numerum V vtrimque relinquant. Aſſero igitur nullis aliis duobus numeris has facultates conuenire: vt ſcilicet proportionales ſint duobus erroribus M, N & à poſitionibus B & C, numeros æquales ſubducti relinquant. Nam ſi ſint proportionales duobus erroribus M, N: erunt etiam proportionales duobus numeris X, Z; quos numeris M, N proportionales oſtendi. Præterea, cum aſſerantur duos numeros æquales relinquere ex duabus poſitionibus B, C ab iis ſubducti: debebunt etiam eſſe duobus numeris B & C Arithmeticè proportionales. Id eſt. Eâdem differentiâ inter ſe diſcrepare; quâ inter ſe diſcrepant numeri B, C. Sed quæ differentia eſt numerorum B, C, eadem eſt ex conſtructione, numerorum X, Z, differentia. Ergo eadem eſſet numerorum illorum differentia, cum differentia numerorum X, Z. Sed ſi maiores, vel minores dicantur, quam numeri X, Z; cum his ſint proportionales oſtenſi maiorem, vel minorem differentiam debent habere, quam ſit differentia numerorum X, Z. Sunt enim differentiæ numerorum proportionalium, ipſis etiam numeris proportionales vt ex Prop. 19. lib. 5. elem. patet. Ergo eorum numerorum differentia eadem eſſet cum differentia numerorum X, Z, & non eadem. Quare nulli alij numeri, quam X, Z poſſunt eſſe erroribus M, N operationis, proportionales; & ex poſitionibus B, C, ſubducti numerum æqualem relinquere. Sunt ergo X, Z errores poſitionum B, C: & numerus V, verus eſt numerus, qui quæritur. Cum habeatur demptis erroribus X, Z ex falſis poſitionibus B, C. In hoc ergo caſu, in quo per exceſſum (quem ipſa operatio exhibet) errare contingit in vtraque poſitione, vt habeatur V verus numerus, rectè præcipitur, vt ex numero Q producto per decuſſatam multiplicationem numerorum B, N; dematur numerus P minor, qui genitus eſt ex decuſſata altera multiplicatione numerorum C, M: & reliquus factus R diuidatur

per

per numerum L, qui relinquitur dempto M à maiore numero N.

Demonstratio casus tertij in quo per excessum & per defectum simul erratur.

Quæstionis hactenùs assumptæ solutio iuxta præcepta habetur: cum in vna positione, vt in B, erratum esse deprehenditur per defectum; & in altera C per excessum: si numeri Q, P ex decussatis multiplicationibus numerorum B, N, & C, M geniti simul addantur, vt fiat R: qui diuidatur per L ex additis erroribus M, N collectum. Ex ea enim diuisione nasci asseritur verus numerus V quæsitus. Quod hîc demonstrari debet.



Demonstrabitur autem pari institutâ cum superioribus constructione huiusmodi. Ponatur X defectus positionis B à numero V: ponatur etiam Z excessus positionis C supra eundem numerum V. Vterque autem horum numerorum X, Z multiplicetur decussatim per errores M, N; vt habeantur numeri D & E. Ostendendum itaque est numerum V, eum verè esse, qui quæritur: esse nimirum primam partem numeri diuidendi A ex data determinatione: qua iubetur prima pars esse dupla secundæ, & hæc secunda, dupla, tertiæ. Ita ergo ratiocinabimur.

Numerus N duos numeros X & B simul æquales numero V multiplicans; duos numeros D & Q producit, æquales numero, qui fit ex eodem numero N ducto in insectum numerum V per prop. 1. lib. 2. elem. Numerus autem M ductus in duos numeros Z & C (quorum Z est excessus numeri C supra numerum V) duósque producens numeros E & P; eos in eadem ratione producit, quam habent multiplicati Z & C. per prop. 17. lib. 7. Elem. ergo si numerus E dematur à numero P, vt reliquus fiat H: erit numerus H, is qui producitur ex numero M in numerum V. Patet. Nam ex suppositione numerus Z est excessus numeri C supra numerum V. Quare, cum dempto Z ex numero C reliquus fiat numerus V: si numerus M ducatur in duos numeros V & Z, duos numeros produceret; qui simul æquales sunt per citatam propos. numero qui ex M in C

ducto

ducto generatur, hoc est, numero P; à quo si dematur numerus E ex M in Z ducto proueniens; numerus reliquus (qui est H) is est qui fit ex M in V ducto. His constitutis.

Cum M ductus in V producat H, & N ductus in duos X, B; qui ex constructione æquales sunt numero V; producat duos numeros D, Q: qui simul per Prop. 1. lib. 2. elem. æquales sunt numero, qui fieret ex

	A 100	V 60	
	G 54		
D 480	X 48	Z 6	E 480
Q 120	B 12	C 66	P 5280
			H 4800
	M. X P.		R 5400
	M 80	N 10	
	L 90		L 90 V 60

numero N in numerum V ducto: ita erit per prop. 17. lib. 7. elem. numerus H ad duos simul numeros D, Q; vt est M ad N. Et componendo. Ita erit H cum duobus D, Q simul: sicut M cum N simul, hoc est ex constructione, sicut L ad N: & permutando. Ita erit H cum duobus D, Q simul ad L: sicut D, Q simul ad N. Sed cum N ductus in duos X, B; qui simul sunt numero V æquales, producat numeros D, Q. Ipsos D, Q simul additos metietur per V. & per eundem V numerus L metietur H, cum duobus simul iunctis D Q. Sed numerus L metitur R per V ex constructione. Ergo per 17 lib. 7. Elem. conuersam numerus R æqualis est tribus simul numeris H, D, Q. Est autem numerus R æqualis etiam tribus H, Q, E; nam R ex constructione æqualis est duobus simul Q & P: at P est æqualis duobus E & H: eo quod H reliquus fiat dempto numero E ex P) ergo numerus D æqualis est numero E. Sed numerus D productus est ducto numero N in numerum X; numerus autem E, ducto M in Z genitus est. Ergo per Prop. 19 lib. 7. Elem. Ita se habet X ad Z vt M ad N. Quod cum ita sit: ita etiam se habebit componendo [X & Z simul (esto G) ad Z: vt M, N simul, siue L, ad N: & per conuersionem rationis. Ita etiam erit G ad antecedentem X; vt L ad antecedentem M. Ad hæc. Numerus G æqualis est differentiæ, quæ inter positionem B iusto minorem; & C iusto maiorem intercedit. Cum enim duo numeri X & B simul æquales sint numero V: erit X differentia numeri B à numero V. Quod si ad numerum V addideris numerum Z, quo scilicet posito C numerum V superare supponitur; vt efficiatur ipsa positio C: tunc numerus B discrepabit à numero C differentia G ex duobus numeris X & Z conflatâ. Quibus ita constitutis, facilè colligetur nullos alios numeros

meros quàm X & Z posse eundem numerum cum suis positionibus B & C efficere; si vnus (velut X) addatur ad positionem B iusto minorem; alter (velut Z) dematur à positione C iusto maiore assumptâ.

Nam cum numeri illi debeant necessariò proportionales esse, vt in præparatione demonstratum est, erroribus M, N: proportionales etiam erunt per prop. 11. lib. 5. Elem. numeris X, Z, & componendo. Ita etiam foret illorum antecedens cum consequente ad consequentem, vt X & Z simul (hoc est G) ad Z. Esset præterea necessariò antecedens cum consequente simul, differentia duarum positionum B & C: alioqui non posset idem numerus V verus effici addito antecedente ad positionem B iusto minorem, & consequente detracto à positione C maiore. Essent ergo duo illi numeri simul, æquales numero G, id est duobus simul X, Z. Cum autem debeant esse iisdem numeris X, Z proportionales: alij esse non possunt, quàm ipsimet X, Z. Neque enim potest idem numerus in alias & alias partes diuidi, quæ eandem rationem seruent iuxta prop. 14. lib. 5. Elem. Non ergo dici potest alios numeros quam X & Z, errores esse posse positionum B & C; quarum illa est minor iusto, hæc verò maior. Cum ergo X & Z veræ sint differentiæ, siue errores positionum B & C à numero V qui inuentus est iuxta constructionem traditam ductis decussatim positionibus B, C in errores N, M; genitisque numeris Q, P simul additis, vt fieret R; qui diuideretur per L ex erroribus M N additis conflato: concludi debet eâ methodo rectè esse inuentum numerum V, qui quæstioni satisfaciat. Quod erat præstandum.

Scholium 1.

In quo alia quædam traditur methodus regulæ huius duplicis positionis exercendæ.

Alia quædam à multis adhibetur regulæ huius methodus: quæ etsi aliquid cum tradita commune assumat; haud tamen parùm ab ea discrepare primâ fronte videatur. Quo porrò discrepet, quo conueniat, locus hic exigit, vt exponam.

In primis itaque hæc methodus illud habet cum præcedente commune, vt duplicem exigat fictam ad arbitrium duorum numerorum positionem. Quam item eodem modo examinare iubet iuxta quæstionis sententiam; annotatis etiam à dato numero erroribus duobus cum suis singulis characteribus, siue excessum, siue defectum designantibus. Quibus, vt prius, constitutis, ad quæsitum numerum consequendum aliâ deinceps insistendum est viâ. Quæ, vt ex dictis planior fiat, eadem quæstio hactenus versata proponatur.

Sit nimirum numerus A diuidendus in tres partes vt prima sit secundæ dupla, & secunda tertiæ tripla. Repetatur etiam primò primi casus schema vt hic cernis. In quo ex positionibus B, C profecti sunt errores M, N, vtrique à vero deficientes: eorúmque minor N à maiore M subducatur, vt eorum differentia L euadat nota. Habes hactenùs ea; quæ huic methodo cum priore sunt communia: Accipe quæ sunt diuersa.

D 22 X 48 Z 36 B 12 C 24 A 100 M X M V 60 M 80 N 60 L 20	B 12 L 20. D 12. M 80 ? X 48 V 60 C 24 L 20. D 12. N 60 ? Z 36 V 60

Primò reperiatur duarum positionum B & C differentia D, subducta minore B à maiore C.

Secundò tribus numeris L, D, & errorum M, N alterutri, vt M, quartus proportionalis inueniatur X.

Tertiò. Inuentus hic quartus proportionalis numerus X addatur ad positionem B; ad quam pertinet error M, qui assumptus est, vt ei quartus proportionalis X inueniretur. Fiat autem ex ea additione numerus V. Dico numerum hunc V eum esse, qui quæritur: esse nimirum numeri diuidendi A partem primam duplam secundæ futuram. Quam eandem obtineres, si tribus numeris L, D, & alteri errori N, quartum proportionalem Z inuenires; quem ad positionem C; vnde profluxit error N, adderes: fieret enim idem, qui priùs numerus V quæsitus. Iubentur autem proportionales X & Z addi ad positiones B & C: eò quod iusto minores assumptæ fuerint, eratúmque sit in vtraque per defectum. Quod si in vtraque per excessum erraretur; tunc, vt dicetur, à positione demi deberet quartus proportionalis inuentus. Nunc methodum hanc suâ stabiliamus demonstratione: quæ sic habet ex superioris methodi probatione paucis clarissimè deducta.

Demonstratum est in præparatione præcedentis demonstrationis duos errores duarum positionum B, C; esse proportionales duobus erroribus M, N ex positionibus B, C falsis, prouenientibus. Ostensum præterea, eandem esse differentiam D positionum B, C, & errorum illorum proportionalium erroribus M, N, operationis. Quibus positis. Cum nota sit duorum errorum M, N differentia L: nota etiam differentia D duarum positionum B, C, atque adeo (cum eadem sit) differentia errorum

ipsarum

ipsarum positionum: si duabus illis differentiis L & D, & errori M reperiatur quartus proportionalis X: & iisdem differentiis L, D & alteri errori N, quartus Z: erunt primò duo numeri X, Z, duobus erroribus M, N proportionales. Nam cum sit M ad X, vt L ad D: vt autem L ad D, ita sit etiam N ad Z: ita erit M ad X, vt N ad Z per Prop. 11. lib. 5. Elem. Est permutando, vt M ad N, ita X ad Z. Secundò. Excessus duorum numerorum X, Z, erit numerus D. Cum enim proximè ostensum sit, ita esse X ad Z, vt M ad N: per conuersionem rationis erit, vt M ad L excessum, quo antecedens M superat consequentem N; ita X ad excessum, quo X superat Z & permutando, vt M ad X, ita L ad excessum, quo X superat Z. Sed vt M ad X: ita est ex constructione L ad D. Ergo D est excessus; quo X superat Z.

Quare cum X, Z sint duobus erroribus M, N proportionales: sit præterea eorundem numerorum X, Z differentia ostensa esse D, quæ est differentia positionum B, C: erunt necessariò X, Z errores à vero quæsito numero, positionum B, C. Conflabunt enim tam duo numeri X, B; quàm duo Z, C eundem numerum iuxta obseruata extremo loco præparationis superioris. Nec alij possunt vlli termini reperiri proportionales erroribus M, N; atque adeò B, C: qui possint singuli singulis terminis B, C additi numeros æquales procreare, vt suprà sæpiùs est ostensum. Ergo X & Z traditâ methodo inuenti; inuenti scilicet tribus terminis L, D, M; & tribus L, D, N proportionales: sunt à vero quæsito numero errores positionum B, C. Ergo si tam X ad positionem B; quàm Z ad positionem C addatur (erratum enim est per defectum, errórque addi debet ad positiones, vt verus habeatur numerus) nascentur duo numeri æquales, numerum quæsitum singuli exhibentes, qualis est numerus V. Quare, si vt præceptum est, tribus terminis notis L D, M; vel tribus L, D, N quartus proportionalis X, vel Z reperiatur; addatúrque X ad positionem suam B, vel Z ad suam C. Fiat quæsitus numerus V.

Quod si per excessum erratum foret tunc reliquis omnibus vt priùs obseruatis, inuenti numeri X, Z quarti proportionales tribus L, D, M, vel tribus L, D, N: ab ipsis positionibus B, C, vtpore iusto maioribus, demi debent; vt verus habeatur numerus. Cuius cum eadem sit ratio, quæ casûs præcedentis: huic afferendæ supersedeo.

Nec est tertij casus expediendi, vel methodus, vel methodi ratio admodum diuersa à duobus præcedentibus. Seruatis enim, quæ cum ante-

		D 54.			B 12
	X 48		Z 6	L 90. D 54. M 80 ? X 48	
A 100	B 12		C 66		—
V 60		M X P			V 60
					C 66
	M 80		N 10	L 90 D 54 N 10 ? Z 6	
		L 90			—
					V 60

cedente methodo sunt communia: repertis scilicet erroribus M, N ex positionibus B & C profectis: quorum ille per defectum contingit; hic autem per excessum. Additis etiam erroribus M, N, vt habeatur ex illis conflatus numerus L: demptâ denique minore positione B ex maiore C, vt earum differentia sit D. Si fiat vt L ad D; ita error M ad aliud: erit X inuentus quartus proportionalis tribus notis terminis L, D, M; qui addi debet (eò quod per defectum erratum sit in hac positione B, vt character M indicat) ad ipsam positionem B: vt fiat verus numerus V quæsitus, Quem ope alterius positionis C, & ex ea erroris consecuti N per excessum; reperire licebit: si tribus terminis L, D, N, quartus adiungatur proportionalis Z: qui à positione C, maiore quàm par sit, subduci debet; vt habeatur idem, qui priùs, numerus verus V. Quod probatione ostendi potest ei persimili, quæ paulò ante allata est: quæ sic instituetur.

Cum tam error M ad numerum X; quàm error N ad Z, eandem habeat rationem; quam habet L ad D: erunt per Prop. 11. lib. 5. Elem. duo numeri M, X; duobus numeris N, Z proportionales. Ergo etiam, permutando ita erit M ad N, vt X ad Z, & componendo vt M, N simul, ad N vt X, Z simul; ad Z & permutando vt M, N simul, ad X, Z simul, vt N ad Z: Duo autem numeri M, N simul, æquales sunt numero L ex constructione. Ergo, ita est L ad duos simul numeros X, Z; vt N ad Z. Sed vt N ad Z, ita est per constructionem L ad D. Ergo ita est L ad D vt L ad duos simul numeros X, Z. Sed D est differentia duarum positionum B & C ex constructione. Ergo duo numeri X, Z simul æquales sunt differentiæ D duarum positionum B, C. Quare cum, vt ostensum est, duo numeri X, Z sint duobus erroribus M, N, proportionales: sintque ex proximè declaratis iidem duo numeri X, Z simul æquales duarum positionum B, C, differentiæ D: erunt iuxta conclusionem demonstrationis

tionis ad tertium casum superiorem allatæ, numeri duo X, Z ipsarum positionum errores à vero quæsito numero V. Quare si ad positionem B iusto minorem suus addatur error X; & à positione iusto maiore C dematur error Z: vtroque modo habebitur verus numerus V: qui quæstioni satisfaciat. Quod quærebatur.

Scholium. 2.

Insigne quoddam compendium regulæ falsi duplicis positionis.

Occurrit compendium quoddam non leue; quo in hac falsi regula instituenda vti licet; quod totum ex apta profluit positionum assumptione. Ea autem erit aptissima; si positione primâ iuxta quæstionis sententiam examinatâ, & errore à dato numero, constituto: positio secunda assumatur vnitate tantùm à priore discrepans, siue hæc maior fuerit, siue minor. Mirum enim quanta cum breuitate, & facilitate tota operatio absoluitur huiusmodi assumptis positionibus; eò quod vnitas numeros, nec augere per multiplicationem; nec per diuisionem minuere nata sit. Verùm rem exemplo adducto comprobemus, & quidem hactenùs exposito. Diuidi scilicet debet numerus A in tres partes, ita vt prima sit secundæ dupla; & hæc tripla tertiæ.

Prima ergo positio, esto B: quæ iuxta quæstionis tenorem examinata errorem exhibet M, & quidem per defectum (nam si prima pars est B 12, vt sit dupla secundæ; secunda erit 6: & quia secunda est tripla tertiæ: tertia erit 2. Qui omnes numeri additi efficiunt 20 debebant autem efficere A 100. Ergo erratum est per defectum numero hoc M 80) rursùs. Assumptâ positione C vnitate maiore quàm sit B: eáque examinata; error erit N. Hoc errore minore subducto à maiore M; reliqua fit errorum differentia L. Atque hactenùs omnia se habent perinde, ac in prima methodo, & in secundâ, præcedenti scholio declarata. Quod sequitur & à prima, & à secunda in speciem differt (in speciem, inquam, nam vt patebit, reuerà cum secunda conuenit) sequitur autem, vt alteruter errorum, nempe M, diuidatur per errorum differentiam L; vt fiat X: ac tandem hic numerus X addatur (erratum est enim per defectùm) ad positionem B: fiet enim numerus quæsitus V. Qui idem haberetur: si per eandem differentiam L error alter N diuideretur. Nam diuisio pareret numerum Z: qui additus ad positionem C, numerum V exhiberet.

		D 1		B 12
	B 12		C 13	L $1\frac{2}{3}$. D 1. M 80 ? X 48
A 100	M	X	M	V 60
V 60				C 13
	M 80		N $78\frac{1}{3}$	L $1\frac{2}{3}$. D 1. N. $78\frac{1}{3}$? Z 47
		L $1\frac{2}{3}$		V 60

Vt huius methodi ratio euadat manifesta; in mentem reuoca; quæ in proximo ſcholio præcipiuntur ad totam operationem abſoluendam poſt inuentam errorum M & N differentiam L. Præcipitur ſiquidem, vt tribus numeris, L differentiæ errorum, D differentiæ poſitionum B & C (quæ eſt vnitas ex conſtructione) & M alteri errorum, quartus X proportionalis inueniatur: qui ad poſitionem B, vnde error M profluxit, addatur; vt fiat quæſitus numerus V. At quis non videat in operatione; quæ ad quartum numerum X proportionalem inueniendum adhibenda eſt; ſolam inſtitui diuiſionem erroris M per errorum differentiam L? cum enim vnitas D, quæ ex conſtructione eſt differentia poſitionum B, C, ſecundum in regula proportionum locum occupet, non mutabit tertij termini M quantitatem; dum ipſum multiplicabit: ſed immutatum primo termino L diuidendum tradet, vt habeatur terminus quartus X: qui ad poſitionem ſuam B additus quæſitum numerum V exhibet. Adeò vt tota hæc ratio à præcedenti in ſcholio tradita non diſcrepet; nec alia egeat demonſtratione. Totum ergo hoc, quodcumque ſit, compendium referri debet acceptum poſitionibus B & C vnitate tantum diſcrepantibus. Monuerim tamen compendium hoc, tantum non fore ſæpiùs, vt præſtet commodo, quod ex poſitionibus ad arbitrium liberis oriri ſolet: ex ea enim facultate poſitiones eligendi, fractos numeros, qui operationes impeditiores deſiderant, licebit declinare; quos, vt plurimum inuehent poſitiones vnitate tantùm diſcrepantes.

Scholium. 3.

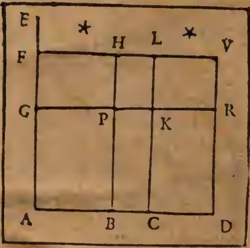
In quo Regula falſi duplicis poſitionis Geometricè declaratur.

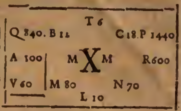
Antequam regulam hanc inter cæteros Arithmeticæ canones facilè principem, miſſam faciam: eam Geometrico diagrammate illuſtrare è re maximè fore viſum eſt. Mirum enim quantam lucem hæ duæ totius matheſeos

theſeos facultates primariæ ſibi mutuò præſtent, dum Arithmetica continuam, qua vtitur Geometria, quantitatem in particulas diſſecat, earúmque multitudinem certo definit numero, ac notam facit: Geometria verò Arithmeticæ numeros: qui ob eandem, quam præ ſe ferunt omnes ſpeciem ægrius, & ab inuicem diſtinguntur, & agnoſci poſſunt; in diagrammata diſtributos ipſis etiam oculis exhibet non ſine voluptate & elegantia contemplandos.

Caſus primus.

Sit ergo eadem quæſtio ſuperiùs propoſita: ſit nimirum numerus A 100 in tres partes diuidendus; ita vt prima pars ſit dupla ſecundæ & ſecunda tripla tertiæ: ac primo quæratur earum partium prima: eâ enim notâ innoteſcunt reliquæ. Quæratur autem iuxta tradita præcepta, vt appoſitum ſchema refert: in quo vtraque poſitio iuſto minor aſſumitur, vt habet ſuperiùs explicatus caſus primus: cuius omnes numeros in huius diagrammatis lineas commutatos in hac tabella licet intueri.





AE. Eſto A 100 numerus diuidendus
AD. Pars prima, quæ quæritur
AB. Poſitio prima B 12
BD. Eius error à quæſita parte AD
AC. Poſitio ſecunda C 18
CD. Eius error à quæſita parte AD
BC. Errorum & poſitionum diſcrimen: quod eſt T 6

A F. Error primæ operationis, qui est M 80

A G. Error secundæ operationis, qui est N 70

G F. Errorum discrimen L 10

A L Rect. Est planus numerus P 1440 ex M 80 in C 18 decussatim ducto genitus.

A P Rect. Est planus numerus Q 840 ex N 70 in B 12 productus

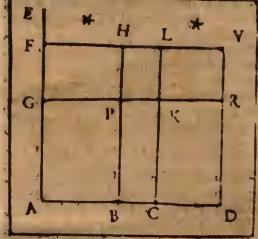
Expositâ hac partium diagrammatis ad numeros applicatione. Si rectangulum A P dematur à rectangulo A L, reliquus fiet Gnomon F P C. Id est si planus numerus Q 840 dematur à plano numero P 1440, fiet reliquus numerus R 600, respondens Gnomoni F P C. Rursùs. Cum in præparatione ostensum sit, ita esse errores M 80 & N 70 ad errores positionum B 12 & C 18, singuli ad singulos: atque adeo differentiam errorum M 80 & N 70 (quæ est L 10) ad differentiam errorum positionum B 12 & C 18: quam in præparatione ostendi eandem necessariò esse cum differentia T 6 ipsarum positionum: etiam in diagrammate ita erit F G differentia errorum A F 80, & A G 70 ad differentiam B C, errorum B D, C D; vel etiam positionum A C, A B; vt error operationis minor A G, ad errorem positionis minorem C D (hòc est in numeris ita L 10 ad T 6; vt N 70 error operationis minor ad errorem C D positionis A C maioris) Ergo rectangulum primâ G F & quartâ C D contentũ: quod est rectangulum L R (est enim eius latus K L lineæ G F, & latus K R lineæ C D æquale per prop. 34. lib. 1. Elem.) æquale est rectangulo B K; quod secunda B C; & tertia A G, siue B P continent per Prop. 16. lib. 6. Elem. Hinc sequitur vt Gnomon F P C, & rectangulum F R sint æqualia. Adde enim ad rectangulum G L, rectangulum P C, vel L R. fient æquales quantitates. Cum ergo Gnomon F P C exhibeat numerum R 600, vt declaratum est: etiam rectangulum F R eundem numerum repræsentabit. Quare si numerus R 600 rectangulo F R expressus diuidatur per F G, hoc est, per numerum L 10; habebitur numerus G R, hoc est A D, siue quæsitus numerus V 60. Patet ergo quomodo allata methodus quæstionem propositam soluendi per numeros, cum positiones assumptæ sunt iusto minores, clarè per Geometriam, & eleganter demonstretur.

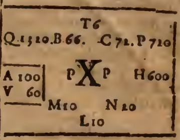
Nec minùs clarè patet tradita ratio in scholio 1. præcedenti: cum, vt hic habet casus, in vtraque positione per defectum errare contingit. Cum enim, vt in præparatione ostensum est, ita sit G F differentia errorum A F, A G, operationis, ad B C differentiam positionum A C, A B (quæ & ipsa est etiam errorum differentia positionum A C, A B) vt A F error maior operationis, ad B D errorem positionis A B, errorem A F producentis: sintque notæ linearum G F, B C, A F quantitates (est enim ex constructione G F numerus L 10; B C est T 6; A F est M 80) si tribus terminis illis G F, B C, A F quartus proportionalis inueniatur B D; is etiam

etiam notus erit, nempe 48 : qui si addatur ad positionem A B (quæ est B 12) fiet tota linea quæsita V 60. Quam eandem consequereris etiam, si tribus terminis G F, B C, A G notis, nempe L 10, T 6, N 70, quartus proportionalis inueniatur B C 42 : qui ad positionem A C (quæ est C 18) addatur : fiet enim, vt priùs, numerus quæsitus V 60. Est enim vt G F, siue L 10; ad B C siue T 6; ita error A G, hoc est, N 70, ad C D errorem positionis A C.

Casus secundus.

Quod si in vtraque positione per excessum errare contingat, vt in hoc schemate, quod est allatum superiùs, cernitur; eodem modo declarabitur Geometricè tradita solutionis methodus. Idem enim assumatur diagramma: sed numeris longè diuersis à superioribus, prout tabella sequens exponit.





A E. Esto A 100 numerus diuidendus
A B. Pars prima, quæ inuestigatur
A C. Positio prima B 66
B C. Eius error per excessum à quæsito A B
A D. Positio secunda C 72
B D. Eius error per excessum à quæsito A B
C D. Errorum, idem & positionum A C, A D differ. T 6.
A F. Error N 20 à positione A D 72 profectus
A G. Error M 10, à positione A C 66 emanans
G F. Errorum A F, A G discrimen L 10

A L. Est numerus planus Q 1320 genitus ex N 20, siue A F, in minorem positionem B 66 siue A C.

A R. Est numerus planus P 720, genitus ex M 10, siue A G, in maiorem positionem C 72 siue A D.

His positis. Si ex plano numero A L (qui est Q 1360) maiore dematur planus minor numerus A R (qui est P 720) remanebit, vt statim probabo, planus numerus G H (qui est H 600) qui si diuidatur per F G, siue L 10 differentiam errorum M 10, N 20 operationis: notus fiet numerus G P, siue A B, qui est quæsitus numerus V 60.

Quod autem plano numero A R dempto ex numero plano A L, reliquus fiat numerus H 600, vt proximè suppofui, sic ostendo. Rectangula duo P L, C R (in hac figura ne sensus consulas; sed ratiocinationem ex suppositis procedentem) sunt æqualia. Ergo rectangulum A R æquale est Gnomoni A K H. Quo dempto à rectangulo A L, constat reliquum fieri rectangulum G H. Probatur antecedens. Ita est F G differentia errorum A F, A G operationis; ad C D differentiam positionum A D, A C, vt operationis error A G minor (siue M 10) ad B C errorem positionis minoris A C, à quæsito numero A B, vt in præparatione præcedentis propositionis demonstratum est. Ergo. Rectangulum sub primâ lineâ G F, & sub quartâ B C, quod est rectangulum P L (sunt enim duæ P H, P K æquales duabus G F, B C per prop. 34. lib. 1. Elem.) æquale est rectangulo C R: quod continetur sub secunda C D, & tertiâ A G siue G k. Rectè igitur statutum est dempto rectangulo A R ex rectangulo A L, reliquum fieri rectangulum G H; siue numerum planum H 600: qui diuisus per G F 10, exhibeat numerum G P, siue A B, aut V 60. Quod hîc erat declarandum.

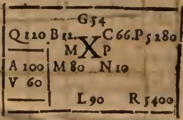
Ad alteram verò eiusdem solutionis methodum scholio 1. allatam quod attinet: eadem factâ suppositione eiusdem casus, res est euidentissima. Si enim fiat, vt illic præcipitur, vt errorum A F, A G differentia F G, siue L 10, ad positionum A D, A C differentiam C D, siue T 6 (quam in præparatione æqualem esse ostendi errorum differentiæ, quibus quæsitum numerum A B positiones excedunt) ita error A G, siue M 10 ad aliud: reperietur B C 6: quo à positione A C, siue B 66 dempto, remanebit quæsitus numerus A B: qui est V 60. Eodem modo idem numerus haberetur, vt ibidem ostendi; si tribus lineis G F, C D; & A F; siue tribus numeris, eisdem lineis, designatis L 10, T 6; & N 20. Quartus proportionalis inueniatur 12; quem repræsentat recta B D: hic enim si à positione A D, siue C 72 dematur, reliquus fiet idem numerus quæsitus, siue V 60, vt priùs.

Nec

Casus tertius.

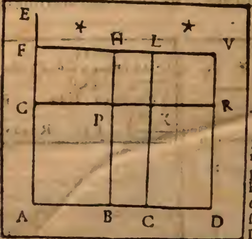
Nec minùs aptè exhibebit eadem figura geometrica solutionem tertij casûs Cum scilicet in positionum altera per defectum; in altera per excessum erratur: si eiusdem diagrammatis lineis, solutionis numeri rectè applicentur, vt hic cernis applicatos, iuxta schema casûs illius tertij repetitum.

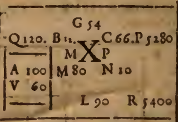




A E. Esto A 100 numerus diuidendus
A C. Pars prima illius, quæ inquiritur
A B. Positio prima B 12, minor quàm A C
B C. Eius error à recta A C per defectum
A D. Positio secunda C 66 maior quàm A C
C D. Eius error per excessum
B D. Duo errores B C, C D additi: qui sunt G 54
A F. Error M 80 primæ operationis per defectum
A G. Error N 10 secundæ operationis per excessum.
A F, A G simul. Errorum M & N aggregatum L 90
A V. Est planus numerus ex errore A F, siue M 80 in A D, siue C 66 secundam positionem ducto genitus: & est P 5280
A P. Est planus numerus Q 120 ex errore A G, siue N 10 excedente, in primam positionem A B, siue B 12, ducto profectus
P & Q simul. Est R 5400: Qui diuisus per L 90 generat V 60 quæsitum numerum, siue A C.

Hac ſtatutâ numerorum ad lineas collatione : ecce vt data ſuperiùs vtraque ſolutionis methodus , tum quæ in Propoſitione ; tum quæ in ſcholio explicatur , aptè hac figurâ geometrica declaretur. Quamquam nolim , vt nuper monui, in eâ attendi veram eius partium proportionem; ſed tantùm (quod ad exemplum ſufficit) earum qualemcunque ad ratiocinationem faciliùs ineundam , deſignationem.





Oſtendo itaque numero R 5400 ex duobus numeris planis Q 120, & P 5280 , conflato per numerum L 90 diuiſo rectè haberi quæſitum numerum V 60. hoc eſt. Oſtendo , ſi duo ſimul plani numeri A V , & A P diuidantur, per duas lineas A F , A G in vnicam compoſitas, ſiue ipſis lineis applicentur : effici latitudinem quæſitam A C. Oſtendendum ergo eſt duo ſimul rectangula A V , A P æqualia eſſe rectangulo, cuius latitudo ſit A C ; longitudo verò duæ ſimul lineæ A F , A G. Ac in primis conſtat rectangulum huiuſmodi , duabus lineis A F, A G ſimùl, & latitudine A C contentum , æquale eſſe duobus rectangulis A L & A K : hæc enim , vt patet , in directum poſita rectangulum illud componerent longitudine A F, A G, & latitudine A C contentum. Sunt ergo duo rectangula A V , A P probanda æqualia duobus rectangulis A L , A K. Id porrò probatum tum fuerit : cum fuerit oſtenſum rectangulum B K æquale eſſe rectangulo C V. Nam tunc rectangulum A L cum rectangulo B K erit æquale rectangulo A V : cui ſi addatur A P ; fient tria rectangula A L, A P , B k ſimul , æqualia duobus rectangulis A V , A P. Sed tria illa rectangula æqualia ſunt duobus rectangulis A L , A K. Ergo duo A V, A P , duobus A L , A K ſunt æqualia. Oſtendo itaque duo rectangula B k , & C V eſſe æqualia.

Ex præparatione ad probationem ſuperioris propoſitionis ſtabilitá;ita ſe habet A F error operationis ex prima poſitione A B ortus, ad B C errorem ipſius primæ poſitionis A B, quo deficit à quæſito numero A C : vt

erroꝛ

error A G operationis ex secunda positione A D profectus; ad C D errorem ipsius secundæ positionis A D, quo excedit quæsitum numerum A C. Ergo rectangulum sub primo latere A F, & quarto C D) quod est rectangulum C V,) æquale est rectangulo sub secundo B C, & tertio A G, hoc est, rectangulo B K. Quo ita demonstrato, patet, ut iam declaratum est, duo rectangula A P, A V simul; quæ planos numeros Q 120, & P 5280, repræsentant; æqualia esse rectangulo sub A F & A G simul tanquam vno latere, & latere A C, contento: Quod rectangulum est numerus planus R 5400. Ergo si hic numerus applicetur ad duos simul numeros M 80 & N 10 (qui lineis A F, A G designantur) hoc est, ad numerum L 90 illis æqualem: quæ applicatio per diuisionem absoluitur; habebitur numerus quæsitus A C siue V 60. Vera itaque est prior illa methodus in ipsa propositionis constructione tradita, & deinceps Arithmeticè demonstrata: hic verò etiam geometricè, & eleganter. Altera verò ratio solutionis huius casûs; in quo vna positio à vero numero deficit, altera eundem excedit: ex eadem figura illustrari & facilè demonstrari potest; si modò memineris superioris numerorum ad lineas applicationis: quam consule. Cum enim sit vt L 90 ex erroribus M 80 & N 10 operationis conflatus ad duos positionum duarum errores simul additos G 54 (quæ est ipsarum positionum B 12 & C 66 differentia) cum, inquam, vt A F, A G simul tanquam vna linea, ad B D conflatam ex erroribus B C, C D positionum A B, A D (quæ & ipsa est positionum differentia) ita sit A F, hoc est, M 80 ad B C errorem positionis A B à quæsito numero A C: vt ad præparationem superioris propositionis demonstratum est. Si fiat vt A F, A G simul, ad B D differentiam positionum A B, A D. Hoc est, L 90 ad G 54. ita A F, siue M 80 ad aliud: habebitur B C 48. qui additus ad positionem A B (cum sit iusto minor) exhibebit verum numerum A C, eritque V 90. Quod si item fiat, vt idem numerus L 90 ad G 54: hoc est, A F, A G simul, ad B D 90: ita A G siue N 10 ad C D; habebitur numerus C D 6: quo ex positione A D, detracto: remanebit A C, siue V 60, quæsitus numerus. Rectè igitur instituta est methodus solutionis quæsitæ in Scholio 1. Atque ex dictis hactenus non minus plana & aperta euasit hæc regula falsi duplicis positionis; quæ prima fronte iure videatur obscurissima; vt reliquis superioribus regulis de perspicuitate non concedat. Vnum tamen restat adhuc exponendum non leuis momenti ad absolutam huius canonis tractationem. Quod paucis expedio hoc in Scholio.

Scholium 4.

Quæratur non immeritò quænam quæstiones ad priorem falsi simplicis positionis regulam spectent, & ab ea solui possint: quænam ad hanc duplicis positionis referri debeant: easque prior soluendo non sit? Ad hoc respondeo primò. Quæstiones omnes, quas regula simplicis positionis explicat; explicari etiam posse per regulam duplicis positionis. Cum enim regula duplicis positionis exigat: vt errores operationis, siue differentiæ numerorum, qui per examen positionum iuxta quæstionis tenorem initum, consequuntur, innotescant, & cum erroribus positionum conferantur: qui eandem inter se rationem semper habent: quam errores operationis inter se, vt probatum est in præparatione propositionis huius 50. Hinc semper fiet: vt quod per priorem regulam absoluitur; per secundam solui etiam possit: quod adhuc ex sequentibus clarius constabit.

Respondeo secundò: Quidquid per regulam duplicis positionis soluitur, non posse perinde solui ope regulæ simplicis positionis. Huius assertionis ratio quæritur: quæritur etiam quomodo problemata ad solam regulam duplicis positionis referenda: & ad quæ inutilis sit regula positionis simplicis dignosci queant? Dico igitur eas omnes quæstiones, ad regulam simplicis positionis pertinere, eiúsque ope solùm posse: in quibus variæ positiones pro numero ignoto constitutæ, & iuxta tenorem quæstionis examinatæ, numeros semper sunt aptæ producere suis positionibus proportionales. Ita enim fiet, vt ex numero per examen collecto, & ex eius positione fictâ, habeatur ratio; quam numerus datus habet ad suam veram positionem, siue ad numerum quæsitum. Vt si diuidendus sit numerus A 100 in duas partes: quarum vna sit alterius quadrupla. Si pars maior statuatur B 8; minor erit C 2: quæ simul numerum falsum D 10 exhibent: deberent enim exhibere datum numerum A 100 diuidendum. Habet tamen numerus D 10 inuentus per examen quæstionis, eam rationem ad positionem D 8: quam habet A 100 ad quæsitum numerum H 80. atque ita si tribus numeris D, B, A, quartus proportionalis inueniatur H; is erit, qui quæritur.

H 80	B 8	E 12
L 20.	C 2	F 3
A 100	D 10	G 15

Vt verò constet an hoc modo per regulam simplicis positionis verus terminus obtineatur: alia tentetur positio, vt E 12. Ergo secunda pars erit F 3. Hæ duæ partes simul constant G 15: qui numerus cum eandem rationem habeat ad suam positionem E 12; quam habebat numerus D 10 ad positionem suam B 8: certissimum signum est, eam etiam rationem fore numeri A 100 ad partem quæsitam H 80. atque adeò habebitur H 80: si fiat H, tribus D, B, A, vel G, E, A

quartus

quartus proportionalis. Quod si deprehendatur duabus positionibus iuxta quæstionis exigentiam examinatis numeros colligi ad suam quemque positionem minimè proportionalem: scito quæstionem solui nullo modo posse per regulam positionis simplicis. Si enim positiones duæ numeros producunt examinata quæstione sibi minimè proportionales: neque etiam tres, vel plures; neque etiam vera ipsa quæsita positio proportionales procrearent: cum par omnium sit ratio. Quare tunc ope duarum positionum, quas ad periculum faciendum adhibuisti, regulam absolues duplicis positionis iuxta methodos explicatas. Hinc habes à posteriori modum dignoscendi, quænam quæstiones ad positionem simplicem referri possint: quasnam ad duplicem referre necessarium sit. Verùm quæras num quoddam à priori haberi possit argumentum: quo deprehendas an proposita quæstio quælibet ad simplicem, vel duplicem positionem pertineat?

Respondeo haberi posse certissimum. Haberi siquidem potest cognitio certissima: an proposita quæstio iuxta eius tenorem examinata per duas vel plures positiones, numeros exhibitura sit ipsis positionibus proportionales, vel non proportionales. Quod si proportionales futuri sunt positionibus suis numeri per prosecutionem quæstionis producendi: quæstio per simplicem positionem solui poterit: contra verò, si non proportionales forent colligendi. Tunc enim positio duplex adhibenda foret. At quomodo hæc numerorum ex positionibus ortorum eadem cum ipsis proportio, vel improportio agnoscatur? Accipe.

Quæstio quælibet, quæ solam inuoluit multiplicationem, vel diuisionem, aut vtramque, numeros semper generabit positionibus proportionales, dum examinabuntur assumptæ positiones: atque adeò per vnicam positionem solui poterit. At si quæstio additionem, vel subtractionem certi cuiusdam numeri faciendam præcipiat, esto etiam multiplicatio aliqua, aut diuisio ineunda sit, non possunt numeri per examen quæstionis illius produci; qui sint positionibus assumptis proportionales: atque adeò quæstio huiusmodi non nisi per positionem duplicem solui poterit. Vtrumque declaro, & stabilio.

Primum quidem hoc modo. Resumo superiùs allatum exemplum. Diuidendus est numerus A 100 in duas partes, quarum vna sit alterius Quadrupla. In positionem assumitur B 8: qui numerus in quatuor partes

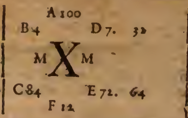
H 80	B 8	E 12
L 10	C 2	F 3
A 100	D 10	G 15

diuidi debet; vt eius quarta pars C, 2 sumatur; quæ cum positione B 8, efficit D 10. Certum est totum numerum D 10 eandem habere rationem ad positionem assumptam B 8: quam, non tantum numerus A diuidendus: sed alius quilibet, vt G 15 habebit ad singulos numeros numeris B, C homologos. Nam diuisione cuiuslibet numeri, siue B 8, siue H 80, siue E 12 per eundem numerum 4, habebuntur numeri L 10, C 2, F 3 ad diuisos numeros H, B, E proportionales per prop. 4. lib. 2. huius. Ergo etiam componendo. H & L simul, simul B & C; & simul E, F, hoc est, A, D, G; ad partes quilibet suas homologas H, B, E eandem habebunt omnes rationem. Vnde sequitur, vt ex data ratione numeri D per examen quæstionis producti, ad numerum B; reperiri possit per regulam simplicem proportionum, non tantùm numerus H quæsitus, respondens numero A dato; sed etiam E respondens numero G: & alius quilibet in eadem ratione D ad B. Atque ita ex regula simplicis positionis solui poterit quæstio quælibet quæ diuisionem præcipit numeri per numerum; eadémque ratio est multiplicationis. Nam tam multiplicatio, quàm diuisio per eundem numerum, semper producent numeros multiplicatis, vel diuisis proportionales, per Prop. 17. lib. 7. Elem. vel Prop. 3. & 4. lib. 2. huius. Ex his ergo constat, clariúsque constabit ex sequentibus: quæ quæstiones per simplicem positionem solui possint.

Secundum, quod scilicet quæstiones, alicuius certi & determinati numeri concursum inuoluentes, necessariò per duplicem positionem solui debeant; clarum etiam est. Nam certus ille, & determinatus numerus, qui requiritur, pati non potest eandem rationem ad quaslibet positiones maiores, & minores: vel etiam ad diuersos numeros ex diuersis positionibus iuxta tenorem quæstionis examinatis productos: duo siquidem numeri diuersi ad eundem, eandem non possunt habere rationem. Nam maior ad eundem, maiorem rationem habet, quàm minor per Prop. 10. lib. 5. Elem. Quare numerorum proportionalium à duabus diuersis positionibus iuxta tenorem quæstionis enascentium seriem interrumpi necesse, est: si vnus aliquis, idemque numerus addatur vtrique seriei proportionalium membrorum: deberet enim numerus ille, qui addendus est, etiam ipsi suæ positioni esse proportionalis; atque adeò maior ad maiorem positionem, aut ad quempiam numerorum ex ea emanantium addi deberet; quàm ad minorem; Vt tandem vltimus productus iuxta quæstionis sententiam, ad positionem suam eandem haberet rationem, quam productus alius habet ad suam aut maiorem positione priore, aut minorem. Vt si proponatur huiusmodi quæstio.

Diuidatur

Diuidatur numerus A 100 in duas partes; ita vt maior pars ſit dupla ſecundæ, & præterea contineat 4. ita ratiocinabimur. Aſſumptâ poſitione B 4, quaſi foret minor quæſita pars: erit numerus 12 pars maior, dupla ſcilicet minoris partis 4 & quæ inſuper continet 4. At ſi alia quæuis aſſumatur poſitio, vt D 8, pro eadem minore parte: maior pars (quæ minoris 8, dupla eſt & inſuper 4. continere debet) erit 20. Quæ ad poſitionem ſuam D 8, eandem rationem non poteſt habere: quam habet prior pars maior 12 ad ſuam poſitionem 4. Hæc autẽ improportio oritur ex eò quod idem numerus 4 additur, tam ad partem 8 partis B 4 duplam, vt fiat 12 tota pars maior: quam ad partem 16 partis D 8 minoris duplam, vt fiat 20 tota pars maior ex poſitione D orta. Forent autem proportionales numeri ex poſitionibus B & D geniti 12 & 20 cum ſuis poſitionibus: ſi quemadmodum poſitio D 8 dupla eſt poſitionis B 4: ita adderetur ad numerum 16 ex poſitione D 8 ortum numerus 8 duplus numeri 4; qui additur ad numerum 8 duplum poſitionis B 4 minoris, vt fiat 12 pars maior. Sic enim foret tunc totum ad totum, ſicut pars ad partem homologam. Cum ergo in huiuſmodi quæſtionibus; vbi, vel additio, vel ſubtractio certi & determinati numeri expreſſi fieri debet, interrumpatur connexio numerorum proportionalium: ideo quæſtiones omnes huiuſmodi numerorum determinatione conſtantes nequaquam per ſimplicem poſitionem ſolui poſſunt: ſed ad duplicem referendæ erunt: vt hic propoſita: quæ iuxta traditam methodum examinata exhibet numeri A 100 partem minorem 32. partem autem maiorem 68, minoris 32 duplam & inſuper 4. continentem eſt enim C 84 error per defectum à numero A 100 primæ poſitionis B 4. Poſitionis autem D 8, error item per defectum eſt E 72. quo à maiore C 84 ſubducto, habetur F 12: per quem ſi diuidatur numerus reliquus 384, ſubducto ex 672 (qui producitur ex C 84 in D 8.) Numero 288; quem in ſe ducti E & B genuerunt: fiet enim ex ea diuiſione quæſita illa minor pars 32, numeri diuidendi A 100, cuius loco fictæ poſitiones B & D ſtatutæ fuerant.



Ex his ergo conſtat apertiſſimè quænam quæſtiones per duplicem fictam poſitionem expediri debeant: eæ ſcilicet omnes in quibus certi numeri determinatio, ſiue per additionem, aut ſubtractionem, ſiue per alium quemuis modum, reperitur. Tunc enim ex poſitione vna ſimplici reperiri non poteſt quæſitus numerus: cum iuxta quæſtionis tenorem examinata numeros producat diuerſæ rationis à numeris quos aliæ poſitiones variæ: imò etiam ipſa vera poſitio, producerent. Per duplicem

autem positionem fictam omnes huiusmodi quæstiones soluentur; eò quod, etsi numeri per positionum examen geniti proportionales non sint; sed vna positio numeros producat eandem rationem minimè seruantes ob dictam certi numeri determinationem: quam seruant alij numeri ex aliis positionibus orti; eorum tamen errores semper sunt erroribus positionum proportionales; vt demonstratum est: vnde petitus est modus huiusmodi quæstionibus satisfaciendi vniuersalissimus. Constat etiam quæstiones omnes; quæ per simplicem fictam positionem solui alioqui possent, posse etiam per duplicem positionem expediri: sunt enim etiam in iis errores ex positionibus examinatis iuxta quæstionem, deriuati, ipsarum positionum erroribus proportionales. Ex qua errorum proportione petitur solutionis modus.

Atque hactenùs de regulis falsæ positionis. Quas tum ob obscuritatem, tum ob earum eximiam in soluendis numerorum Ænigmatibus facultatem paulò fusiùs prosequi oportuit.

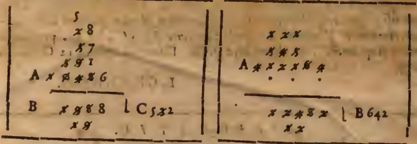
F I N I S.

AD LECTOREM.

Non potuit Typographia in tanta characterum varietate errata aliquot non incurrere : quæ ne tibi , amice Lector, fraudi futura sint ; ea primùm vt emendes , etiam atque etiam hortor. Crassioribus , quæ per se patent , literularum ac distinctionum præposterarum omissis graviora tùm in schematibus , tùm in tractatu admissa , emendata propono citatâ paginâ , paginaque lineâ , eius vnâ aut alterâ initiali syllabâ (sic enim faciliùs quàm per numerum occurrere visum est) designatâ.

Errata Schematum.

Pag. 138. & 384. *perturbati characterum ordines ita restituuntur.*



Pag.16-1100 *lege* 11000.p.135-7987-2987.p.282-B 4.B 5.p.192-F 5.F 20.p.208-*repone* L & O *ex fig. pag.* 282. p. 238-B 400. M 400. p. 256-A 25. B 25. p. 259-G 45. C 45. p. 286-F 5-55. F 55-5. p. 305-B 160000. B 216000. p. 312-B 600. B 60.p. 319-A 216000. B 216000. p. 352-C 5. G 5. p. 352-F 54. F 45.

Errata Tractatus.

Pag. 12. linea-*nume. dele* D. p. 26. lin.*immu*-Primo. p. 36-*tinet*-significatiua. p. 44-*multi*-quia passus. p. 59-*restat*-numerum F. p. 71-*ducat-dele* siue dicatur numerus. p. 80-*rectan* parte D-parte D B. . Ibid. *stangu*-nam I L. p. 81. *partes*-B D. p. 94. *mero*. fit. p. 94. *Equo*. O L. p. 100. *de ge*. si, duci. p. 109. *distri*. distributo. p. 125. *sus fu*. quæstio. p. 129. *ne*-diuidendas. p. 132. *merum*-subscribes. p. 148. *quæ*-hæc est. p. 166. *C ex* L N. p. 167 *eun*. latitudo L N. p. 185. *per*-*ita distingue*-totum numerum. Tertium , quo &c. p. 190. *omnes*-qui ad. p. 196. *Tam*-etsi non maximam. p. 204. *tem*-fractio GD. p. 205. *merus*-fractioni A B. p. 213. *ad C. ita distingue*-genita. Quarta obseruatio &c. p. 214. *late. ita lege*-latera sunt M S , M O ; hoc est A & C rectangulum &c. p. 214. *B sive*-ad aliud G ? p. 220. *ponen*. minutia per minutiam. p. 235. *ratio*-D E. p. 236. *gerit. ita distingue*-positis constat. Ergo &c. p. 245. *nume*. numeratorum A & D. p. 248. *nota*-ad Quinta. p. 252. *const*. quot opus. p. 291. *nempe*-nempe A 6 pass. p. 301. *vent*. munitque. p. 312. *Vnum*. Addito p. 325. *subdox. dele* sumendis *& repone* sumendum erit à secundis O. p. 331. *termi. dele* termini. p. 333. *nemi* Quotienti. p. 338. *potest* minuta enim minora p. 341. *mus*. tertio. 363. *quadra*. fit , si tamen. p. 366. 6 *termi*. si cubica. p. 370. *si ex*. quadrato. p. 372. *tercep*. vllam. p. 376. *vari*. & quadratum. p. 419. *B duca*. cuius triplus est. p. 445. *quadra*. quadrato triplici. p. 463. *termi* Quare cum. p. 475. *has dupl* duplex positio. 505. *tis*. 3 ad 11. p. 559. *termi*. rationis datæ terminos. p. 565. *earum*. compositioni. p. 573. *ceden* ásque terminus C. p. 576. *D iam. dele*. Rationis. p. 577. propos. duo antecedentes. p. 580. A B conse. dele rationi. p. 581. *quæ* L , B , dele ill. p. 596. sitam ta aliquot. p. 597. primum & , primum quidem. p. 598. tum 9. debebunt ordinari. p. 599. tam. ductis. 601. gitudi , longitudinum. 602. ratio. p. 608. conuers. horis. p 621. ipsi, ipsis. p. 642. *tium* productos. p. 645. nem esse , gradus septem decimis. p. 649. minus puri dele vnius gradus 8. p 652. merus pro numeris. p. 683. rotibus , adeò ipsis B , C. p. 684. N. vt X , N , ita X , Z , simul ad Z. p. 694. tionis probarum.

Facultas R. P. Prouincialis Societatis IESV in Prouincia Lugdunensi.

LAVRENTIVS GRANNON Prouincialis Societatis IESV, in Prouincia Lugdunensi, iuxta priuilegium eidem Societati à Regibus Christianissimis Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Dec. 1606. Ludouico XIII. 14. Febr. 1611. & Ludouico XIV. regnante 23. Dec. 1650. concessum; quo Typographis omnibus prohibetur ne libros ab eiusdem Societatis hominibus compositos absque superiorum permissione imprimant, permittit Guillelmo Barbier Typograph. Reg. Lugdunensi, librum qui inscribitur, *Institutionum Arithmeticarum libri quatuor, Authore P. Vincentio Leotaudo Societatis IESV*, ad 10. proximos annos imprimere, ac diuendere possit. Datum Lugduni 12 Octobris 1659.

L. GRANNON.

APPROBATIO.

EDitioni huius libri cui titulus est *Institutionum Arithmeticarum libri quatuor, Authore P. Vincentio Leotaudo Societatis IESV*, lubenter annuimus. Lugduni die 30. Ianuarij 1660.

DENEVF-VILLE Vic. Gen.

CONSENTEMENT.

VEu la susdite Approbation, Ie n'empesche pour le Roy qu'il soit permis à Guill. Barbier Imprimeur du Roy à Lyon d'imprimer & mettre en lumiere le liure intitulé *Institutionum Arithmeticarum libri quatuor*, composé par le R. P. Leotaud de la Compagnie de IESVS, auec deffences à tous autres, en tel cas requises. Fait à Lyon ce 31. Ianuier 1660.

VIDAVD.

SOit fait suiuant les conclusions du Procureur du Roy. A Lyon ce 31. Ianuier 1660.

SEVE.